



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar

# MEMS rezgőkondenzátor tervezése Kelvin-szondás mérésekhez

TDK DOLGOZAT

*Készítette*  
Deák Elemér Dávid

*Konzulens*  
Dr. Plesz Balázs  
Dr. Szabó Péter Gábor



Elektronikus Eszközök Tanszéke  
2020. október 28.

# Tartalomjegyzék

<b>Kivonat</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>1. Bevezető</b>	<b>1</b>
<b>2. Mérési eljárás</b>	<b>2</b>
2.1. Fémek és félvezetők sáv szerkezete . . . . .	2
2.2. Kilépési munka . . . . .	3
2.3. Kontakt potenciál . . . . .	4
2.4. Félvezetők felületi viszonyai . . . . .	5
2.5. Felületi potenciál kapacitív mérése . . . . .	5
2.6. Kelvin-szondás mérés leírása . . . . .	6
2.6.1. Harmonikus gerjesztés vizsgálata . . . . .	6
<b>3. Mérőfej meghajtása</b>	<b>10</b>
3.1. Termikus gerjesztés vizsgálata . . . . .	10
3.2. Szinuszos állandósult állapot vizsgálata . . . . .	12
3.2.1. 1D Hőmérsékleteloszlás számítása . . . . .	12
3.3. Termoelasztikus csillapítás . . . . .	14
3.4. Termikus modellillesztés . . . . .	14
3.5. Mechanikus modellillesztés . . . . .	15
3.6. Heterogén rétegszerkezet . . . . .	16
<b>4. Véges elem modell</b>	<b>17</b>
4.1. COMSOL Multiphysics . . . . .	17
4.2. Geometriai modellek ismertetése . . . . .	18
4.2.1. Meanderes felfüggesztésű platform . . . . .	18
<b>5. Összefoglalás és kitekintés</b>	<b>24</b>
<b>Függelék</b>	<b>25</b>
F.1. 1D hőterjedés megoldása . . . . .	25
F.2. Végtelen sík és ponttöltés kapacitása . . . . .	26
F.3. Fourier-sor együtthatóinak számítása . . . . .	27
F.4. Numerikus integrálás trapéz módszerrel . . . . .	29
<b>Ábrák jegyzéke</b>	<b>30</b>
<b>Táblázatok jegyzéke</b>	<b>31</b>

# Kivonat

Napjainkban a napelemek egyre növekvő elterjedésével az energiapiacra, egyre fontosabb igény a napelemek hatásfokának növelése, és a gyártásuk a megbízhatóbbá tétele. Számos vizsgálati módszert dolgoztak ki, melyek segítségével növelhető a gyártási pontosság és lehetőség nyílik az esetlegesen kialakuló hibahelyek feltérképezésére a napelemcellákban. Az egyik ilyen elterjedt érintésmentes vizsgálati módszer a Kelvin-szondás mérés, melynek során egy rezgőkondenzátor segítségével mérik a minta felületének potenciálját. A mérés során a félvezető minta felületétől 1-10  $\mu\text{m}$  távolságban mozgatjuk az elektródát állandó frekvenciával, melynek következtében a kapacitás változás miatt váltakozó áram jön létre. Ez az áram azonban a megfelelő kompenzáló feszültséggel nullára csökkenthető. Az egyes pontokban létrejövő kontaktpotenciál-különbségek feltérképezéséből pedig a hibahelyekre lehet következtetni.

Az eddigi mérési berendezésekkel és mérőszondákkal azonban nem volt lehetőségünk nagyfelbontású lokális mérések végzésére. A felbontás növelésére kézenfekvő megoldás lenne a mérőfejben elhelyezkedő rezgőkondenzátor méretének csökkentése. A jelenlegi mechanikai kialakítás mellett azonban a rezgőelektróda mérete nem csökkenthető tovább, mivel a szórt kapacitások jelei elnyomják a mérőjelet. A fejlesztés során ezért az eddigi rezgőkondenzátort egy síkelektrodás MEMS (mikro-elektromechanikus rendszer) rezgőszerkezetre cserélnénk, amely kisebb szórt kapacitása és nagyobb rezgési frekvenciája révén kisebb mérőfelület esetében is lehetőséget biztosít megbízható mérésre, de egyben újfajta kihívásokat is állít elénk.

A mikroméretű rezgőkondenzátor méretei miatt a Kelvin-szondás mérés már alkalmas lenne egy néhányszor 10 mikrométeres tartományt lokálisan vizsgálni, lehetőség nyílna a mérési idő csökkentésére is nagyobb működési frekvenciák mellett, valamint a jel-zaj viszony is növelhető lenne. Az új mérőfejjel a napelemcellákon végzett pásztázás után már nem csupán az adott cellában található hibahelyek lennének meghatározhatók, hanem egy gyártósorba illeszthető mérőegység is megvalósítható lenne, amellyel a gyártás során érintésmentesen lehetne karakterizálni az egyes cellákat. A cellákat változtatható terhelés alá helyezve és a felületi potenciált folyamatosan figyelve a cella kimeneti karakterisztikáját érintésmentesen és lokálisan tudnánk mérni.

A dolgozatomban ezen MEMS alapú, felületi potenciál mérésére alkalmas rezgőkondenzátor tervezését részletezem. A tervezés jelenlegi fázisában a szerkezet geometriai paraméterezése zajlik, melynek során egy elhajló lemez numerikus analízisével foglalkoztam. A csatolt fizikai leírás és modellezés kiterjed a mérőfej mikromechanikai és termikus leírására, valamint végelem-szimulációjára.

Munkám során kitérek még a rezgőkondenzátoros Kelvin-szondás mérés működésére, a rezgőelektróda specifikációja és előzetes méretezési megfontolásaira, valamint a méretezést segítő analitikai modellre és ennek számítógépes változatára. A mérőfejről alkotott modell végelem szimulációja mellett, a végelem-módszer működéséről és alkalmazásáról is értekezek.

# Abstract

Nowadays with the increasing spread of solar cells on the energy market it's becoming more important to increase the efficiency of solar cells as well as to make their production more reliable. There are numerous examination techniques developed to increase manufacturing precision and to map faulty points on the surfaces of solar cell. One of the contactless measuring techniques is the Kelvin probe measurement where we're measuring the surface potential with an oscillating capacitor. During the measurement we move one of the plate of the capacitor 1-10  $\mu\text{m}$  above the sample with a constant frequency, because of this change in capacitance a varying current is induced in the circuit. However this current can be made zero if we apply a suitable compensation voltage, therefore we can conclude the map of surface potential from the difference in voltages from point to point.

With the current measuring devices and probes there were no possibility to measure with higher resolution on a local scale. To increase the resolution it's an obvious solution to decrease the size of the measuring capacitor plate. With the current mechanical form we can't decrease the size of the probe because the signals of the parasitic capacities dominates the measured signal. During the development we're placing the measuring capacitor plate on an oscillating MEMS (Micro Electro-Mechanical System) plate, with smaller size, parasitic capacities and greater operating frequencies, which enables accurate measurement with smaller measuring plate however with this new challenges emerges.

Because of the microscopic size of the measuring capacitor the Kelvin probe measurement can have a resolution of a couple 10s of  $\mu\text{m}$ -s, a shorter measuring time with greater operating frequency, as well as greater signal to noise ratio. After a scan on a solar cell with this new probing head not only we could identify faulty points on a cell, but also make a monitoring tool to put in the production line to characterizes individual solar cells without making contact with them. Under a variable load we could measure the output characteristics of the solar cells without making contact with them while measuring the surface potential.

In my paper I describe in detail the design process of this oscillating MEMS capacitor. In this state of development I'm parameterizing the geometry and making the analytical and numerical analysis of the system. The coupled physical description and modelling includes the description of the micromechanical and thermal parts as well as the finite element method simulation.

During my work i'm detailing the Kelvin probe measurement method, the specification of the geometry of the MEMS device and the analytical and numerical model of this system. Beside this, the paper will include the brief theory of finite element analysis and it's applications.

# 1. fejezet

## Bevezető

Mindennapi életünk szerves részévé váltak az okoseszközök, a számítógépek és az információs technológia. Ezen eszközök és infrastruktúrák üzemeltetéséhez és fejlesztéséhez a XX. század második felétől kezdve, egyre nagyobb részesedésben, szilícium alapú integrált áramköröket használunk. Az áramkörök méretének rohamos csökkenése ezen áramkörök vizsgálatával és fejlesztésével számos kihívás és akadály elé állítja a mérnököket, így új vizsgálati eszközök és módszertanok kidolgozása szükséges.

Ezen mérési eljárások egyik példája a Kelvin-szonáds felületi potenciál mérés. Bár maga a mérési eljárás nem újkeletű, annak a modern gyártástechnológiába történő integrálása nem egyszerű feladat. Egy lehetséges módszer az áramkörök méretének csökkenésével a vizsgáló berendezések méretének csökkentése, kihasználva a Mikro Elektro-Mechanikus Rendszerek (MEMS) által biztosított pontos és gyors működést. A mérőrendszer fejlesztése nem egyszerű feladat, hiszen a  $\mu\text{m}$ -es mérettartományok ugyan a MEMS eszközök számára elérhetőek, de az eszközök méreteit és üzemi frekvenciájukat tekintve még fejleszthetők.

Nagy kitérések elérésére általában nagyméretű meanderezett rugókat és aktuátorokat tartalmazó eszközöket használnak[1] [2]. Ezen eszközök hátránya a nagy méret és az ezzel együtt járó viszonylag nagy tömeg, mely korlátozza a működési frekvenciát. Egy másik lehetséges probléma a működési tartományukon mutatott nagyfokú nemlinearitás és inkább impulzusüzemű kapcsolástechnika, mint látni fogjuk ezekre a problémákra a rezonáns meghajtás nyújt egy lehetséges megoldást. Egy másik út, a meanderező struktúrákkal szemben, a hosszú egyenes konzollokkal rendelkező struktúrák is jelentős kitéréseket produkálhatnak[3], ám a méretükből és súlyukból származó korlátok ezeket a struktúrákat is érintik.

Dolgozatomban áttekintjük a Kelvin-szonáds mérés módszertanát és megismerkedünk a szükséges fogalmakkal és mennyiségekkel, valamint a MEMS eszközök termikus gerjesztésének lehetőségét is körbejárjuk. Bemutatásra kerülnek a szükséges matematikai modellek és fogalmak, valamint a mérőfejek számítógépes modelljei, az azokon végzett szimulációk és azok eredményei.

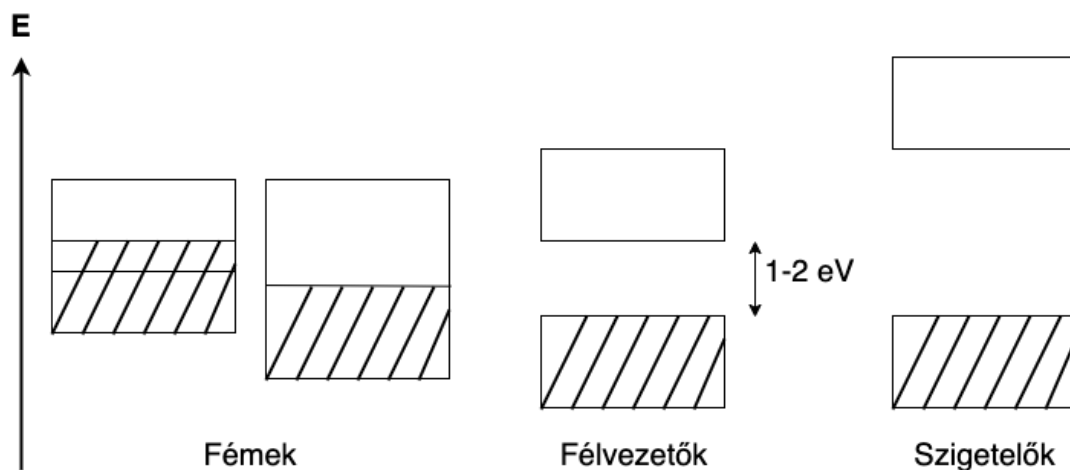
## 2. fejezet

# Mérési eljárás

Ahhoz, hogy megértsük a kapcsolatot a félvezetők felületi potenciálviszonyai, a belső felépítésük és sáv szerkezetet között, először egy kis szilárdtestfizikai áttekintést kell tennünk.

### 2.1. Fémek és félvezetők sáv szerkezete

A kristályos anyagok elektromos tulajdonságait a bennük fellelhető különböző energia sávokkal és ezek tulajdonságaival magyarázhatjuk. Ezek a sávok az atomok diszkrét energiaszintjeinek[4] és a kristályos anyagokban található atomok számának következtében jelennek meg. A sávok jelentik az elektronok számára elérhető energiaszinteket és az ezekhez köthető kvantumállapotokat.[4] A fémeket, a félvezetőket és a szigetelőket a sáv szerkezetük alapján tudjuk megkülönböztetni.<sup>1</sup>A sáv szerkezetek összehasonlítását a 2.1. ábrán láthatjuk.



**2.1. ábra.** Különböző anyagok sáv szerkezete. A sraffozott rész az elektronok által betöltött energiaszinteket jelzi. Az ábrák nem méretarányosak.

