



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Termek átvitelének kisfrekvenciás modellezése és síkhullám alapú kompenzációja

TDK dolgozat
2022

Készítette:
Horváth Kristóf

Konzulens:
Dr. Bank Balázs

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	3
2. Teremakusztika	5
2.1. Hullámegyenlet	5
2.2. Hangtér a teremben	6
2.2.1. Reflexió a falakról	7
2.2.2. Hullámegyenlet megoldása.....	9
2.2.3. Téglatest alakú terem módusai	11
2.2.4. Schroeder frekvencia	15
2.2.5. Geometriai teremakusztika	17
2.3. Termek akusztikájának kezelése	18
2.3.1. Termek kisfrekvenciás viselkedésének kontrollálása	19
3. Termek hangterének szimulációja	21
3.1. Téglatest alakú termék modális szimulációja	21
3.2. Numerikus módszerek.....	22
3.3. Időtartománybeli véges differenciák módszere	23
3.3.1. Differenciálegyenletek numerikus megoldása.....	23
3.3.2. Hullámegyenlet numerikus megoldása.....	23
3.3.3. Konvergencia és stabilitás	27
3.3.4. Numerikus diszperzió	28
3.3.5. Frekvenciaválasz-függvény ellenőrzése	29
4. Aktív teremhang-kompenzáció	32
4.1. Kisfrekvenciás teremhang-kompenzációs módszerek rövid áttekintése.....	32
4.2. Síkhullám alapú módszer	33
4.2.1. Síkhullám alapú módszerek elméleti háttere	33
4.2.2. Kisfrekvenciás hangszórók optimális elhelyezése.....	35
4.2.3. Késleltetés alapú módszer.....	37
4.2.4. Optimális forráserősségek becslése	37
4.3. Síkhullám alapú módszerek időtartománybeli megvalósítása	39
4.3.1. Szűrőtervezés ablakozással.....	40
4.3.2. A szűrőegyütthatók becslése a legkisebb négyzetek módszerével	41
4.3.3. Síkhullám alapú módszerek összehasonlítása az időtartományban.....	43
5. Összefoglalás	53
Irodalomjegyzék	55

1. Bevezetés

Életünk során megtapasztaljuk, hogy egyes termeknek, csarnokoknak az akusztikája kiváló vagy akár egészen rossz is lehet. Az, hogy egy terem akusztikájának minőségét mi alapján határozzuk meg, az az adott terem felhasználásától függ. A templomok zengését egy éneklő kórus esetén szívesen hallgatjuk, azonban ez a jelenség például egy osztály- vagy konferenciateremben nagyban nehezíti a kommunikációt mivel rontja a beszédérthetőséget, mely fáradtságot és a figyelem csökkenését okozza [1].

Színházak, mozik, hangstúdiók kiváló hangzása nem a véletlen műve, ezek mögött komoly akusztikai tervezés áll. Az első akusztikai megoldások egészen az i. e. 6. századig nyúlnak vissza, amikor az első jól ismert félkör alakú ókori görög színházak épültek, illetve öt évszázaddal később a római építészig, Marcus Vitruvius Pollioig, aki könyvében több fejezetet is az épületakusztikának szánt [2]. A terem- és épületakusztika tudományának fejlődését a szükséges technológiai eszközök hiánya egészen a 19. századig hátráltatta, azonban később a technológiával párhuzamosan az akusztika tudománya is rohamosan fejlődött. Az épületakusztikai megoldások mellett megjelentek a legkülönbélebb passzív akusztikai elemek, mint a hangelnyelő panelek, diffúzorok, melyeket felhasználva megfelelő módon képesek voltunk kezelni a terem hangterét.

Az utóbbi évtizedben megjelenő zenék egyre több basszustartalommal rendelkeztek, így az 1990-es évek közepétől egyre szélesebb körben kezdtek elterjedni a 200 Hz alatt sugárzó hangszórók, azaz a mélynyomók. A 2010-es években megjelent elektronikus zenék és a basszus kultúra pedig már a 60 Hz alatti úgynevezett *sub-bass*, azaz mély basszus tartományt is előszeretettel használja fel [3]. A mélynyomók elterjedése újabb teremakusztikai problémákat okoztak, melyek a terem addig gerjesztetlen kisfrekvenciás viselkedéséből adódtak.