Az energiasávok közül a részben betöltött sávok határozzák meg a szilárdtestek elektromos tulajdonságait. Ezeket az energiaszinteket betöltő elektronok rendelkeznek a legkisebb kötési energiával, így ezek az elektronok gerjeszthetők a legkönnyebben termikus kölcsönhatásokkal. A sávokat különböző nevekkel is megkülönböztetjük, az energiaértékeik és telítettségük alapján. A legmagasabb energiával rendelkező

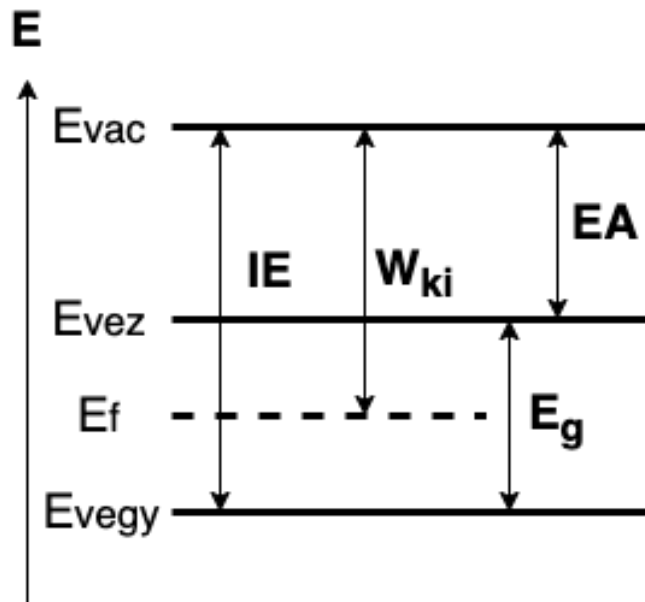
<sup>1</sup>Az anyagok sáv szerkezetét és az elektronok eloszlását a leggyakrabban 0 K-en értelmesszük. A hőmérséklet növelésével az elektronok termikus gerjesztést kapnak, és az elérhető állapotokat a Fermi-Dirac statisztika alapján töltik be.

részben betöltött sávot vezetési sávnak nevezzük, míg az utolsó betöltött energiasávot vegyértéksávnak hívjuk. A vegyértéksávban találhatóak az atomokhoz kötött elektronok, melyek nem tudnak részt venni az elektromos vezetésben, ám termikus vagy elektromágneses gerjesztés hatására a vezetési sávba kerülhetnek, növelve ezzel a vezetőképességét a szilárdtestnek.

Fémek esetében a vezetési és vegyértéksáv fedésbe léphet, vagy a vegyértéksáv csak részben feltöltött lehet, így az elektronok energiája folytonosan változhat. Félvezetők esetében a vezetési és vegyértéksáv között egy pár eV különbség van, melyet az úgynevezett tiltott sáv szélességének, vagy idegen szóval bandgapnek nevezünk.<sup>2</sup>A szigetelőknél ez az energiakülönbség kb. 5 eV-nál nagyobb, így termikus gerjesztés hatására sem léphetnek át elektronok a vegyértéksávból a vezetési sávba.

## 2.2. Kilépési munka

A vezetési sáv fölött a vákuumszint helyezkedik el, ez az energiaszint az elektron kötetlen állapotához tartozó energiaszint, vagyis a szilárdtest felületéből kiszakított, mozgási energiával nem rendelkező elektron energiája. A 2.2. ábrán a félvezetők nevezetes energiaszintjei láthatók.



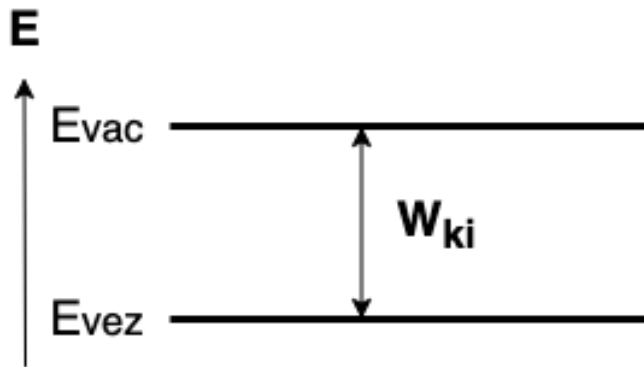
**2.2. ábra.** Egy félvezető sáv szerkezete.  $E_{vac}$  a vákuumszint,  $E_{vez}$  a vezetési sáv alja,  $E_{veg}$  a vegyértéksáv teteje, EA az elektronaffinitás, IE az ionizációs energia,  $E_F$  a Fermi szint<sup>3</sup> és  $W_{ki}$  a kilépési munka.

Fémek esetében a kilépési munka, az elektronaffinitás és az ionizációs energiák megegyeznek. Ezt a 2.3. ábrán szemléltetem. Félvezetők esetén a kilépési munka az anyag adalékolásától, hőmérsékletétől és az esetleges kristályhibáktól függ, azonban kis méreteknél a felületi hatások miatt [5] a geometriai viszonyoktól is függhet.<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Az eV vagy elektronvolt az energia mag- és szilárdtest fizikában használatos mértékegysége. 1 eV mozgási energiával rendelkezik egy vákuumban gyorsított elektron 1 V potenciálkülönbség hatására.

<sup>3</sup>Fermi szintnek azt az energiát nevezzük, amelynél az elektronok 50%-a kisebb energiával rendelkezik.

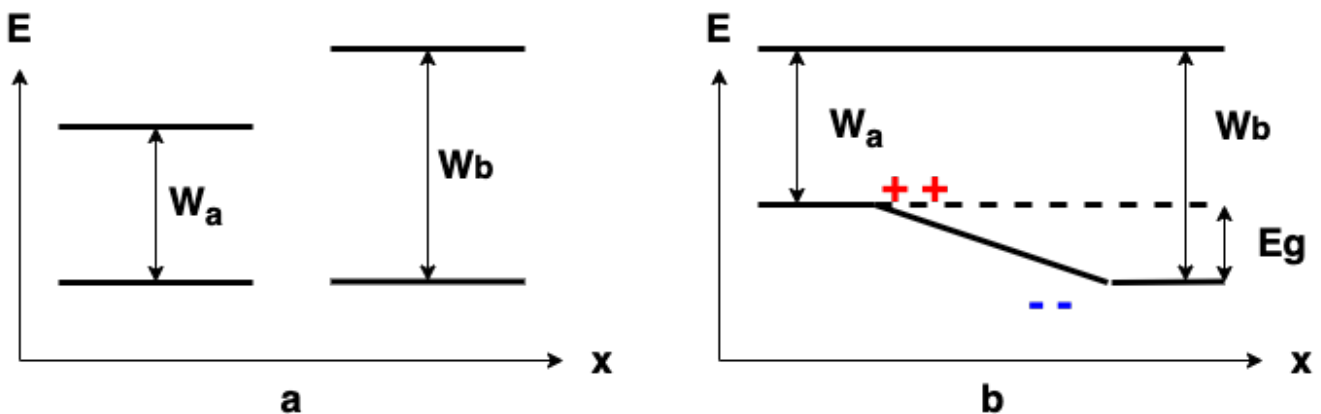
<sup>4</sup>A felületen megszakad a kristályrács periodikussága, így a tiltott sávban megengedett energiaszintek jelennek meg. Ezeket az energiaszinteket töltéshordozók tölthetik be, így egy felületi töltéssűrűséget hozva létre, mely a felület közelében elgörbíti az energiasávokat. [5]



2.3. ábra. Kilépési munka fémeknél.

### 2.3. Kontakt potenciál

Ha két különböző szilárdtestet hozunk fémes kapcsolatba egymással, akkor az eltérő sáv szerkezet miatt egy kiegyenlítődési folyamat indul meg. A kisebb kilépési munkájú anyagból elektronok diffundálnak a nagyobb kilépési munkájú anyagba. Az átdiffundált elektronok a kontaktusfelület közelében egy töltött kettősréteget alakítanak ki, melynek elektromos tere ellensúlyozza az eltérő kilépési munkákból származó energia különbségeket, és a kialakuló elektromos tér meggátolja további elektronok diffúzióját.[5] Fémek esetében a kettősréteg vastagsága atomi nagyságrendbe esik, a fémek nagy vezetőképessége miatt. Félvezetők esetében ez a vastagság akár a néhány  $\mu\text{m}$ -t is elérheti, így kis geometriai méretek esetén, a felületi jellemzők nagymértékben tudják befolyásolni a félvezető elektromos tulajdonságait.[5]



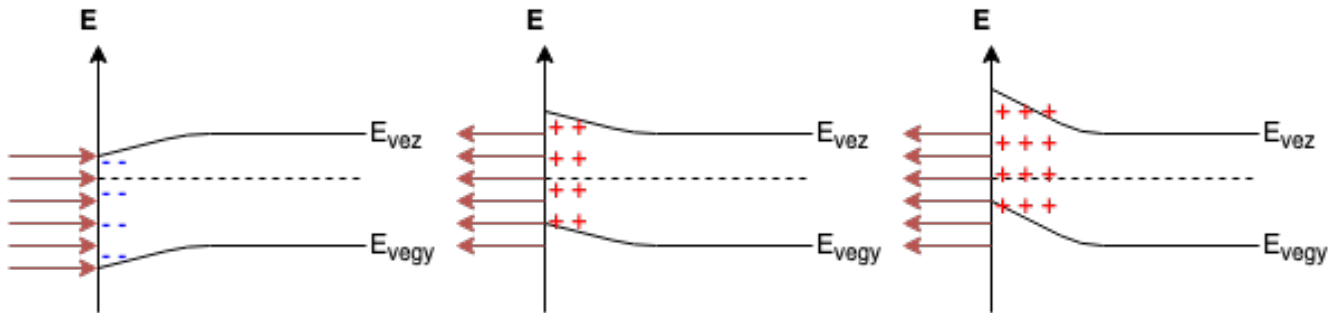
2.4. ábra. Kilépési munkák különbsége (a) és a kialakuló sávelhajlás (b).  $E_g$  a kontaktusfelületen kialakuló energiagát nagysága.

A 2.4. ábrán a kialakuló energia- és töltésviszonyokat láthatjuk. A kialakuló energiagát nagysága félvezetők esetében az adalékolástól és a rácshibáktól függ, így ennek az energiagátnak a vizsgálatával a félvezetők adalékolása és a rácshibákból adódó hatások is vizsgálhatók.

Külső elektromos tér segítségével a felülethez közel töltéseket tudunk felhalmozni, amelyek az előzőekhez hasonlóan egy felületi töltésréteget hozhatnak létre, megváltoztatva ezzel a szilárdtest sáv szerkezetét. Attól függően, hogy ez a hatás milyen irányba változtatja meg a sáv szerkezetet, beszélhetünk akkumulációról, kiürítésről és inverzióról. Félvezetőknél akkumuláció esetében a felülethez közeli többségi töltéshordozók felhalmozásáról beszélünk, így a felülethez közel egy erősebb adalékoltságú rész alakul ki, mely külső térrel



vezérelhető. Az elektromos teret az ellenkezőjére változtatva, a felület közeléből a többségi töltéshordozók számát csökkentjük, egészen az intrinzik (adalekolatlan) félvezető állapot eléréséig. A kiürítés tovább növelésével a felület közelében a többségi töltéshordozókkal ellentétes töltéshordozók koncentrációját tudjuk növelni, ezzel a felület közelében mintegy invertálva az adalekolás típusát. A külső tér hatását a félvezető sávszerkezetre a 2.5. ábrán láthatjuk.



**2.5. ábra.** Akkumuláció, kiürítés és inverzió félvezetők esetében. Az ábrán piros nyíllal a külső elektromos teret jelöltem.

A mélységet, amelyen belül a külső elektromos tér hatást fejt ki, a szilárdtestek kategorizálására is használhatjuk. A fémek esetében a külső elektromos tér néhány atomi távolsáig fejt ki hatását, így jó közelítéssel állíthatjuk, hogy az elektromos tér a fémekbe nem hatol be, és a fémek belsejében azonosan nulla. Szigetelők esetében az elektromos tér a szigetelő belsejében lévő dipólusos molekulákra forgatónyomatékot fejt ki, így polarizálva azokat. Ennek következtében a szigetelő belsejében egy elektromos tér alakul ki, vagyis a külső tér a szigetelő teljes térfogatában hatást tud kifejteni. A fémekkel és a szigetelőkkel ellentétben a félvezetőknél a külső elektromos tér hatása az előbb említett két eset között helyezkedik el, vagyis az adalekolástól függően változik a külső elektromos tér hatása. Ugyanakkor a geometriai méretek csökkenésével a félvezetők egyre inkább szigetelőként kezdenek viselkedni, a fogalom ezen értelmében, vagyis a külső elektromos tér hatását nem árnyékolják le.

## 2.4. Félvezetők felületi viszonyai

Az eddigi eredmények levezetésénél a kristályos anyagot tökéletes és végtelen kiterjedésűnek feltételeztük. A gyakorlatban azonban a szilárdtestek véges térfogattal és nem tökéletes kristályráccsal rendelkeznek. A továbbiak során a kristályhibáktól ugyan eltekintünk, de a felületi hatásokat figyelembe vesszük.