A termék akusztikai viselkedését a frekvencia függvényében kétféle módon modellezhetjük. A terem kisfrekvenciákon mint egy rezonátor viselkedik, a közép- és nagyfrekvenciákat pedig a reflexiók írják le. A két viselkedést határoló frekvenciát Manfred R. Schroeder német fizikus adta meg, aki megállapította, hogy ez a határoló frekvencia fordítottan arányos a terem térfogatával, tehát minél kisebb a terem, annál jobban befolyásolja a rezonáns viselkedés a hangteret. A rezonáns viselkedés a terem hangterében egyenetlenségeket okoz, illetve a terem rezonanciafrekvenciáin erős bűgás vagy dűbörgés tapasztalható. A mélynyomók térnyerésével a terem rezonáns viselkedése, mint új probléma jelent meg. A problémával párhuzamosan idővel megjelentek az első passzív akusztikai elemek is, mint a membrános basszuscsapda, vagy a Helmholtz rezonátor, melyeket a terem problémás rezonanciafrekvenciáira hangolva érhetjük el a csillapítást. Azonban ezek a passzív

megoldások a kisebb termek esetén, mint például hangstúdiókban, ahol különösen fontos a kiegyensúlyozott, egyenletes hangtér a terem egész területén, csak egy keskeny frekvenciasávban működnek megfelelően. További probléma, hogy ezen passzív akusztikai elemek fizikai méretének egy nagyságrendbe kell esni a kezelendő frekvencia hullámhosszával, ami a mély basszus tartományban már méteres nagyságrendbe esik. Ezt a problémát felismerve jelentek meg az aktív kisfrekvenciás teremhang-kompenzációs megoldások, melyek több mélynyomó elhelyezésével és a hangszórók jelének szűrésével kívánják csökkenteni a terem rezonáns viselkedéséből adódó problémákat. Ezen módszerek közül az egyik leghatékonyabbnak a síkhullám alapú módszer bizonyult, mely a terem hossza mentén síkhullámok konstruálásával éri a kisfrekvenciás tartomány kompenzációját. A módszer gyakorlati alkalmazásának vizsgálata azonban az elérhető irodalomban nem teljeskörű.

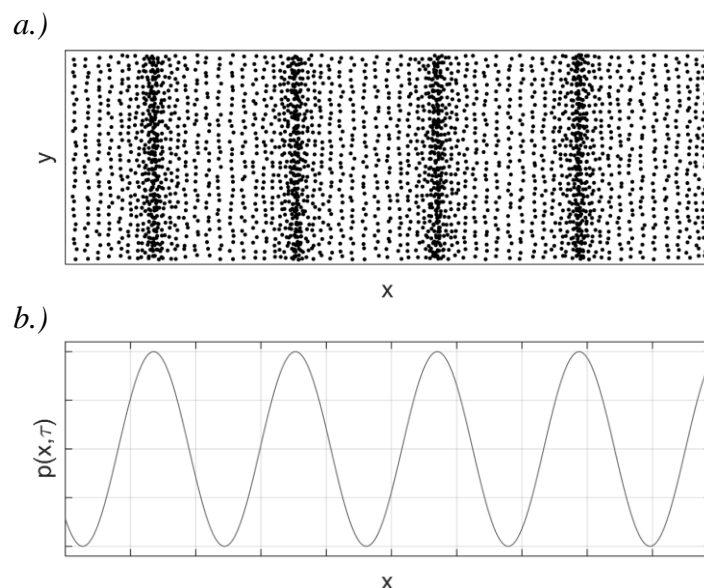
Ezen dolgozat célja a síkhullám alapú kisfrekvenciás teremhang-kompenzáció gyakorlati alkalmazhatóságának vizsgálata. A dolgozatban először áttekintem a teremakusztika elméleti hátterének releváns részeit, majd bemutatom a passzív teremakusztikai megoldásokat. A teremhang-kompenzációs módszerek gyakorlati alkalmazhatóságának első lépése, a szimulált környezetben történő vizsgálat, így a dolgozat következő nagy fejezetében egy elterjedt teremakusztikai szimulációs eljárást, az időtartománybeli véges differenciák módszerét mutatom be részletesen. Végül az utolsó fejezet a kisfrekvenciás aktív teremhang-kompenzációs módszerekre fókuszál, melyben először röviden áttekintem a legelső és legfrissebb kutatási eredményeket, majd részletesen kitérek a síkhullám alapú módszerre. Ezt követően a saját munkámat prezentálom, mely során az ismertetett síkhullám alapú módszernek az időtartománybeli megvalósítására javaslok két megoldást, melyeket az időtartományban szimulált környezetben tesztelem.

2. Teremakusztika

Ebben a fejezetben bemutatom a teremakusztika alapvető elméleti hátterét és legfontosabb összefüggésit, majd kitérek a termekben fellépő akusztikai problémákra és megoldásukra. A 2.1 és 2.2 fejezet Heinrich Kuttruff *Room Acoustics* [4] című könyvének az irodalomjegyzékben megjelölt oldalait dolgozza fel, az egyéb felhasznált irodalmakat forrásmegjelöléssel jelzem.

2.1. Hullámegyenlet

Tekintsük a térben található közeg azon legkisebb egységét, melynek két oldalán még értelmezett a nyomás-, sűrűség- és elmozduláskülönbség, illetve mely kicsiny téregység hang hatására a közeggel együtt mozog a tér egy adott fix pontja körül. Ezt a hanghullám hullámhosszához képest nagyon kicsi részecskét nevezünk hangrészecskének. Egy közegben terjedő hanghullám a t időpillanatban leírható a térben elhelyezkedő hangrészecskék $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ pozíciójuk körüli pillanatnyi $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ elmozdulással, ahol $()^T$ a transzponálást jelöli, vagy az akusztikában kézenfekvőbb mennyiséggel a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ részecskesebességgel, ahol $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ az idő szerinti deriválást jelöli. Hanghullámok hatására a hangrészecskék összenyomódhatnak vagy eltávolodhatnak egymástól, ezzel az \mathbf{r} pozícióban megváltoztatva a közeg sűrűségét, azaz a közegben fellépő pillanatnyi $p(\mathbf{r}, t)$ hangnyomást.