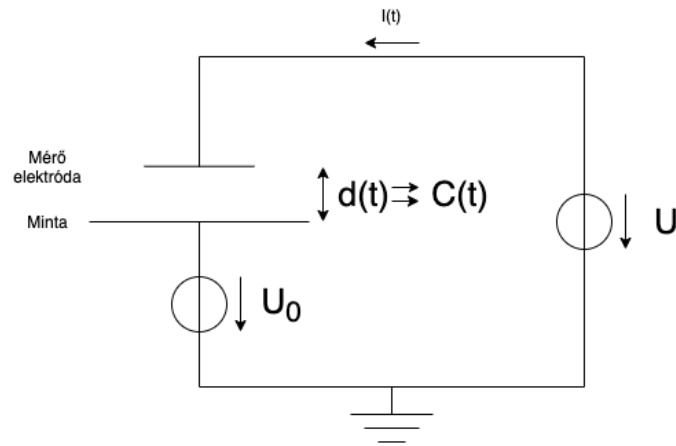
Az előzőekben láttuk, hogy külső elektromos tér hatására a félvezető sávszerkezete elhajlik, és töltésfelhalmozódás következik be, azonban ennek a fordítottja is igaz. Ha a felület közelébe kötött töltéseket, rácshibákat vagy egy másik szilárdtestet helyezünk, hasonló sávelhajlást fogunk tapasztalni. Ezek a hatások a sávelhajlás következtében befolyásolják a felület közeli elektronok kilépési munkáját és ezzel az elektromos potenciáljukat is, így ennek mérésével következtethetünk az anyag felületi viszonyaira is.

## 2.5. Felületi potenciál kapacitív mérése

A felület potenciáljának mérésekor kialakuló kontaktus potenciál kialakulása elkerülhető, ha a felület elektronjaival nem egy szilárdtest elektronjaival hatunk kölcsön, hanem egy külső elektromos térrel. A külső tér hatására ugyan bekövetkezik egy töltésmigráció, és ennek következtében egy sávelhajlás, azonban a kölcsönhatás minimalizálásával zavarmentesen mérhetjük meg a felület potenciálját.

## 2.6. Kelvin-szondás mérés leírása

Külső elektromos tér keltésére alkalmas egy kondenzátorfegyverzet is, azonban a kölcsönhatás minimalizálásához a térerősséget kell minimalizálni. Az elektromos tér pontos mérése a felület közelében nem egyszerű, figyelembe véve, hogy a felület és a mérőfegyverzet közötti távolságok igencsak csekélyek és a mérendő elektromos teret maga a mérőműszer is befolyásolná. Az elektromos tér direkt mérése helyett egy abból származtatott mennyiséget vizsgálunk. Mivel a felület potenciálját szeretnénk vizsgálni, így azt nem célszerű változtatni, azonban a mérőfegyverzet töltőáramát mérhetjük. Statikus elrendezésben a mérőfegyverzet és a felület közötti kapacitás függvényében egy exponenciálisan lecsengő áramunk lenne mérhető (ugrásgerjesztést feltételezve), azonban a kapacitás periodikus változtatásával az áram is periodikussá tehető. A kapacitás változtatására, spektrális tisztaság szempontjából, a tisztán harmonikus változás lenne ideális, azonban ez a gyakorlatban nehezen kivitelezhető. Megvalósítás szempontjából egyszerűbb a felület és a mérőfegyverzet közötti távolságot harmonikusan változtatni.



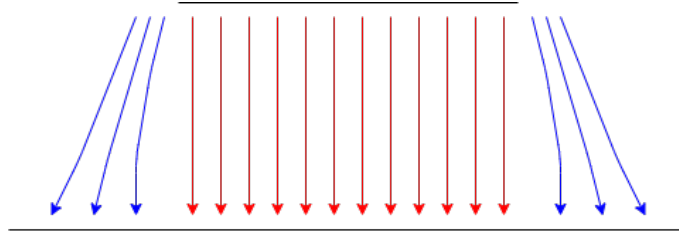
2.6. ábra. Kelvin-szondás mérés sematikus összeállítása.

A mérési összeállítás a 2.6. ábrán láthatjuk. Az ábrán a minta felületi potenciálját az ismeretlen  $U_0$  értékű feszültségforrás reprezentálja, míg a mérőjel feszültségét az  $U$  értékű feszültségforrás. A mérés során a mérőelektróda és a mérendő felület közötti távolságot szinuszosan változtatjuk és mérjük az áramkörben folyó áramot.

### 2.6.1. Harmonikus gerjesztés vizsgálata

A következőkben vizsgáljuk az áram változását a kondenzátorfegyverzetek szinuszos mozgása esetén. A fegyverzetek távolságát jelöljük  $x(t)$ -vel, ennek időbeli változása  $x(t) = d_0 + d_m \cos(\omega t)$  feltételezve, hogy  $0 < d_m < d_0$ . A fegyverzetek közötti kapacitás számolásakor az elektromos teret felbontjuk a mérőfegyverzet alatt és mellett kialakuló részre, ezt szemlélteti a 2.7. ábra, az ábrán piros színnel a direkt kapacitást okozó elektromos teret, míg piros színnel a szórt kapacitást okozó elektromos teret ábrázoltam. A kapacitás efféle felbontása mellett szól a kétfajta komponens aszimptotikus viselkedésének különbsége. Míg a direkt komponensek függenek az elektródák távolságától, úgy a szórt kapacitások nem, ennek levezetését a F.2. fejezetben részletezem.

A fegyverzetek közötti direkt kapacitás számolásánál feltételezzük, hogy az elektródák közötti térrész homogén, így azt egy síkkondenzátorral közelíthetjük. A kapacitások számításánál bevezetjük a  $C_0$  nyugalmi direkt kapacitást és az  $m = \frac{d_m}{d_0}$ , úgynevezett modulációs mélységet.



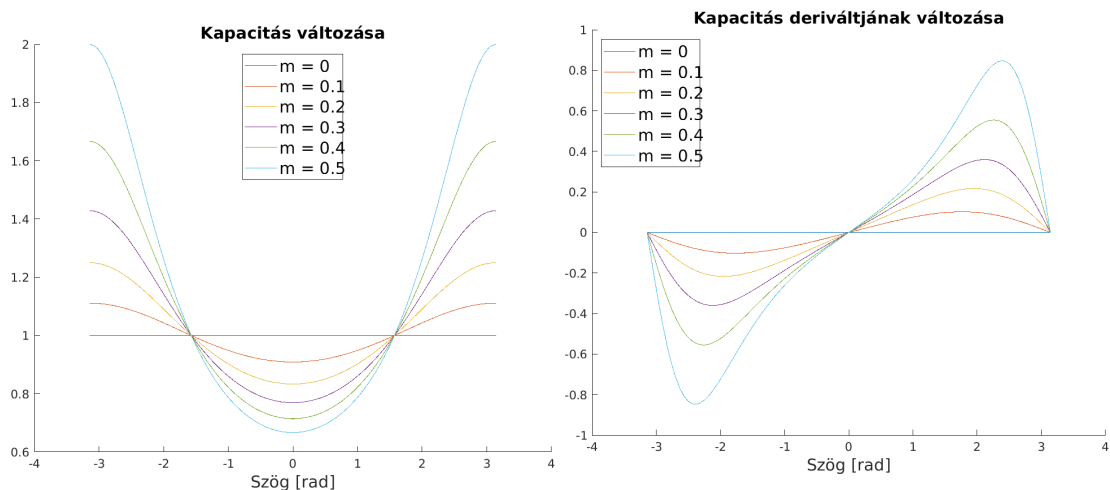
**2.7. ábra.** Direkt és szórt kapacitást okozó elektromos térkomponensek.

$$\begin{aligned}
 C(t) &= C_{\text{szórt}} + \epsilon_0 \frac{A}{x(t)} = C_{\text{szórt}} + \epsilon_0 \frac{A}{d_0 + d_m \cos(\omega t)} \\
 &= C_{\text{szórt}} + \epsilon_0 \frac{A}{d_0} \frac{1}{1 + \frac{d_m}{d_0} \cos(\omega t)} = C_{\text{szórt}} + \frac{C_0}{1 + m \cos(\omega t)}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A fegyverzetek távolságának változásakor változik az elektródarendszer kapacitása, így a fegyverzeteken tárolt töltések mennyisége is, az időben változó töltésmennyiséghez egy töltő- és kisütő áram tartozik, ez az áram lesz a mérendő mennyiségünk. Az áram kifejezésekor elhanyagoljuk a kondenzátorfegyverzet és a feszültségforrás közötti ellenállást, ezzel az elhanyagolással az áramot ki tudjuk fejezni zárt alakban, valamint elkerüljük a nemlineáris differenciálegyenlet megoldását. Az elhanyagolást könnyen megalapozhatjuk, ha feltételezzük, hogy a mérőelektróda és a kiolvasóáramkör közötti távolság kicsi, vagyis a kiolvasóáramkör az elektróda közvetlen környezetébe van integrálva. A kapacitás és annak változásának időfüggvényét a 2.8a. és 2.8b. ábrán szemléltettem.

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= C(t)(U - U_0) = \left( C_{\text{szórt}} + \frac{C_0}{1 + m \cos(\omega t)} \right) (U - U_0) \\
 i(t) &= \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} (U - U_0) \\
 i(t) &= \frac{m\omega C_0 \sin(\omega t)}{(1 + m \cos(\omega t))^2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

A mérés során a rendszer áramát mérjük és dolgozzuk fel, így célszerű előállítani annak spektrális felbontását is. A spektrális felbontás előállításához az áram időfüggvényét Fourier-sorba kell fejteni, a sorfejtést megkönnyítendő kihasználjuk a jel szimmetriáit. Mivel az áram időfüggvénye páratlan, így a Fourier-sorban csak szinuszos komponensek lineáris kombinációja fordul elő. A szinuszos komponensek együtthatóit meghatározhatjuk a periodikus függvény harmonikus függvények bázisára vett projekciójával. A projekció következtében az együtthatók a következőképpen számíthatók, ahol  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ :



(a) A kapacitás változásának időfüggése

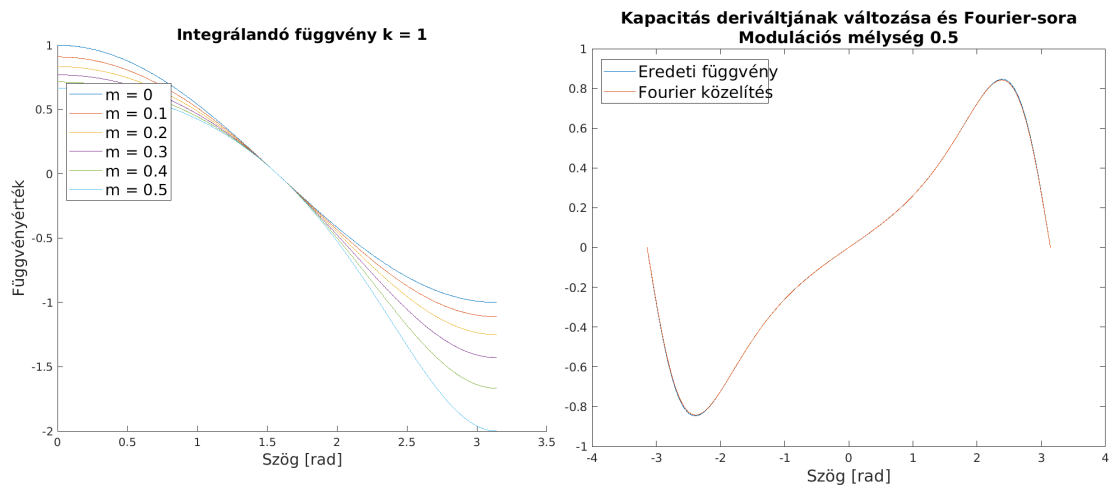
(b) A kapacitás deriváltjának változása az idő függvényében

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_T i(t) \sin(k\omega t) = \frac{2}{T} \int_T \frac{dC(t)}{dt} (U - U_0) \sin(k\omega t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left( C(t) \sin(k\omega t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} k\omega C(t) \cos(k\omega t) dt \right) (U - U_0) \\
 &= -\frac{4k\omega C_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\cos(k\omega t)}{1 + m \cos(\omega t)} dt (U - U_0) \\
 &= -\frac{4k\omega C_0}{T\omega} \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\phi)}{1 + m \cos(\phi)} d\phi (U - U_0) \\
 &= -\frac{2k\omega C_0}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\phi)}{1 + m \cos(\phi)} d\phi (U - U_0)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Az utolsó integrál kiértékeléséhez numerikus integrálást használunk, mivel az integrandus primitívfüggvénye igencsak bonyolult kifejezés, ha egyáltalán létezik. Az integrál numerikus kiértékeléséhez a trapéz módszert használtuk fel, vagyis az integrált az integrandus által határolt trapézok területének összegével közelítjük. Az integrál értéke függ a számítandó felharmonikus sorszámától, vagyis, hogy hányadik együtthatót számoljuk, valamint a modulációs mélységtől. Az együtthatók számításához az integrált a felharmonikus sorszáma alapján a modulációs mélység polinomjaival közelítjük. A szükséges számításokat Matlab[6] segítségével végeztem, ennek forráskódja megtalálható a F.3. fejezetben, valamint az integráláshoz használt függvény a F.4. fejezetben. A numerikus integrálás során a teljes intervallumot 1000 egyenletesen elosztott pottal közelítettük, a modulációs mélységet a  $[0,0.5]$  intervallumon 100 pontban értékeltük ki és a Fourier-sorfejtést az első 10 felharmonikkal közelítettük. A numerikus integrálás végeredményét a modulációs mélység függvényében egy harmadfokú polinommal közelítettük, a legkisebb négyzetek módszerével. A kiadódó polinomok együtthatóit a 2.1. táblázatban láthatjuk, míg a közelítés pontosságát a 2.9b. ábrán.