1. ábra: a.) Hangrészecskék és b.) hangnyomás szemléltetése egy kétdimenziós teremben az x -tengely mentén terjedő harmonikus síkhullám esetén a $t = \tau$ időpillanatban

A bevezetett fizikai mennyiségeket, alap fizikai törvények kapcsolják össze, mint Newton II. törvénye, melyből levezethető az úgynevezett Euler egyenlet, mely szerint a hangrészecske gyorsulása a rá ható erő függvényében:

$$\nabla p(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

ahol ρ_0 a közeg sűrűsége, $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T$ a gradiens művelet, a részecskére ható erő pedig a nyomásgradiensből számítható. A második alap fizikai jelenség a hangrészecskék termodinamikai viselkedése. Abban a frekvenciatartományban, ahol a hangterjedés megjelenik, nincs hőátadás a hangrészecskék között, illetve a hangrészecskék és környezetük között, azaz a folyamat adiabatikus [5]. Eszerint a P nyomás és a V térfogat közötti összefüggés $PV^\kappa = \text{áll.}$ lesz, ahol $\kappa = c_p/c_v$ a fajhő-arány állandó nyomáson és térfogaton (levegőben $\kappa \cong 1,4$) [6]. Ebből levezethető a hangnyomás és a hangrészecskék megnyúlásának összefüggése:

$$p(\mathbf{r}, t) + \kappa P_0 \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2)$$

ahol $P_0 \sim 100 \text{ kPa}$ a légköri nyomás, $\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}$ pedig a divergencia operátor. Az (1) és (2) egyenleteket átrendezve az alábbi alakra:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla p(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \ddot{p}(\mathbf{r}, t) + \kappa P_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

ahol $\ddot{p} = \partial^2 p / \partial t^2$ a második idő szerinti derivált, majd egymásba helyettesítve megkapjuk az akusztikus hullámeqyenletet:

$$\nabla \cdot \nabla p(\mathbf{r}, t) - \frac{\rho_0}{\kappa P_0} \ddot{p}(\mathbf{r}, t) = 0$$

melyet átrendezve, illetve a $\nabla \cdot \nabla p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \Delta p$ Laplace operátort és a hang $c = \sqrt{\kappa P_0 / \rho_0}$ terjedési sebességét (levegőben $20 \text{ }^\circ\text{C}$ -on $c \cong 340 \text{ m/s}$) bevezetve a hullámeqyenlet alábbi alakjára térünk át:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

A frekvenciatartományba transzformálás után, ahol a Fourier-transzformáció szabályait követve az idő szerinti derivált egy $j\omega$ -val való szorzásnak felel meg, az alábbi Helmholtz egyenletet kapjuk:

$$\Delta p(\mathbf{r}, \omega) = -k^2 p(\mathbf{r}, \omega) \quad (4)$$

ahol $k = \omega/c$ a hullámszám, ω a körfrekvencia, $j = \sqrt{-1}$ pedig a komplex számot jelöli.

2.2. Hangtér a teremben

Az előző fejezetben levezettem a szabad térben történő hangterjedést leíró hullámeqyenletet, azonban ebben a dolgozatban zárt terek, termek akusztikájára fókuszálok, mely termeket falainak akusztikai tulajdonságait a peremfeltételek adják meg. A teremben

kialakult hangtér meghatározására a hullámegyenletek azon megoldását keressük, melyek kielégítik ezeket a peremfeltételeket.

2.2.1. Reflexió a falakról

A peremfeltételek megadásához először meg kell vizsgálni a hanghullám falról történő reflexióját. Ebben az alfejezetben síkhullámoknak egy végtelen falról való visszaverődését vizsgálom, mely során bevezetem a fal reflexiós és energiaelnyelési tényezőjét, illetve a specifikus akusztikus impedanciáját, melyeket felhasználva már felírható a peremfeltétel.

Ha egy síkhullám egy végtelen és egyenletes falhoz ér, a visszavert hullám eltérő amplitúdóval és fázissal fog visszaverődni. A falnak ezen tulajdonságát a komplex R reflexiós tényező jellemzi, melynek mind az amplitúdója, mind a fázisa függ a frekvenciától és a beesés szögétől. Egy síkhullám hangenergiája négyzetesen függ a nyomástól, ennek megfelelően a visszavert hullám hangenergiája a beeső hullám $|R|^2$ -szerese lesz, tehát a beeső hullám energiájának $1 - |R|^2$ -szeresét nyeli el a fal. Ez a mennyiség a fal α energiaelnyelési tényezője:

$$\alpha = \frac{E_{\text{elnyelt}}}{E_{\text{beesett}}} = \frac{E_{\text{beesett}} - |R|^2 E_{\text{beesett}}}{E_{\text{beesett}}} = 1 - |R|^2. \quad (5)$$

Egy másik mennyiség a falak akusztikai viselkedésének jellemzésére a falak Z impedanciája, mely a felületen kialakult hangnyomás, és az általa okozott hangrészecske-sebesség falra normális komponensének a hányadosa:

$$Z = \frac{p}{v_n}. \quad (6)$$

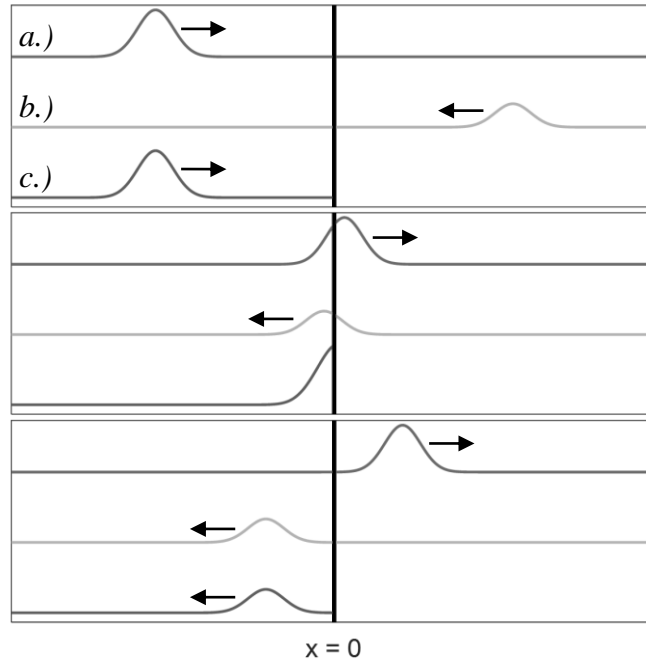
A falak impedanciája szintén komplex, illetve függ a frekvenciától és a síkhullám beesési szögétől. Ezt az impedanciát elosztva a síkhullám $Z_0 = \rho_0 c$ specifikus impedanciájával a fal specifikus akusztikus impedanciáját kapjuk:

$$\zeta = \frac{Z}{\rho_0 c}. \quad (7)$$

A fal R reflexiós tényezője és ζ specifikus akusztikus impedanciája közötti kapcsolat feltárásához tekintsük azt az egydimenziós esetet, amikor egy síkhullám egy fal felé halad. A fal az x tengelyt az $x = 0$ helyen metszi, az eredő síkhullám pedig a negatív irány felől érkező beeső, illetve a pozitív irány felől érkező visszavert hullámok összege [5]:

$$p_{\text{eredő}}(x, \omega) = p_{\text{beeső}} e^{-jkx} + R p_{\text{beeső}} e^{jkx}$$

ahol felhasználtam, hogy $p_{\text{vissza}} = R p_{\text{beeső}}$.



2. ábra: Egy impulzus síkhullám reflexiója a falról, ahol a.) $p_{\text{beeső}}(x, t)$ beeső hullám b.) $p_{\text{vissza}}(x, t)$ visszavert hullám c.) $p_{\text{eredő}}(x, t)$ eredő hullám

A hangnyomás és a részecskesebesség közötti kapcsolatot megteremtő (1) összefüggés egydimenziós és a frekvenciatartományba transzformált alakját meghatározva:

$$v(x, \omega) = \frac{1}{-j\omega\rho_0} p'(x, \omega) \quad (8)$$

ahol $p' = \partial p / \partial x$ a hely szerinti deriváltat jelöli kiszámítható az eredő részecskesebesség [5]:

$$v_{\text{eredő}}(x, \omega) = \frac{-jk p_{\text{beeső}}}{-j\omega\rho_0} e^{-jkx} + \frac{jk R p_{\text{beeső}}}{-j\omega\rho_0} e^{jkx} = \frac{p_{\text{beeső}}}{c\rho_0} e^{-jkx} - \frac{R p_{\text{beeső}}}{c\rho_0} e^{jkx}.$$

A meghatározott $p_{\text{eredő}}(x, \omega)$ hangnyomást és $v_{\text{eredő}}(x, \omega)$ részecskesebességet elosztva egymással a fal $x = 0$ pozíciójában, a fal Z impedanciáját kapjuk, mivel az impedancia (6) összefüggésének megfelelően a beeső részecskesebesség merőleges a visszaverő felületre [5]:

$$Z = \frac{p_{\text{eredő}}(0, \omega)}{v_{\text{eredő}}(0, \omega)} = \frac{p_{\text{beeső}} e^{-jk0} + R p_{\text{beeső}} e^{jk0}}{\frac{p_{\text{beeső}}}{c\rho_0} e^{-jk0} - \frac{R p_{\text{beeső}}}{c\rho_0} e^{jk0}} = c\rho_0 \frac{1 + R}{1 - R}.$$