	$m^3$	$m^2$	$m$	1
$k = 1$	-2.1283	0.4317	-1.6264	0.0015
$k = 2$	1.2081	0.3235	0.0561	-0.0014
$k = 3$	-0.8998	0.2328	-0.0302	0.0008
$k = 4$	0.3793	-0.1546	0.0194	-0.0005
$k = 5$	-0.1288	0.0611	-0.0081	0.0002
$k = 6$	0.0395	-0.0202	0.0028	-0.0001
$k = 7$	-0.0114	0.0061	-0.0009	0
$k = 8$	0.0032	-0.0018	0.0003	0
$k = 9$	-0.0009	0.0005	-0.0001	0
$k = 10$	0.0002	-0.0001	0	0

2.1. táblázat. Fourier-sor együtthatóinak polinomjai.



(a) Az integrálendő függvény különböző modulációs mélységeken

(b) Az eredeti függvény és Fourier-sorának első 10 tagja.

## 3. fejezet

# Mérőfej meghajtása

Az előző fejezetben láthattuk, hogy hogyan lehet egy rezgő kondenzátorfegyverzettel vizsgálni a félvezetők felületi potenciálját. A dolgozat további részében a méréshez szükséges periodikus mozgás létrehozásért felelős aktuátorról lesz szó.

MEMS eszközök esetén mechanikai mozgás létrehozására több lehetőség is a rendelkezésünkre áll. Ilyenek például az elektrosztatikus kölcsönhatáson alapuló aktuátorok[7]. Átlagos MEMS eszközök esetén az elektrosztatikus meghajtáshoz 50-100V nagyságrendű gerjesztés kell, azonban ezek a feszültség szintek, és a hozzájuk tartozó elektrosztatikus terek a milivoltos nagyságrendbe eső elektromos jelek mérését zavarnák, így esett a választás a termikus úton történő gerjesztésre.

### 3.1. Termikus gerjesztés vizsgálata

A meghajtást a termikus és mechanikus rendszerek közötti egyik legalapvetőbb kölcsönhatás, a hőtágulás segítségével valósítjuk meg. Ennek áttekintéséhez vizsgáljuk meg a kölcsönhatás fizikáját.

A termikus rendszer laírására a hőtranszport-egyenletet használjuk:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(-\lambda \text{grad}(T)) = q \quad (3.1)$$

Az egyenletben  $\rho$  az anyag sűrűsége,  $C_p$  az állandó nyomáson mért fajhő, míg  $\lambda$  az anyag hővezetőképessége. Az egyenlet jobb oldalán lévő  $q$  a térfogati hőteljesítmény sűrűséget határozza meg.

A 3.1. egyenlet meghatározza az anyagon belüli hőmérséklet eloszlást (adott gerjesztés és peremfeltételek mellett), majd ez a hőmérsékleteloszlás gerjeszti a mechanikai rendszert a konstitúciós egyenleteken keresztül.

A rendszer gerjesztését egy ellenálláson disszipálódó hőteljesítménnyel, vagyis az ellenálláson keletkező Joule hővel valósítjuk meg. Az ellenálláson fejlődő hőteljesítményt a 3.2. egyenlet adja meg.

$$P(t) = RI(t)^2 \quad (3.2)$$

Ha az ellenállást egy tisztán szinuszos áramot előállító forrásra kötjük, akkor a hőteljesítmény a következőképpen alakul.

$$I(t) = I_{ac} \sin(\omega_0 t) \\ P(t) = RI_{ac}^2 \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2} = \frac{1}{2} RI_{ac}^2 - \frac{1}{2} RI_{ac}^2 \cos(2\omega_0 t) \quad (3.3)$$

Az ellenálláson felszabaduló hőteljesítményt a meghajtandó MEMS eszközzel vezetjük el, ezzel hűtve az ellenállást. A számítások egyszerűsítése végett feltételezzük, hogy az ellenállás által generált hőteljesítmény

teljes egésze a MEMS eszközt fűti, valamint, hogy az ellenállás nem befolyásolja jelentősen az eszköz mechanikai tulajdonságait. Ezekkel az egyszerűsítésekkel az ellenállás modellezésétől eltekinthetünk, és egy állandó hőfluxusú peremfeltétellel helyettesíthetjük a szimulációk során.

A hőtágulás folyamatát lineáris anyagok esetében a 3.4 egyenlet írja le.  $\underline{\epsilon}_{th}$  az alakváltozási tenzor termikus komponense,  $\alpha$  a hőtágulási tenzor és  $T_{ref}$  a deformálódásmentes állapothoz tartozó referencia hőmérséklet. Izotróp hőtágulást feltételezve  $\alpha$  az egységmátrix skalárszorosává egyszerűsödik.

$$\underline{\epsilon}_{th} = \underline{\alpha} * (T - T_{ref}) \quad (3.4)$$

A hőtágulás hatására kialakuló megnyúlásokkal a mechanikai modellezésnél kompenzálnunk kell a tisztán rugalmas alakváltozásból származó megnyúlásokat, így  $\underline{\epsilon}_{el} = \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_{th}$  korrekcióval kell éljünk.  $\underline{\epsilon}$  az anyag deformációjából származó alakváltozási tenzor.

Az alakváltozási tenzort az elmozdulásokból azok gradienseinek segítségével számolhatjuk ki. <sup>1</sup>

$$\underline{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} * \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) \quad (3.5)$$

Itt  $u$  az anyagi pont elmozdulása a deformálódott és deformáció mentes állapota között.

A rugalmas megnyúlás ismeretében meghatározható az anyagban ébredő feszültség is, ennek leírása lineáris anyagok esetében legegyszerűbben a Hook-törvénnyel adható meg.

$$\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\epsilon}_{el} \quad (3.6)$$

Az egyenletben  $\underline{C}$  az anyag merevségi tenzora, mely megadja az anizotróp anyag rugalmas alakváltozásából származó mechanikai feszültségeket, megengedve a csatolást a normális és nyíró irányú alakváltozások és a hozzájuk tartozó normális és nyíró feszültségek között. A  $:$  művelet a tenzorok dupla skaláris szorzata, vagyis index jelölésmódban:  $(\underline{A} : \underline{B})_{ij} = \underline{A}_{ijkl} * \underline{B}_{kl}$

A mechanikai feszültségek és az elmozdulás között Newton II. egyenlete teremti meg a kapcsolatot, mely differenciális alakban a 3.7. egyenlet szerinti alakot ölti. Itt  $f_v$  a térfogati erősűrűségeket jelöli.

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_v \quad (3.7)$$

Ezzel a teljes termomechanikailag csatolt rendszert leíró differenciálegyenlet-rendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \text{div}(\lambda \text{grad}(T)) + q \\ \underline{\epsilon}_{th} &= \underline{\alpha}(T - T_{ref}) \\ \underline{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) \\ \underline{\epsilon}_{el} &= \underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_{th} \\ \underline{\sigma} &= \underline{C} : \underline{\epsilon}_{el} \\ \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &= \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_v \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>A totális megnyúlás számolásakor nem vesszük figyelembe a testek elfordulásából származó másodrendű tagokat, így megmarad a rendszer linearitása. Pontosabb számolásokhoz az alakváltozási tenzor Green-Lagrange-féle felírását kell használnunk, mely a másodrendű tagjaival kompenzálja az elsőrendű tagok hibáját, így egy merev test forgása esetén is nulla lesz az alakváltozási tenzor.

## 3.2. Szinuszos állandósult állapot vizsgálata

A 3.8 egyenletrendszer megoldása nem kis feladat, még a számítógépeknek sem, hiszen egy tranziens folyamatot kell szimulálni, azonban az egyenletrendszert egyszerűsíthetjük, ha kihasználjuk annak linearitását.

A rendszer gerjesztését felbonthatjuk egy állandó és egy szinuszosan változó komponensre. Ezzel a felbontással és a linearitással a rendszer válasza is egy állandó és egy szinuszosan változó komponensre bontható fel. Az állandó gerjesztési komponens számításánál a rendszert tranziens viselkedésétől eltekinthetünk, feltéve, hogy a gerjesztés megkezdésétől elég idő telik el,<sup>2</sup>ezzel a rendszer időfüggését is elhanyagolhatjuk!

Az állandósult állapot számításakor az időbeli deriváltakat nullával tesszük egyenlővé, így az állandósult komponensekre megoldandó differenciálegyenlet-rendszer a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
 0 &= \text{div}(\lambda \text{grad}(T)) + q \\
 \underline{\underline{\epsilon}}_{th} &= \underline{\underline{\alpha}}(T - T_{ref}) \\
 \underline{\underline{\epsilon}}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) \\
 \underline{\underline{\epsilon}}_{el} &= \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_{th} \\
 \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}_{el} \\
 0 &= \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{f}}_v
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A szinuszosan változó komponens leírására bevezetjük a szinuszosan változó jelek komplex csúcértékeit, más szóval fázorjait. Például az időben szinuszosan változó hőmérséklet helyfüggését a következőképpen adhatjuk meg, ahol  $\overline{T}_c(r)$  a hőmérséklet helyfüggő komplex amplitúdója:

$$T(r, t) = T_0(r) \cos(\omega t + \phi(r)) = \text{Re}(\overline{T}_c(r) e^{j\omega t}) \tag{3.10}$$

Az 3.8 egyenletrendszerbe behelyettesítve a komplex amplitúdókat és kihasználva az egyenletek linearitását adódik a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 j\omega \rho C_p \overline{T}_c &= \text{div}(\lambda \text{grad}(\overline{T}_c)) + \overline{q} \\
 \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_{th} &= \underline{\underline{\bar{\alpha}}}(\overline{T}_c - \overline{T}_{ref}) \\
 \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x^i} \right) \\
 \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_{el} &= \underline{\underline{\bar{\epsilon}}} - \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_{th} \\
 \underline{\underline{\bar{\sigma}}} &= \underline{\underline{\bar{C}}} : \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_{el} \\
 -\omega^2 \underline{\underline{\bar{u}}} &= \text{div}(\underline{\underline{\bar{\sigma}}}) + \underline{\underline{\bar{f}}}_v
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A komplex csúcértékekre való áttéréssel a szinuszosan változó komponens számításánál is elhanyagolhatjuk az időfüggést, és egy frekvenciától függő stacionárius állapot számításával határozhatjuk meg a szinuszosan változó dinamikai komponensek értékeit.

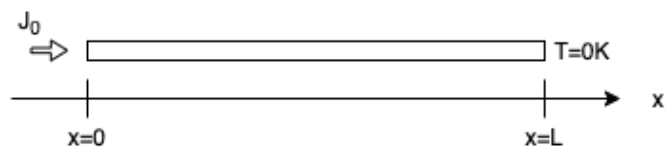
A további számítások során elhagyjuk a komplex mennyiségek fölül a felülvonást!

### 3.2.1. 1D Hőmérsékleteloszlás számítása

A termikus modell számításához remek intuíciót és egy hasznos mérőszámot ad az egydimenziós hőterjedés számítása.

<sup>2</sup>Egy lineáris rendszer állandósult állapotba kerülését a legkisebb abszolútértékű sajátértékével, vagy ami ezzel egyenértékű a legnagyobb időállandójával számíthatjuk. A kis méretű termomechanikus rendszerek esetében ez az időállandó a termikus rendszer időállandója lesz, melyet a termikus ellenállás és a termikus kapacitás szorzataként számolhatunk ki. A maximális időállandó( $\tau$ ) ismeretével az állandósult állapotot a bekapcsolástól számított  $5\tau$  idő elteltével értelmezzük.