A Z impedancia összefüggése kapcsolatot teremt a reflexiós tényező és a specifikus akusztikus impedancia között:

$$R = \frac{Z - c\rho_0}{Z + c\rho_0} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}. \quad (9)$$

A felületre beeső hullám részecskesebességének normális komponense a felület anyagában is hullámokat kelt, vagy akár a hangot közvetítő közeget préseli be a falba porózus anyagok esetén. A felület egy pontjának mozgása tehát a szomszédos pontok mozgásától is függeni fog. Speciális eset, amikor a felület egy pontjának mozgása független a szomszédos felületpontok mozgásától és csak az adott pontnál kialakult hangnyomás által létrejött részecskesebesség normális komponensétől függ. Értelmszerűen ez olyan anyagokra igaz,

melyek nem porózusak, illetve az anyag szomszédos pontjai mechanikailag nem, vagy csak gyengén csatoltak, azaz magában a falban a felszíne mentén nincs hullámterjedés [7]. Ez esetben a fal Z impedanciája független lesz a falhoz érkező hullám beesési szögétől. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező felületeket az angol szakirodalom *locally reacting surface*-nek, azaz lokális reakciójú felületeknek nevezi. A dolgozat további részében ilyen speciális tulajdonsággal rendelkező falakat feltételezek, így az (1) összefüggést a frekvenciatartományba transzformálva és átrendezve megadható a falhoz érkező hullám hangnyomása és részecskesebességének normális komponense közötti kapcsolat:

$$v_n(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{j\omega\rho_0} (\nabla p(\mathbf{r}, \omega))_n$$

ahol a $(\)_n$ jelölés a \mathbf{v} és $\nabla p(\mathbf{r}, \omega)$ vektornak a teremből tekintve a fal irányába mutató, a falra merőleges komponensét jelöli. A fal (6) impedanciájának és (7) specifikus impedanciájának összefüggését behelyettesítve kapjuk meg a peremfeltételt:

$$(\nabla p(\mathbf{r}, \omega))_n = -\frac{jk}{\zeta} p(\mathbf{r}, \omega). \quad (10)$$

2.2.2. Hullámegyenlet megoldása

Az (4) frekvenciatartományba transzformált akusztikus hullámegyenlet, azaz a Helmholtz egyenlet levezetésével és a (10) peremfeltétel megadásával már minden adott a hullámegyenlet megoldására.

Belátható, hogy a homogén, azaz a gerjesztés nélküli Helmholtz egyenletnek csak bizonyos k_n értékeknél, úgynevezett sajátértékeknél van olyan nem nulla $p_n(\mathbf{r})$ megoldása, úgynevezett sajátfüggvénye, mely kielégíti a peremfeltételt. Az n -edik $p_n(\mathbf{r})$ sajátfüggvény a terem egy módusalakját reprezentálja. Néhány kivételt leszámítva, mint például a téglatest, henger vagy gömb alakú terem, egy tetszőleges alakú teremre ezeknek a sajátértékeknek és sajátfüggvényeknek analitikus meghatározása bonyolult feladat, erre a problémára a gyakorlatban numerikus megoldásokat, például a véges elem módszert alkalmazzák.

A módusok fontos tulajdonsága, hogy a homogén Helmholtz egyenletnek, vagyis a gerjesztés nélküli rendszernek megoldásai. Ennek megfelelően a módusok magát a terem akusztikai viselkedését írják le, a gerjesztéstől függetlenek [5]. További lényeges tulajdonságuk az egymáshoz képest vett ortogonalitás, melynek vizsgálatához először definiálni kell két módus skaláris szorzatát:

$$\langle p_n(\mathbf{r}) p_m(\mathbf{r}) \rangle = \iiint_V p_n(\mathbf{r}) p_m(\mathbf{r}) dV$$

ahol a hármas integrál a zárt terem teljes V térfogatára vonatkozik. Két módus akkor ortogonális, ha a skaláris szorzatuk nulla, azaz:

$$\langle p_n(\mathbf{r}) p_m(\mathbf{r}) \rangle = \delta_{nm} K_n = \begin{cases} K_n & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases} \quad (11)$$

ahol δ_{nm} a Kronecker-delta függvény, $K_n = \|p_n(\mathbf{r})\|^2$ pedig egy konstans. Amennyiben a terem összes sajátértéke és sajátfüggvénye azaz módusa ismert, az inhomogén hullámegyenlet már könnyen megoldható, vagyis a terem tetszőleges pontján, tetszőleges gerjesztésre meghatározható a hangnyomás. Ez a módszer a modális szuperpozíció technikája, melynek levezetését az alábbiakban mutatom be. A levezetés során a [5] forrásban bemutatott egydimenziós esetet terjesztettem ki háromdimenziósra.

A szoba tetszőleges \mathbf{r}_0 pontját egy $\delta(t)$ Dirac-delta jellel gerjesztve a (3) homogén hullámegyenlet a következőképpen alakul át:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t)$$

melyet a frekvenciatartományba áttanszformálva kapjuk meg az inhomogén Helmholtz egyenletet:

$$\Delta p(\mathbf{r}, \omega) + k^2 p(\mathbf{r}, \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (12)$$

ahol felhasználtam, hogy a Dirac-delta függvény Fourier-transzformáltja $F\{\delta(t)\} = 1$. A differenciálegyenletet a modális szuperpozíció technikájával megoldva a $p(\mathbf{r}, \omega)$ hangnyomás a módusok lineáris kombinációjával állítható elő:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n \alpha_n p_n(\mathbf{r}) \quad (13)$$

ahol α_n értékét, azaz az n -edik módus részesedési tényezőjét keresem. Ehhez a $p(\mathbf{r}, \omega)$ hangnyomást behelyettesítem az (12) inhomogén Helmholtz egyenletbe:

$$\Delta \left(\sum_n \alpha_n p_n(\mathbf{r}) \right) + k^2 \left(\sum_n \alpha_n p_n(\mathbf{r}) \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Az összefüggés átrendezve:

$$\sum_n \alpha_n (\Delta p_n(\mathbf{r}) + k^2 p_n(\mathbf{r})) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (14)$$

Felhasználva, hogy a módusok a homogén Helmholtz egyenlet megoldásai, azaz az alábbi:

$$\Delta p_n(\mathbf{r}) + k_n^2 p_n(\mathbf{r}) = 0$$

egyenlet érvényes lesz, melyet átrendezve:

$$\Delta p_n(\mathbf{r}) = -k_n^2 p_n(\mathbf{r})$$

és (14) összefüggésbe visszahelyettesítve:

$$\sum_n \alpha_n (-k_n^2 p_n(\mathbf{r}) + k^2 p_n(\mathbf{r})) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

A kapott egyenletet átrendezve és mindkét oldalt az m -edik $p_m(\mathbf{r})$ módusokkal megszorozva:

$$\sum_n \alpha_n (k^2 - k_n^2) p_m(\mathbf{r}) p_n(\mathbf{r}) = p_m(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

majd mindkét oldal térfogatszertinti hármass integrálját véve:

$$\sum_n \alpha_n (k^2 - k_n^2) \iiint_V p_m(\mathbf{r}) p_n(\mathbf{r}) dV = \iiint_V p_m(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV$$

adódik, ahol a (11) módusok egymásra való merőlegességének tulajdonságát, és a Dirac-delta függvény kiválasztási tulajdonságát felhasználva:

$$\sum_n \alpha_n (k^2 - k_n^2) \delta_{nm} K_n = p_m(\mathbf{r}_0)$$

majd a szummát elvégezve:

$$\alpha_m (k^2 - k_m^2) K_m = p_m(\mathbf{r}_0)$$

és átrendezve megkapjuk az α_m modális koordinátát:

$$\alpha_m = \frac{p_m(\mathbf{r}_0)}{(k^2 - k_m^2) K_m}$$

amit (13) összefüggésbe behelyettesítve:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n \frac{p_n(\mathbf{r}_0) p_n(\mathbf{r})}{(k^2 - k_n^2) K_n}. \quad (15)$$

Mivel a peremfeltételek többnyire komplex egyenletek, így a k_n sajátértékek is komplexek lesznek:

$$k_n = \frac{\omega_n}{c} + j \frac{\delta_n}{c} \quad (16)$$

továbbá feltételezve, hogy $\delta_n \ll \omega_n$ a (15) egyenletnek az alábbi alakját kapjuk:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = c^2 \sum_n \frac{p_n(\mathbf{r}_0) p_n(\mathbf{r})}{(\omega^2 - \omega_n^2 - 2j\omega_n \delta_n) K_n} \quad (17)$$

ahol $p_n(\mathbf{r})$ az n -edik módus módusalakja, ω_n a sajátfrekvenciája, δ_n pedig a csillapítási együtthatója.

A (17) összefüggésben meghatározott $p(\mathbf{r}, \omega)$ hangnyomás, az időtartományban \mathbf{r}_0 pontban Dirac-delta függvénnyel gerjesztett szoba válasza lesz az \mathbf{r} pontban, azaz a terem \mathbf{r}_0 és \mathbf{r} pontja közötti átviteli karakterisztika, vagy inverz Fourier-transzformálva a terem \mathbf{r}_0 és \mathbf{r} pontja közötti impulzusválasza:

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

A (17) összefüggést vizsgálva megállapítható, hogy az \mathbf{r}_0 pontban gerjesztett és \mathbf{r} pontban mért átvitel megegyezik az \mathbf{r} pontban gerjesztett és \mathbf{r}_0 pontban mért átvittel, melyet a reciprocitás elvének neveznek. A termék ezen tulajdonsága jelentősen megkönnyíti a teremakusztikai méréseket.