**3.1. ábra.** Egy dimenziós hőterjedés számítása.

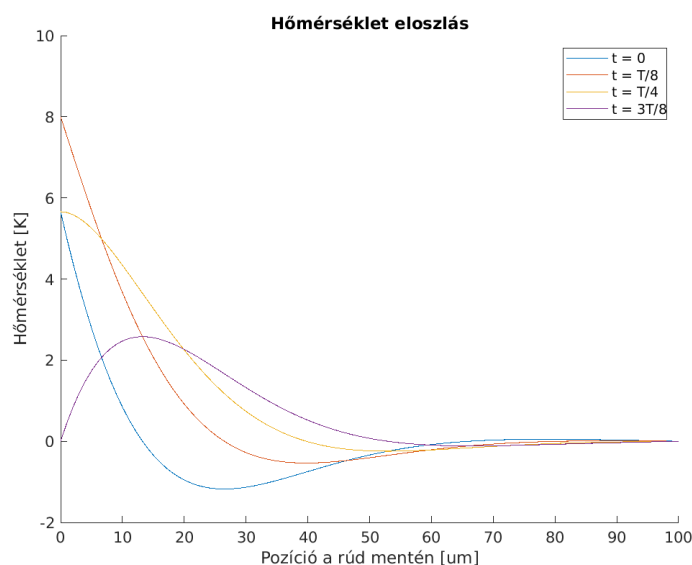
A modell elrendezését a 3.1. ábra mutatja. A modelltartományon térfogatán vegyünk hőforrásmentes hővezetést ( $q = 0$ ), a jobb oldali peremen állandó hőmérsékletet ( $T(L) = 0$  K) és a bal oldali peremen pedig egy állandó hőfluxust ( $-\lambda \text{grad}(T_c) = J_0$ ). Ezzel a megoldandó differenciálegyenlet:

$$\begin{aligned}
 j\omega\rho T_c &= \lambda \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \\
 -\lambda \left. \frac{\partial T_c}{\partial x} \right|_{x=0} &= J_0 \\
 T_c(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

A megoldáshoz vezessük be a  $d = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho C_p}}$  távolságot, ezzel a megoldás a következő alakot ölti:

$$T_c(x) = C_1 e^{+(1+j)\frac{x}{d}} + C_2 e^{-(1+j)\frac{x}{d}} \tag{3.13}$$

Itt  $C_1$  és  $C_2$  a peremfeltételeknek megfelelő konstansok. A megoldás alakjából látható, hogy bármelyik oldalról gerjesztve a modellt a hőmérséklet időfüggésében egy exponenciálisan lecsengő hőmérsékleteloszlást tapasztalunk. Az exponenciális csillapítást jellemző karakterisztikus távolságra ( $d$ ) a továbbiakban a behatolási mélységként fogunk hivatkozni.<sup>3</sup>A pontos megoldást a számítását és annak ábrázolását Matlab-ban végeztem, a felhasznált kódrészlet: F.1



**3.2. ábra.** Az 1 dimenziós hőterjedés megoldása.

<sup>3</sup>Érdekességként megjegyzendő, hogy a hőmérsékleteloszlás megoldásaként kapott eredmény a fizika más területein is felbukkan az azonos kiindulási differenciálegyenlet miatt. Például a nagyfrekvenciás áramkiszorítás számításánál is hasonló áramsűrűség eloszlást tapasztalhatunk, hiszen mindkét problémát egy Helmholtz-egyenlet írja le.

### 3.3. Termoelasztikus csillapítás

Az eddigiek során a termikus és mechanikai rendszerek között csak a hőtágulást vezettük be, mint csatolás a különböző fizikai interfészek között, azonban a pontosabb számításokhoz a termoelasztikus csillapítást is figyelembe kell vennünk.

A csillapítás forrása a mechanikai alakváltozás következtében létrejövő hőmérsékletváltozás. A mechanikai kompresszió hatására az anyagok felmelegsznek, míg megnyúlás hatására lehülnek, ez a folyamat alapvetően reverzibilis lenne, ám a hőmérsékletkülönbség hatására egy termikus kiegyenlítődési folyamat indul meg, ami a rendszer entrópiáját növeli. Ez az entrópiánövekedés a rendszer hasznos mechanikai energiáját csökkenti, vagyis csillapítja azt. Ez a csillapítás egy új térfogati hőforrás figyelembevételével modellezhető[8].

$$Q_{ted} = -T \frac{\partial \underline{S} : \underline{\alpha}}{\partial t} \quad (3.14)$$

Az egyenletben  $Q_{ted}$  a termoelasztikus csillapításból származó hőteljesítmény sűrűség és  $\underline{S}$  a második Piola-Kirchoff feszültségtenzor[8].

Szinuszos állandósult állapot esetén a termoelasztikus csillapítás a következőképpen fejezhető ki:

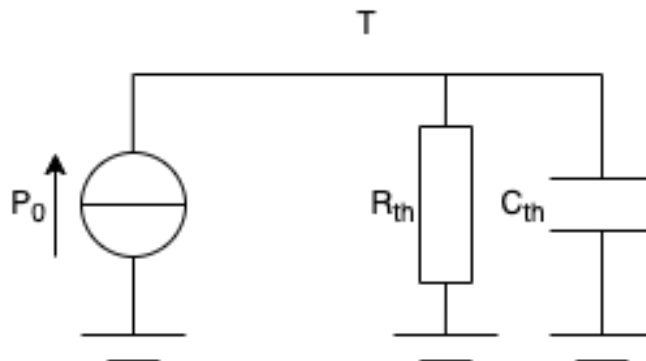
$$Q_{ted} = -j\omega T \underline{S} : \underline{\alpha} \quad (3.15)$$

A termomechanikus rendszerek efféle csatolását általában elhanyagolják a hőtágulási együtthatók kis értékei miatt, azonban a működési frekvencia növekedésével a csillapítás összemérhetővé válik a gerjesztéssel.

A számítások és szimulációk során a termoelasztikus csillapításon kívül nem veszünk figyelembe másfajta csillapítást(pl. légellenállást vagy az anyag belső csillapításait és mechanikai veszteségeit).

### 3.4. Termikus modellillesztés

Termikus rendszerek modellezése nem egy egyszerű feladat az összetettebb rendszerek esetében, figyelembe véve az elosztott paraméterű leírást, ezért a gyakorlatban legtöbbször egy egytárolós villamos hálózati modellel közelítjük a rendszerek termikus karakterisztikáját. Ennek vázlatos rajzát a 3.3. ábrán láthatjuk. A rendszert a hőellenállása, vagyis adott teljesítményáram esetén a hőmérsékletváltozás szemben mutatott ellenállása, és a termikus kapacitása, vagyis az egységnyi tömeg által tárolt hőenergia, jellemzi a rendszert. Hőenergia bevitelét a hőteljesítmény forrással modellezzük, mely hőmérsékletkülönbségtől függetlenül azonos hőteljesítményt juttat a rendszerbe.



3.3. ábra. Termikus rendszer sematikus ábrája.

A rendszer gerjesztésének tekinthetjük a hőteljesítményforrást, válaszának pedig a maximális hőmérsékletet, ezzel a rendszer átviteli karakterisztikája a következő alakot ölti:

$$T(j\omega) = \frac{R_{th}P_0}{1 + j\omega R_{th}C_{th}} \quad (3.16)$$

Ezzel egy aluláteresztő karakterisztikát kaptunk, melyet a kisfrekvenciás erősítése ( $R_{th}P_0$ ) szorzat, valamint a vágási körfrekvenciája ( $\frac{1}{R_{th}C_{th}}$ ) jellemez. Ezeket az adatok méréssel vagy szimulációval határozhatjuk meg a mérési adatokra történő görbeillesztéssel. Fontos megjegyezni, hogy a vágási körfrekvencia felett a rendszer átvitele -20 dB/dekádos meredekséggel csökken, vagyis a frekvencia tízszeresödése következtében a hőmérséklet a tizedére esik vissza. Ez a jelenség nagymértékben korlátozza a termikus eszközök működési frekvenciatartományát hétköznapi mérettartományok esetében, jellemzően a termikus kapacitás és hőellenállás nagy értékei miatt.

### 3.5. Mechanikus modellillesztés

A termomechanikus csatolás vizsgálatának folytatásához vizsgáljuk meg közelebbről a rendszerünk mechanikai modelljét. Mint korábban már láthattuk, itt is Newton II. egyenletéből indulunk ki, és képezzük annak Fourier-transzformáltját.

$$-\omega^2 \underline{u} = \text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_v \quad (3.17)$$

Feltéve, hogy a rendszerünk gerjesztetlen állapotban van, vagyis a térfogati erősítés mindenhol azonosan nulla, a 3.17 egyenlet átírható a következő másodrendű sajátérték feladattá. Itt az  $A$  mátrix magában foglalja a rendszer merevségi tenzorát és az alakváltozási tenzort is! A sajátértékfeladat megoldásaként megkapjuk a rendszer rezonancia körfrekvenciái ( $\omega_i$ ) és az adott rezonanciafrekvenciához tartozó lengéseképek a sajátvektorok formájában ( $\underline{u}_i$ ).

$$(\underline{A} + \omega^2 \underline{I})\underline{u} = 0 \quad (3.18)$$

Csillapítások figyelembevételéhez kézenfekvő a rendszer elsőrendű időderiváltjait is figyelembe venni, hiszen lineáris csillapítás esetén ezek a tagok a sebességmezővel arányosak. A csillapítások megváltoztatják a rendszer sajátértékproblémáját, ezzel eltolva a rezonanciafrekvenciákat, valamint képzetessé téve azokat. A csillapítás következtében megszűnik, a rezonanciafrekvencián tapasztalható végtelen nagy amplitúdó és helyette egy véges átviteli tényező tapasztalható.

$$(\underline{A} + j\omega \underline{B} + \omega^2 \underline{I})\underline{u} = 0 \quad (3.19)$$

Az ilyen típusú rendszerek nagymértékű hasonlóságot mutatnak a komplex konjugált póluspárral rendelkező aluláteresztő szűrőkkel, így a rezonáns rendszer koncentrált paraméterű modellezéséhez egy ilyen rendszert használunk fel. A rendszer átviteli karakterisztikája a következő:

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\Omega} + (j\frac{\omega}{\Omega})^2} = \frac{H_0}{1 + 2\zeta j\frac{\omega}{\Omega} + (j\frac{\omega}{\Omega})^2} \quad (3.20)$$

A rendszert a kisfrekvenciás erősítése ( $H_0$ ), rezonancia körfrekvenciája ( $\Omega$ ), jósági tényezője ( $Q$ ) és csillapítási tényezője ( $\zeta$ ) jellemzi, ezen paraméterek méréssel és szimulációval is meghatározhatóak a termikus modellhez hasonlóan. A jósági tényező számításához felhasználhatjuk a rezonanciafrekvenciák képzetes értékeit, analóg módon az aluláteresztő szűrő jósági tényezőjének számításakor. Ennek eredményeként a rezonáns rendszer jósági tényezőjére és csillapítására a következők adódnak:

$$Q = \frac{|\omega|}{2 \text{Im}(\omega)}$$

$$\zeta = \frac{\text{Im}(\omega)}{|\omega|} \quad (3.21)$$

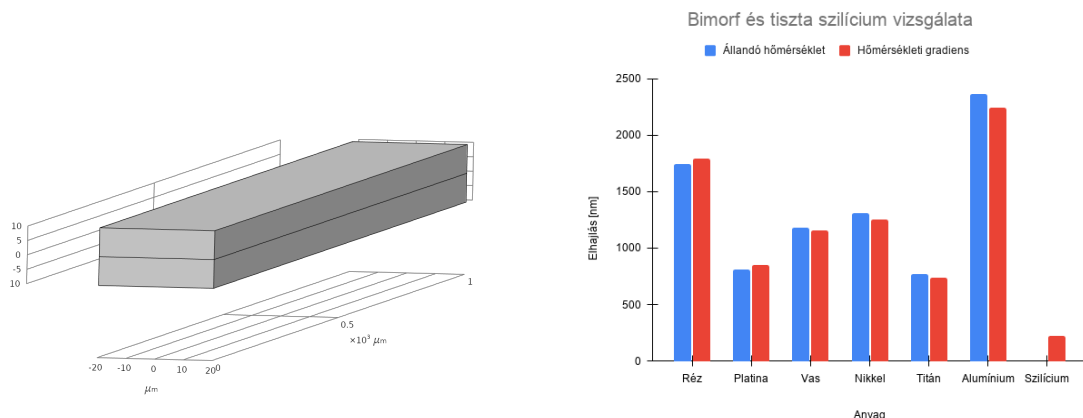
MEMS eszközök esetén a rezonancia jósági tényezője könnyen elérheti az 1-10 000-es nagyságrendet a mechanikai csillapítások[9] csekély értékeinek köszönhetően. A jósági tényező nagy értékének köszönhetően lehetséges kis mérettartományon, nagy kitéréseket elérő MEMS eszközöket készíteni azokat rezonánsan meghajtva.

### 3.6. Heterogén rétegszerkezet

Az eddigiek során az anyagi összetétel változásával nem foglalkoztunk, vagyis izotrópnek tételeztük fel azokat, azonban a MEMS eszközök gyártástechnológiája lehetővé teszi különböző vastagrétegek leválasztását szilíciumlapkákra, így felmerül a kérdés, hogy heterogén rétegszerkezettel javíthatók-e a mechanikai paraméterek. Egy természetesen felmerülő ötlet a különböző hőtágulási együtthatóval rendelkező rétegszerkezet kialakítása. Az ilyen típusú rétegszerkezettel rendelkező struktúrákat általánosan bimorfoknak nevezik. A bimorf anizotropitásának vizsgálatát egy teststruktúra szimulálásával végezzük. A teststruktúra egy  $1000\mu\text{m} \times 40\mu\text{m} \times 20\mu\text{m}$ -es tömb, mely a vastagsága mentén két különböző anyagi részre van osztva egyenletesen. Az elrendezést a 3.4a. ábrán láthatjuk, a felső réteget különböző fémezések alkotják, míg az alsó réteget tömbi szilícium.

A szimuláció során a teststruktúrát egyenletes  $10^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletemelkedésnek tettem ki, valamint a hőmérsékleti gradiens hatását is vizsgálva, a teststruktúra vastagsága mentén egyenletesen csökkenő hőmérsékletet is szimuláltam  $10^\circ\text{C}$ -ról  $0^\circ\text{C}$ -ra történő változást beállítva. A teszt célja a bimorf anyagi összetételének és a hőmérsékleti gradiensnek az elhajlásra gyakorolt hatásának vizsgálata, így a tesztek során a geometriát változatlanul tekintettük, valamint a teszt eredményéből csak kvalitatív információt szándékoztunk gyűjteni, így nem végeztük el különféle geometriai méretek esetén. Referenciának felhasználtam a teljes vastagsága mentén szilíciumból álló, azonos geometriai méretekkel rendelkező tömböt.

Az eredmények a 3.4b. ábrán láthatók. A szimulációból látszik, hogy az alumínium- és a rézbevonat eredményezi a legnagyobb elhajlást, így ezeket célszerű használni. Nem szabad elfelejteni azonban azt, hogy az anyagválasztást gyárthatósági szempontok is befolyásolják! Mivel a mérőfejet a BME félvezetőtechnológia és megbízhatósági laboratóriumokon belül található tisztatérben szeretnénk legyártani, így az ott rendelkezésünkre álló eszközökkel kell a rétegfelvitelt megoldani. Vastagrétegek felvitelére, fémek esetén, a galvanizálás egy járható út, azonban az alumínium nem galvanizálható, így a bevonat anyagának rezet célszerű választani. Ennek tudatában a további szimulációk során a mérőfej kialakításakor egy szilíciumból és rézből álló bimorfot fogunk felhasználni mint aktív eszköz a termikus aktuátorban.



## 4. fejezet

# Végeselem modell

### 4.1. COMSOL Multiphysics

Manapság a mérnöki tudományok szinte minden területén teret hódítottak a számítógépes modellezésen alapuló eljárások, melyek lehetővé teszik a prototípus gyártás és a terméktervezés költséghatékony fejlesztését. Eredményességüknek oka a széleskörű alkalmazhatóságuk és pontosságuk, mellyel a mérnöki problémák számítógépes modellezését, szimulálását és elemzését teszik lehetővé. A piacvezető szoftverek nemcsak a fizika legtöbb ágát lefedik, de az azok közötti csatolt fizikai jelenségeket is képesek kezelni, például az elektromágneses kölcsönhatás következtében kialakuló Joule-hő egy ellenállás belsejében. A piaci szoftverek a modellezési módszerek és algoritmusok széles palettáján mozognak, kezdve a talán legelterjedtebb úgynevezett végeselem módszer, de ezen kívül számos másik metódus is megtalálható, mint például a peremelem módszer, a véges térfogatok módszere, a véges differenciák módszere és a momentumok módszere.

Dolgozatom elkészítése során a COMSOL Multiphysics programcsomagot használtam, mely egy végeselem módszeren alapuló parciális differenciálegyenletek megoldására szolgáló program. A programcsomag többféle szimulációs fizikai interfésszel rendelkezik, mint például a kontinuum anyageloszlású testek szimulálása (Solid mechanics module), hőáramlás szilárd testekben (Heat transfer in solids module), termoeelasztikus csatolás (Thermal expansion module), elektrosztatikai és áramlási terek szimulálása (AC/DC module) valamint az elektromos áramok hőhatását szimuláló (Joule-heat module).

A programcsomag, a ma már MathWorks gondozásában álló MATLAB programból nőtte ki magát és a '90-es évek végére lett független.[10] Azonban függetlenné válása után is megőrizte a MATLAB szellemiségét. A felhasználóknak lehetőségük van a meglévő fizikai interfészek továbbfejlesztésére (Physics Builder), általuk definiált fizikai egyenletek megadására egy geometriai tartományon (Mathematics module) és a program futása során használt változókat és eredményeket szabadon felhasználhatjuk különféle kiértékelések és fizikai csatolások megvalósítására.

## 4.2. Geometriai modellek ismertetése

### 4.2.1. Meanderes felfüggesztésű platform

Viszonylag nagy kitérések eléréséhez célszerűnek tűnik az aktuátorból származó kisebb kitérések összegezni ezáltal hatásukat fokozni. Erre az alapötletre alapozva készítettük a meanderesen felfüggesztett platform modelljét. A geometria felülnézeti alakját az alábbi ábrán láthatjuk. A geometriai méretek meghatározásához szimulációk sorozatán keresztül érkeztünk el, folyamatosan finomítva a részleteket. Célunk egyrészt a méretek csökkentése volt, ezzel csökkentve a termikus ellenállásokat és kapacitásokat ezáltal növelve a működési frekvenciát. Mindezek mellett a rezonanciafrekvencia és a termikus határfrekvencia hányadosának csökkentése volt, ami növeli a kitérések maximális amplitúdóját. A geometriai méretek hatásait szakirodalmi kutatás segítségével vettük figyelembe[11]. Ezek alapján született meg a platform felületére merőleges irányban nyúló meanderek koncepciója.



(a) Meanderes felfüggesztésű platform öt párhuzamos karral.

(b) Meanderes felfüggesztésű platform kilenc párhuzamos karral.

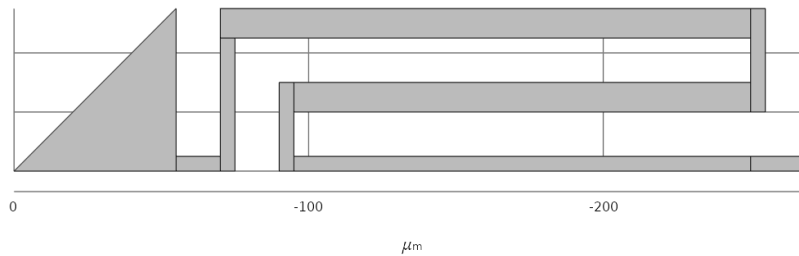
#### 4.1. ábra. Meanderesen felfüggesztett platform geometriája felülnézetből.

A geometria végelemek modelljének megalkotásakor kihasználtuk annak tükrözési szimmetriáit, ezáltal a modelltartomány méretét a nyolcadára csökkentettük. A szimulációk idő- és erőforrásigényét ezzel sikeresen csökkentettük, azonban a geometria ilyenfajta korlátozásának következtében a rezonáns módusok nagy részét nem tudjuk szimulálni. Ennek oka, hogy a geometriából következő szimmetriák nem fétetlen jelennek meg a szimulációs végeredményben. Itt gondoljunk csak egy hosszú négyzetes keresztmetszettel bíró rúdra mely csavarodást szenved. Ebben az esetben a rúd hossz tengelye mentén sérül az eltolási szimmetria, azonban ez a rezgési módus is egy teljesen természetes lengésképe a rúdnak. A teljes geometria szimulációja alapján mégiscsak megalapozottnak tekinthetjük a szimulációs térrész csökkentését és a szimmetriák kihasználását, hiszen a mérőfej legkisebb rezonanciafrekvenciája a központi platform függőleges irányú összcsillációjához tartozik és mi ebben a módusban szeretnénk gerjeszteni az eszközünket. A modelltartomány végleges alakja a 4.2. ábrán látható.

A struktúra méreteinek meghatározásához egy kiindulási geometria iterációjával jutottunk, vagyis az egymást követő lépésekben a geometria méreteink fokozatosan változtatva kaptuk a végleges méreteket. A platformot összekötő meanderes szálak  $2.5 \mu\text{m}$  vastag szilícium és  $2.5 \mu\text{m}$  vastag rézrétegből állnak, a karok szélessége  $40 \mu\text{m}$  párhuzamos szakaszainak hosszúsága pedig  $250 \mu\text{m}$ . Ezekkel a geometriai méretekkel sikerült a A rendszer rezonanciafrekvenciáját és a termikus határfrekvenciáját kellőképpen közel hozni, hogy a rezonancia következtében kialakuló nagy amplitúdójú rezgések elérjék a több  $\mu\text{m}$ -es nagyságrendet. A szimulációs részeredményekből azt tapasztaltuk, hogy a struktúra legérzékenyebb paramétere a felfüggesztés párhuzamos konzolainak száma, így ennek változtatásával is megvizsgáltuk a geometriát.

A szimulációk futtatásához a folytonos eloszlású geometriát diszkretizálni kell, hogy az információsűrűséget véges értékre csökkentsük. A végeselem módszert alkalmazó programok ezt a lépést hálógenerálásnak nevezik. A hálógenerálás alapvetően befolyásolja a szimulációs eredmények megbízhatóságát, pontosságát és a szimuláció lefuttatásához szükséges időt és erőforrásigényt. Egy jó végeselemháló a fizikai folyamatok szempontjából ényeges területen sűrűbb, míg a lényegtelen területeken egészen ritka is lehet, ezzel megőrizve az egyensúlyt a pontos és gyors szimulációk között.

Az általunk vizsgált geometriában a deformációt okozó feszültségek a két réteg határvonalánál keletkeznek, így ott célszerűbb finomabb hálót generálni, hogy a rövidhatótávú változások is meghatározhatók legyenek és ne okozzanak numerikus hibákat. Az általunk használt hálót a 4.3a. ábrán láthatjuk. A háló generálása során téglatest alakú elemeket használtunk melyeket egy úgynevezett húzott (swept) háló segítségével generáltunk. A téglalap alakú elemke előnye a tetraéderekkel szemben, ami az alapbeállítás a COMSOLban, hogy az elhajlásokra jobban érzékenyebbek és általában a valósággal pontosabban illeszkedő eredményeket adnak.[12]



4.2. ábra. A szimulálandó térrész alakja.

A szimulációhoz használt beállítások vázlatát a 4.3b. ábrán láthatjuk. A szimuláció alapvetően 4 különálló fizikai interfészből áll. A legelső (Solid Mechanics Static) felelős a stacionárius állapotok meghatározásához, vagyis a rezonanciavizsgálat és a statikus hőtágulás mechanikailag csatolt részéért. A szimulációs csomóponton belül láthatjuk az alkalmazott beállítások csomópontjait, vagyis az anyagjellemzők megadását (Linear Elastic Material Si és Metal), a geometriához tartozó szimmetria feltételeket és a geometria rögzítését, és egyben a probléma egyértelmű megoldhatóságához tartozó csomópontot (Fixed). Alatta a stacionárius hőtani folyamatok modellezéséhez szükséges hőtani modul csomópontja található (Static Heat Transfer in Solids), ezen belül pedig látjuk a beállításokat a mérőfejjel kölcsönható termikus hatásokhoz. Ezek a mérőfejet és a szubsztrátot összekötő meanderszál konstans hőmérséklete (Heat sink), a meanderszálak felületén található 500-1000  $\frac{kW}{m^2}$ -es beáramló hőfluxust (Heat source), valamint a kialakuló magas hőmérsékletek miatt a konvektív (Convection) és sugárzásos hőleadások (Surface-to-Ambient Radiation).

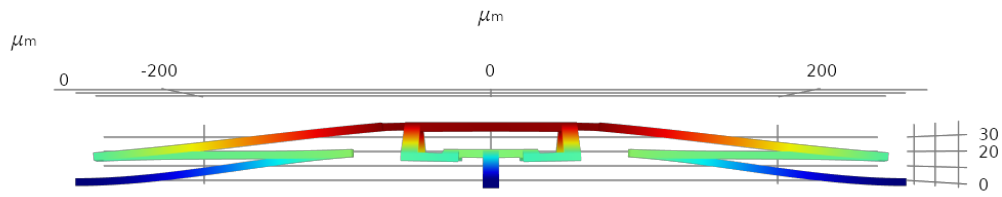
A meghajtó szempontjából legfontosabb szimulált eredményeket 4.1. táblázatban láthatjuk. A táblázatban szereplő szimulációs eredményekhez tartozó lengésképek, hőmérsékleteloszlások és a hőtágulás hatása a 4.4., 4.5a. és 4.5b ábrákon láthatók.

Párhuzamos karok száma:	5	9
Rezonanciafrekvenciák:	31,325 kHz 65,454 kHz	14,917 kHz 38,144 kHz
Felületi hőfluxus nagysága:	1000 $\frac{kW}{m^2}$	500 $\frac{kW}{m^2}$
Maximális felületi hőmérséklet:	203,94 °C	248,5 °C
Maximális statikus hőtágulás:	7,9833 $\mu m$	15,447 $\mu m$
Domináns rezonanciafrekvencia hőtágulás után:	33,820+0,0048161i kHz	16,052+0,014980i kHz

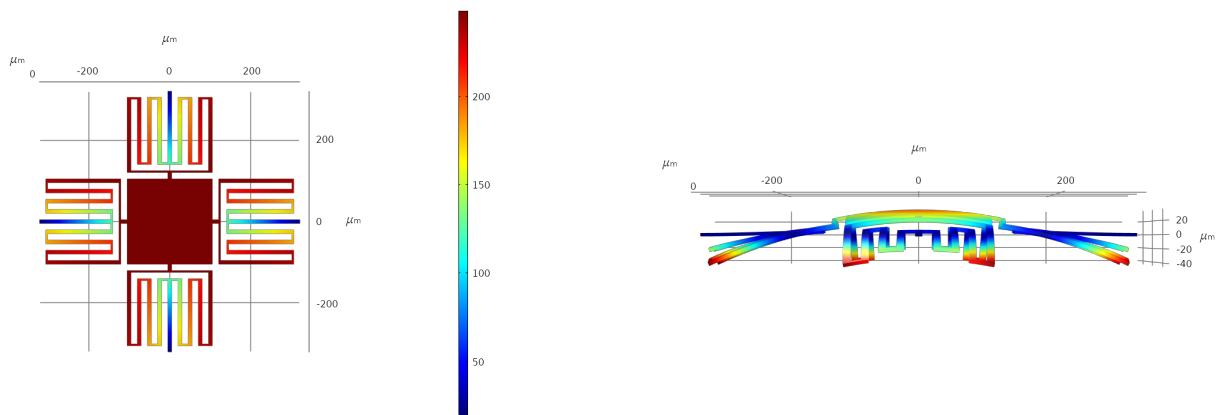
4.1. táblázat. Meanders struktúrák statikus és dinamikus paraméterei.







**4.4. ábra.** Meanderes felfüggesztésű platform alapharmonikusához tartozó lengésképe.



**(a)** Meanderes felfüggesztésű platform hőmérsékleteloszlása.

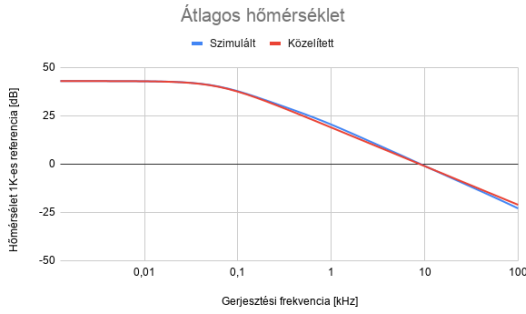
**(b)** Meanderes felfüggesztésű platform hőtágulása.

**4.5. ábra.** Meanderes struktúra stationárius állapota.

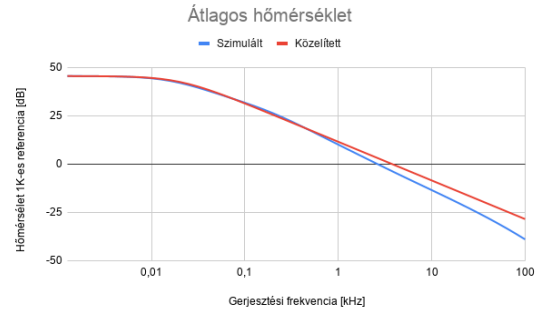
A mérőfej termikus és termomechanikus karakterizálására a rendszerek frekvenciamenetét szimuláltam és ábrázoltam. A termikus karakterisztika meghatározásához az adott frekvenciához tartozó hőmérsékleteloszlás térfogati átlagát számoltam ki, míg a csatolt termikus és mechanikus karakterisztikához a középső platform átlagos függőleges elmozdulását határoztam meg. A termikus karakterisztikák a 4.6. ábrán, míg a csatolt termikus és mechanikus karakterisztikák a 4.7. ábán láthatók.

Felhasználva a szimulációs eredményeket egy-egy koncentrált paramétererű modellt illesztettem a rendszerekre. A termikus rendszer esetében a modellillesztést a kisfrekvenciás átvitel meghatározásával kezdtem, ezt a legkisebb szimulált frekvencián felvett értékkel közelítettem. A törésponti frekvencia meghatározásához a kisfrekvenciás átvitelhez képesti 3 dB-es csillapításhoz tartozó frekvenciát használtam fel, mint modellparaméter. Az extraktált modellparamétereket a 4.2. táblázatban tüntettem fel.

A mechanikus modell illesztéséhez először a termikus átvitel hatását korrigálni kell, így a szimulációs eredményekből kivontam a közelítő termikus átvitel értékét, majd a termikus rendszerhez hasonlóan határoztam meg a modellparamétereket. A kisfrekvenciás átvitel értékét szintén a legkisebb szimulált eredmény átvitelével közelítettem, azonban a törésponti körfrekvenciát és a jóság tényezőt a rezonáns szimuláció eredményéből határoztam meg. Az így kapott paramétereket a 4.3. táblázatban láthatjuk.

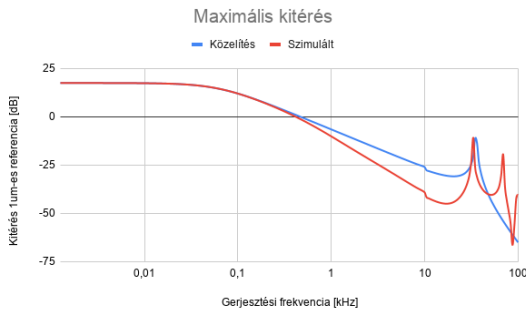


(a) Meanderes felfüggesztésű platform öt párhuzamos karral.

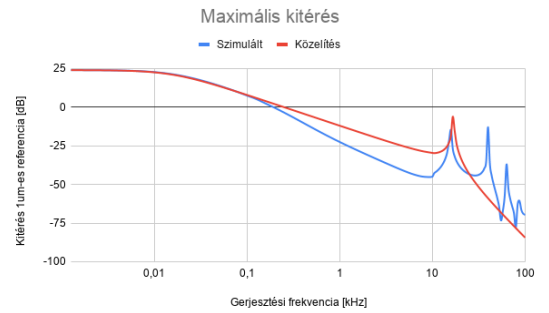


(b) Meanderes felfüggesztésű platform kilenc párhuzamos karral.

4.6. ábra. Mérőfejek frekvenciafüggő termikus karakterisztikái.



(a) Meanderes felfüggesztésű platform öt párhuzamos karral.



(b) Meanderes felfüggesztésű platform kilenc párhuzamos karral.

4.7. ábra. Mérőfejek frekvenciafüggő termomechanikus karakterisztikái.

<b>Párhuzamos karok száma:</b>	<b>5</b>	<b>9</b>
<b>Kisfrekvenciás átvitel:</b>	0.14065 $\frac{Km^2}{kW}$	0.37938 $\frac{Km^2}{kW}$
<b>Törésponti frekvencia:</b>	50.119 Hz	15.849 Hz

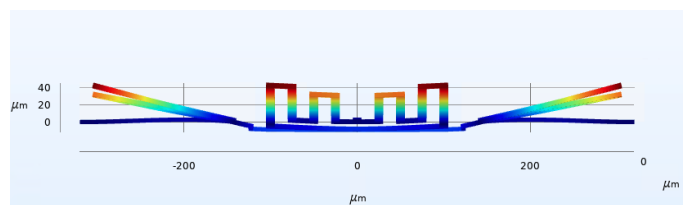
4.2. táblázat. Meanderes felfüggesztésű platform termikus modelljének jellemző paraméterei.

<b>Párhuzamos karok száma:</b>	<b>5</b>	<b>9</b>
<b>Kisfrekvenciás átvitel:</b>	$53 \cdot 10^{-6} \frac{\mu m}{K}$	$166 \cdot 10^{-6} \frac{\mu m}{K}$
<b>Törésponti frekvencia:</b>	31,325 kHz	14,917 kHz
<b>Jósági tényező:</b>	3511,2	535,8
<b>Átvitel rezonancián:</b>	195 $\mu m$	133.98 $\mu m$

4.3. táblázat. Meanderes felfüggesztésű platform termikus és mechanikus modelljének jellemző paraméterei.

A grafikonokról leolvasható, hogy míg a termikus rendszereket jó közelítéssel leírja az egytárolós modell, úgy a rezonáns modell csak közelítőleg alkalmazható. Az eltérések oka a rezonáns rendszer többi rezonáns pólusában keresendő, melyeket hasonló komplex konjugált póluspárokat tartalmazó aluláteresztő rendszerekkel modellezhetünk. Ha az átvitel közelítésére magasabbrendű rendszert használtunk volna, úgy a közelítés. Az ábrán jól láthatóan nem csak az általunk modellezett és keresett rezonáns módusok láthatók, hanem a magasabb felharmonikusokhoz tartozók is. Ennek oka, hogy a rendszer második és harmadik felharmonikusához tartozó lengésképében is megjelenik a középső platform függőleges irányú kilengése ahogy azt a 4.8. ábrán láthatjuk is.

Eltérés még a két ábra között a rezonáns csúcsok közötti eltolódás, ennek oka, hogy a modellillesztéshez felhasznált vágási frekvencia és jósági tényező a rendszer rezonanciavizsgálatából származnak. Ezeket a vizsgálatokat a hőtágulás hatására deformálódott geometrián végeztük, azonban a szinuszos állandósult állapot számítását a nem deformált geometrián végeztük. Ennek oka, hogy a hőtágulás hatására deformálódott geometrián a deformáció helyes kezelése, a Green-Lagrange féle alakváltozási tenzorral, nemlineárisá tette volna a modellünket, így ellehetetlenítve a lineáris hálózatok vizsgálatánál alkalmazható matematikai módszereinknek és eszközeinknek a használatát.



**4.8. ábra.** A rendszer első felharmonikusához tartozó lengésképe. A lengésképen észrevehető a középső platform függőleges oszcillációja, mely megjelenik a csatolt rendszer átvitelében.

## 5. fejezet

# Összefoglalás és kitekintés

Az eddigiek során láthattuk egy MEMS eszköz megtervezésének folyamatát az alapvető mérési folyamat megismerésétől, azt eszközt mozgató fizikai ismeretek elmélyítésén keresztül a mérőfej végeelem modelljéig. A modellezés során alapvetően két változatát vizsgáltuk a geometriának, egy kevesebb és egy több párhuzamos karral rendelkező változatot. Természetesen a kész mérőfej legyártásáig még több lépést ki kell dolgozni, viszont a struktúra is rejt magában még lehetőségeket.

További vizsgálatok tárgya lehetne a meanderes rugószerkezet mechanikai optimalizálása, a termikus hőátadási rendszer pontosabb szabályzása például nem homogén hőfluxust alkalmazva, a meanderes szálak keresztmetszetének változtatása és még sok minden más is. Egy hasonló érdekes ötlet lehet a mérőelektródához tartozó kiolvasó és feldolgozó áramkör integrálása a mérőfejre, ezáltal a kis mérőkapacitás kiolvasása és a jel elvezetése a MEMS eszköz felületén nem jelentene problémát.

# Függelék

## F.1. 1D hőterjedés megoldása

```
1 close all
2 clc
3
4 % Geometrical values
5
6 L = 100;           % Total length [um]
7
8 % Excitation parameters
9
10 f = 100e3;        % Excitation frequency [Hz]
11 q = 100;          % Heat flux on left boundary [W/m2]
12 T = 0;           % Temperature on the right side [K]
13
14 % Material properties
15
16 rho = 2329;       % Density of silicon [kg/m3]
17 Cp = 716;         % Heat capacity of silicon [J/kgm3]
18 la = 149;         % Thermal conductivity of silicon [W/mK]
19
20 %-----
21
22 % Variable calculation
23 w = 2*pi*f;       % Excitation angular frequency [rad/s]
24 d = sqrt(2*la/rho/w/Cp)*1e6; % Penetration depth [um]
25 k = (1+1i)/d;
26
27 % Solving for the coefficients
28
29 A = [-la*k +la*k; exp(k*L) exp(-k*L)];
30 b = [q;T];
31 C = A\b;
32
33 % Solution
34 Tc = @(x) (C(1)*exp(k*x)+C(2)*exp(-k*x));
35
36 %-----
37
```

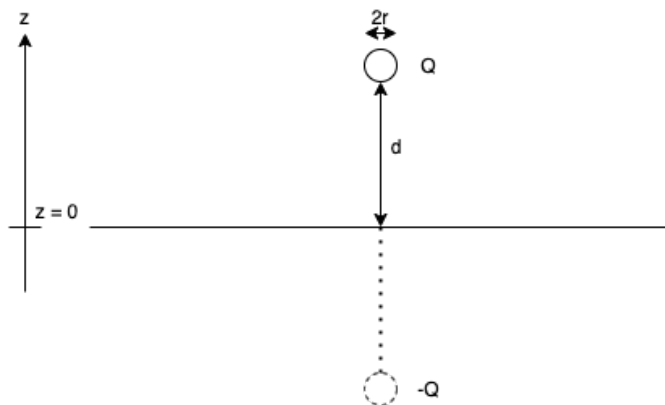
```

38 % Plot the solution
39
40 x = linspace(0,L);
41
42 hold on
43 plot(x, real(Tc(x)))
44 plot(x, real(Tc(x)*exp(1i*pi/4)))
45 plot(x, real(Tc(x)*exp(1i*pi/2)))
46 plot(x, real(Tc(x)*exp(1i*3*pi/4)))
47 hold off
48 title("Temperature distribution")
49 xlabel("Position across rod [um]")
50 ylabel("Temperature [K]")
51 legend("t = 0", "t = T/8", "t = T/4", "t = 3T/8")

```

## F.2. Végtelen sík és ponttöltés kapacitása

Az elektróda és a minta közötti kapacitás számításának egyik degenerált esete a végtelen vezető sík és ponttöltés közötti kapacitás. Az elrendezést a F.2.1. ábra mutatja. Az elrendezés a  $z = 0$  síkra szimmetrikus, így az elektrosztatikus tér számításához használhatjuk a tükörtöltések módszerét, vagyis az elektródaelrendezést helyettesítjük fiktív töltésekkel melyek eleget tesznek a geometriából adódó peremfeltételeknek. A végtelen vezető sík felületén az elektromos tér tangenciális komponense nulla, vagyis az elektromos tér merőleges a síkra a sík felületén. Ezt a peremfeltételt helyettesíthetjük egy azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés használatával a  $Q$  töltés tükörzésekor. Mivel a ponttöltés elektrosztatikus potenciálja a végtelenbe divergál a töltéshez közeledve, így a ponttöltések helyett egy kicsiny, de véges átmérőjű gömbtöltéssel számolunk, természetesen a gömbtöltés sugara elhanyagolható méretű a töltés és a sík közötti távolsághoz képest, vagyis  $r \ll d$ .



F.2.1. ábra. Ponttöltés és végtelen vezető sík elektródaelrendezése.

A kapacitás számításához meg kell határozzuk az elektrosztatikus tér potenciálját. Itt kihasználhatjuk, hogy a gömbtöltések sugara sokkal kisebb mint a töltések közötti távolság, vagyis a gömbtöltés felületén a töltéssűrűség állandó, ezzel a gömbtöltésen kívüli térrészben a potenciált a töltés nagysága és a töltéstől mért távolság határozza meg, valamint a Maxwell-egyenletek linearitásából következően a ponttöltések elektrosztatikus terei szuperponálhatóak.

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{d-z} - \frac{Q}{d+z} \right) = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{d^2 - z^2} \quad (\text{F.2.1})$$

A gömbtöltések közötti potenciálkülönbség:

$$U = \phi(d-r) - \phi(r-d) = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \frac{d-r}{r(2d-r)} \quad (\text{F.2.2})$$

Ezzel a kapacitás:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0\pi \frac{2dr - r^2}{d-r} \approx 2r\pi\epsilon_0 \quad (\text{F.2.3})$$

Tehát az elektródák közötti kapacitás független azok egymástól mért távolságától!

### F.3. Fourier-sor együtthatóinak számítása

```

1 close all
2 clc
3
4 C0 = 1; % Static capacitance
5 C_x = @(x,m) C0./(1+m*cos(x)); % Time varying capacitance
6 C_dot_x = @(x,m) m*C0*sin(x)./(1+m*cos(x)).^2; % Derivative of capacitance
7
8 figure % Plot capacity
9 x = linspace(-pi, pi);
10 hold on
11 plot(x, C_x(x,0))
12 plot(x, C_x(x,0.1))
13 plot(x, C_x(x,0.2))
14 plot(x, C_x(x,0.3))
15 plot(x, C_x(x,0.4))
16 plot(x, C_x(x,0.5))
17 hold off
18 title("Kapacitas valtozasa")
19 xlabel("Szog [rad]")
20 legend("m = 0", "m = 0.1", "m = 0.2", "m = 0.3", "m = 0.4", "m = 0.5" ...
21        , "Location", "best")
22
23 figure % Plot capacity's derivative
24 x = linspace(-pi, pi);
25 hold on
26 plot(x, C_dot_x(x,0))
27 plot(x, C_dot_x(x,0.1))
28 plot(x, C_dot_x(x,0.2))
29 plot(x, C_dot_x(x,0.3))
30 plot(x, C_dot_x(x,0.4))
31 plot(x, C_dot_x(x,0.5))
32 hold off
33 title("Kapacitas derivaltjanak valtozasa")
34 xlabel("Szog [rad]")
35 legend("m = 0", "m = 0.1", "m = 0.2", "m = 0.3", "m = 0.4", "m = 0.5" ...
36        , "Location", "best")
37

```

```

38
39 f_x = @(x,k,m) cos(k*x)./(1+m*cos(x));           % Function to be integrated
40
41 m = linspace(0,0.5);                             % Modulation depth values
42 dx = linspace(0,pi,1000);                       % Integration interval
43 n = 10;                                           % Fourier polynomial degree
44 I = zeros([n,length(m)]);
45 p = zeros([n,4]);
46
47 figure                                           % Plot function with different modulation values
48 hold on
49 plot(dx,f_x(dx,1,0))
50 plot(dx,f_x(dx,1,0.1))
51 plot(dx,f_x(dx,1,0.2))
52 plot(dx,f_x(dx,1,0.3))
53 plot(dx,f_x(dx,1,0.4))
54 plot(dx,f_x(dx,1,0.5))
55 hold off
56 title("Integralando fuggveny k = 1")
57 xlabel("Szog [rad]")
58 ylabel("Fuggvenyertek")
59 legend("m = 0","m = 0.1","m = 0.2","m = 0.3","m = 0.4","m = 0.5" ...
60        ," Location"," best")
61
62 figure                                           % Plot function with different modulation values
63 hold on
64 plot(dx,f_x(dx,2,0))
65 plot(dx,f_x(dx,2,0.1))
66 plot(dx,f_x(dx,2,0.2))
67 plot(dx,f_x(dx,2,0.3))
68 plot(dx,f_x(dx,2,0.4))
69 plot(dx,f_x(dx,2,0.5))
70 hold off
71 title("Integralando fuggveny k = 2")
72 xlabel("Szog [rad]")
73 ylabel("Fuggvenyertek")
74 legend("m = 0","m = 0.1","m = 0.2","m = 0.3","m = 0.4","m = 0.5" ...
75        ," Location"," best")
76
77 for i = 1:n                                       % Numeric integration
78     for j = 1:length(m)
79         I(i,j) = int_trap(f_x(dx,i,m(j)),dx);
80     end
81     p(i,:) = polyfit(m,I(i,:),3); % Polynomial curve fitting
82 end
83
84 figure                                           % Plotting the first two resulting functions
85 plot(m,I(1,:),m,polyval(p(1,:),m))
86 title("Alapharmonikus egyutthatoja")

```



```

87 xlabel("Modulacios melyseg")
88 legend("Eredeti fuggveny","Polinomialis kozelites")
89
90 figure
91 plot(m,I(2,:),m,polyval(p(2,:),m))
92 title("Elso felharmonikus egyutthatoja")
93 xlabel("Modulacios melyseg")
94 legend("Eredeti fuggveny","Polinomialis kozelites")
95
96 % Ploting the Fourier series of the capacity derivative function
97
98 C0 = 1;
99 m = 0.5;
100 x = linspace(-pi,pi);
101 c_dot = C_dot_x(x,m);
102
103 c_dot_fourier = zeros([1,length(x)]);
104 for i = 1:n
105     c_dot_fourier = c_dot_fourier - 2*C0*i/pi*polyval(p(i,:),m)*sin(i*x);
106 end
107
108 figure
109 plot(x,c_dot,x,c_dot_fourier)
110 title({"Kapacitas derivaltjanak valtozasa es Fourier-sora","Modulacios
        melyseg 0.5"})
111 xlabel("Szog [rad]")
112 legend("Eredeti fuggveny","Fourier kozelites","Location","best")

```

#### F.4. Numerikus integrálás trapéz módszerrel

```

1 function I = int_trap(f,x)
2     I = 0;
3     n = length(f);
4     for i = 1:n-1
5         I = I + (f(i+1)+f(i))*(x(i+1)-x(i));
6     end
7     I = I/2;
8 end

```

# Ábrák jegyzéke

2.1. Különböző anyagok sávszerkezete. A sraffozott rész az elektronok által betöltött energiaszinteket jelzi. Az ábrák nem méretarányosak. . . . .	2
2.2. Egy félvezető sávszerkezete. $E_{vac}$ a vákuumszint, $E_{vez}$ a vezetési sáv alja, $E_{vegy}$ a vegyértéksáv teteje, EA az elektronaffinitás, IE az ionizációs energia, $E_g$ a tiltott sáv szélessége, $E_F$ a Fermi szint . . . . .	3
2.3. Kilépési munka fémeknél. . . . .	4
2.4. Kilépési munkák különbsége ( <b>a</b> ) és a kialakuló sávelhajlás ( <b>b</b> ). $E_g$ a kontaktusfelületen kialakuló energiagát nagysága. . . . .	4
2.5. Akkumuláció, kiürítés és inverzió félvezetők esetében. Az ábrán piros nyíllal a külső elektromos teret jelöltem. . . . .	5
2.6. Kelvin-szondás mérés sematikus összeállítása. . . . .	6
2.7. Direkt és szórt kapacitást okozó elektromos térkomponensek. . . . .	7
3.1. Egy dimenziós hőterjedés számítása. . . . .	13
3.2. Az 1 dimenziós hőterjedés megoldása. . . . .	13
3.3. Termikus rendszer sematikus ábrája. . . . .	14
4.1. Meanderesen felfüggesztett platform geometriája felülnézetből. . . . .	18
4.2. A szimulálandó térrész alakja. . . . .	19
4.3. Szimuláció beállításai. . . . .	20
4.4. Meanderes felfüggesztésű platform alapharmonikusához tartozó lengésképe. . . . .	21
4.5. Meanderes struktúra stacionárius állapota. . . . .	21
4.6. Mérőfejek frekvenciafüggő termikus karakterisztikái. . . . .	22
4.7. Mérőfejek frekvenciafüggő termomechanikus karakterisztikái. . . . .	22
4.8. A rendszer első felharmónikusához tartozó lengésképe. A lengésképen észrevehető a középső platform függőleges oszcillációja, mely megjelenik a csatolt rendszer átvitelében. . . . .	23
F.2.1 Ponttöltés és végtelen vezető sík elektródaelrendezése. . . . .	26

# Táblázatok jegyzéke

2.1. Fourier-sor együtthatóinak polinomjai. . . . .	9
4.1. Meanderes struktúrák statikus és dinamikus paraméterei. . . . .	19
4.2. Meanderes felfüggesztésű platform termikus modelljének jellemző paraméterei. . . . .	22
4.3. Meanderes felfüggesztésű platform termikus és mechanikus modelljének jellemző paraméterei. . . . .	22

# Irodalomjegyzék

- [1] Viphretuo Mere és tsai. „Thermally Actuated MEMS Micromirror: Design Aspects”. 2014. márc.
- [2] David Torres, Sarah Dooley és LaVern Starman. „Large Out-of-Plane Deflection MEMS Actuators for Optical Applications”. *Proceedings* 2 (2018. nov.), 1072. old. DOI: 10.3390/proceedings2131072.
- [3] Umer Izhar és tsai. „An Electrothermally Actuated MEMS Braille Dot”. 2020. jan., 985–993. old. ISBN: 978-981-13-7602-3. DOI: 10.1007/978-981-13-7603-0\_93.
- [4] Alvin Hudson és Rex Nelson. *Útban a modern fizikához*. Budapest: LSI Oktatóközpont, 1994. ISBN: 9789635771974.
- [5] Harsányi József és Mizsei János. *A szilárdtestkutatás újabb eredményei 17. kötet*. Akadémiai Kiadó, 1987. ISBN: 0619001429712.
- [6] *Matlab from Mathworks*. URL: <https://mathworks.com/> (elérés dátuma 2020. 10. 25.).
- [7] Deák Elemér Dávid. „MEMS rezgőkondenzátor tervezése Kelvin-szondás mérésekhez”. 2019.
- [8] *Thermoelastic Damping in a MEMS Resonator*. URL: [https://www.comsol.com/model/download/647941/models.mems.thermoelastic\\_damping\\_3d.pdf](https://www.comsol.com/model/download/647941/models.mems.thermoelastic_damping_3d.pdf) (elérés dátuma 2020. 10. 25.).
- [9] Shirin Ghaffari és Thomas William Kenny. *Resonant MEMS, Fundamentals, Implementation and Application Chapter: 3. Damping in Resonant MEMS*. Wiley-VCH Verlag GmbH és Co. KGaA, 2015. ISBN: 978-3-527-33545-9.
- [10] *Comsol Release History*. URL: <https://www.comsol.com/release-history> (elérés dátuma 2020. 10. 25.).
- [11] Maryna Lishchynska és tsai. „Spring Constant Models for Analysis and Design of MEMS Plates on Straight or Meander Tethers”. *Sensor Letters* 4 (2006. jún.), 200–205. old. DOI: 10.1166/sl.2006.011.
- [12] J.A. Baier-Saip és tsai. „Shear locking in one-dimensional finite element methods”. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 79 (2020), 103871. old. ISSN: 0997-7538. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103871>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753819302840>.