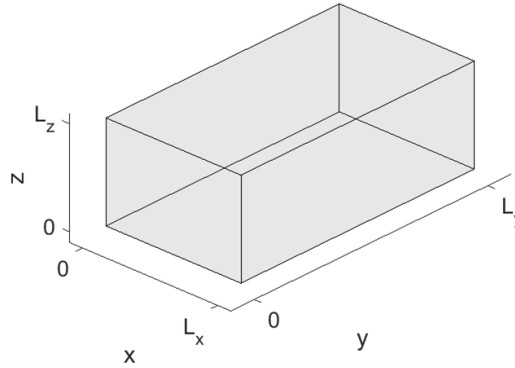
2.2.3. Téglatest alakú terem módusai

Ahogy azt az előző alfejezet elején említettem, hullámegyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei analitikusan csak néhány kivételes esetben határozhatóak meg. Ilyen kivételes eset például a téglatest alakú terem. A terem L_x szélességű, L_y hosszúságú és L_z

magasságú, a falait pedig ebben az esetben végtelenül merevnek tekintem, azaz a falak specifikus impedanciája $\zeta = \infty$ lesz. Ekkor a fal pozíciójában a falra merőleges $v_n(\mathbf{r}, \omega) = v_n(x, y, z, \omega)$ részecskesebesség nullával lesz egyenlő (az alfejezet további részében az átláthatóság érdekében elhagyom az ω körfrekvenciától való függés jelölését) [5]:

$$\begin{aligned} v_x(0, y, z) &= 0 & v_x(L_x, y, z) &= 0 \\ v_y(x, 0, z) &= 0 & v_y(x, L_y, z) &= 0 \\ v_z(x, y, 0) &= 0 & v_z(x, y, L_z) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ahol v_x , v_y és v_z a részecskesebesség x , y és z tengelyekkel párhuzamos, fal felé mutató komponenseit jelöli.



3. ábra: Téglatest alakú terem L_x szélességgel, L_y hosszúsággal és L_z magassággal

Ebben az esetben a (4) Helmholtz egyenlet a változók szeparálásának módszerével oldható meg, ugyanis a hangnyomás felbontható csak x -től, y -től és z -től függő tagokra:

$$p(\mathbf{r}) = p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z) \quad (19)$$

melyet visszahelyettesítve a Helmholtz egyenletbe:

$$p_x''(x)p_y(y)p_z(z) + p_x(x)p_y''(y)p_z(z) + p_x(x)p_y(y)p_z''(z) + k^2p_x(x)p_y(y)p_z(z) = 0$$

ahol mindkét oldalt elosztva $(p_x(x)p_y(y)p_z(z))$ -vel:

$$\frac{p_x''(x)}{p_x(x)} + \frac{p_y''(y)}{p_y(y)} + \frac{p_z''(z)}{p_z(z)} + k^2 = 0. \quad (20)$$

A fenti egyenletben csak akkor lehet az összeg konstans, ha az összegzés minden tagja konstans, azaz legyen:

$$\frac{p_x''(x)}{p_x(x)} = -k_x^2, \quad \frac{p_y''(y)}{p_y(y)} = -k_y^2, \quad \frac{p_z''(z)}{p_z(z)} = -k_z^2$$

és

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0. \quad (21)$$

Ezt az egyenletet átrendezve és $k = \omega/c$ -ét behelyettesítve kapjuk az úgynevezett diszperzió relációt:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (22)$$

mely a hullámterjedés sebessége és frekvenciája között teremt kapcsolatot, ugyanis a hullám terjedése közben nem tartja meg az alakját, mivel a különböző frekvenciájú komponensei különböző sebességgel terjednek [5].

Mivel a hangnyomás mellett a peremfeltétel is csatolatlan az x , y és z irányokra, így külön-külön megoldhatóak, mint egydimenziós eset. Ekkor például, ha csak az x -től való függést vesszük figyelembe, a (20) és (21) összefüggés szerint:

$$p_x''(x) = -k_x^2 p_x(x)$$

mely differenciálegyenletnek az általános megoldása [8]:

$$p_x(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad (23)$$

ahol A és B együtthatókat a (18) peremfeltétel határozza meg. A (8) összefüggés szerint, ahol a részecskesebesség nullával egyenlő, azaz a falnál, ott a hangnyomás első hely szerinti deriváltjának is nullának kell lennie:

$$p_x'(x=0) = 0 \quad p_x'(x=L_x) = 0.$$

A (23) általános megoldást x szerint deriválva:

$$p_x'(x) = A k_x \sin(k_x x) - B k_x \cos(k_x x) = 0$$

melyet az $x=0$ helyen vizsgálva a B együtthatóra 0-át kapunk, az $x=L_x$ behelyettesítéssel pedig három megoldás lehetséges, melyből az első kettő érvénytelen, ugyanis az első $A=0$ triviális megoldás, a második $k_x=0$ pedig fizikailag értelmetlen. A harmadik, és egyetlen érvényes megoldás szerint:

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad n_x \in \mathbb{Z}$$

az $A = A_x$ pedig egy tetszőleges konstans. A fenti megoldással hasonló eredményt kapunk az y és z irányokra:

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad n_y \in \mathbb{Z}$$

$$k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}, \quad n_z \in \mathbb{Z}.$$

A kapott k_x , k_y és k_z összefüggéseket a (21) diszperzió relációba visszahelyettesítve és átrendezve:

$$k_{n_x n_y n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

majd $\omega = kc$ behelyettesítéssel:

$$\omega_{n_x n_y n_z} = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \quad (24)$$

megkapjuk a merev falú téglatest alakú teremben fellépő módusok $\omega_{n_x n_y n_z}$ sajátkörfrekvenciáit. A tisztán valós $k_{n_x n_y n_z}$ sajátértékek megfelelnek annak a feltevésnek,

hogy a falak végtelenül merevek, ekkor ugyanis a teremben kialakult módusok csillapítatlanok lesznek, azaz (16) szerint a $\delta_{n_x n_y n_z}$ csillapítási együtthatók:

$$\delta_{n_x n_y n_z} = c \operatorname{Im} \{k_{n_x n_y n_z}\} = 0.$$

Ezen eredményeket a (23) általános megoldásba behelyettesítve az egyes hangnyomás komponensek:

$$p_{n_x}(x) = A_x \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right)$$

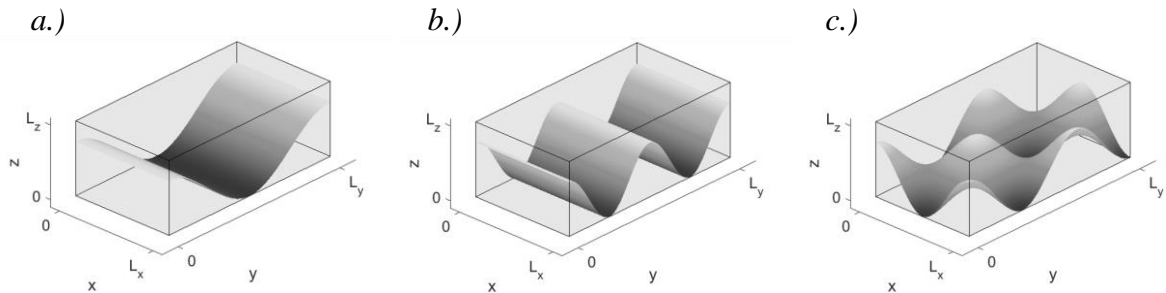
$$p_{n_y}(y) = A_y \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right)$$

$$p_{n_z}(z) = A_z \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$$

melyeket a (19) behelyettesítve, és $C = A_x A_y A_z$ választással:

$$p_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = C \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \quad (25)$$

megkapjuk a téglatest alakú teremben kialakult módusalakokat, azaz a teremben $\omega_{n_x n_y n_z}$ körfrekvenciákon kialakuló háromdimenziós állóhullámokat.



4. ábra: Példa a téglatest alakú teremben kialakuló módusalakokra különböző $[n_x, n_y, n_z]$ számhármassokra: a.) $[0, 2, 0]$, b.) $[0, 4, 0]$, c.) $[2, 3, 0]$

Ebben az alfejezetben eddig végtelenül merev falakat feltételeztem $\zeta = \infty$ specifikus impedanciával. A specifikus impedancia komplex értékeket is felvehet, mely esetben a terem $p_{n_x n_y n_z}$ módusalakjai és $\omega_{n_x n_y n_z}$ sajátkörfrekvenciái megegyeznek a fentebb meghatározottakkal, viszont a csillapítási együtthatók értelemszerűen nullától különbözőek lesznek. Tisztán valós ζ specifikus impedanciával rendelkező falak esetén a csillapítási együtthatók levezetés nélkül (levezetés az [4] forrás 71-75. oldalán található):

$$\delta_{n_x n_y n_z} = \frac{2\omega}{\omega_{n_x n_y n_z}} \sqrt{\frac{1}{L_x \zeta_x} + \frac{1}{L_y \zeta_y} + \frac{1}{L_z \zeta_z}} \quad (26)$$

ahol $\omega_{n_x n_y n_z}$ a merev falú termekre meghatározott sajátkörfrekvencia, $\zeta_{x,y,z}$ pedig az x, y, z irányra merőleges falak valós specifikus impedanciája.

Érdeemes megvizsgálni, hogy egy bizonyos f frekvencia alatt mennyi módus található, azaz mennyi n_x, n_y, n_z számhármassra igaz, hogy

$$\frac{\omega_{n_x n_y n_z}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}} < f.$$

Ez a szám közelítőleg levezetés nélkül:

$$N_f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c}\right)^3$$

ahol $V = L_x L_y L_z$ a terem térfogata. N_f összefüggéséből jól látszik, hogy a módusok száma a frekvencia harmadik hatványával arányos. N_f -et frekvencia szerint deriválva megkapjuk a sajátfrekvenciák átlagos sűrűségét a frekvenciatengely mentén:

$$\frac{dN_f}{df} = 4\pi V \frac{f^2}{c^3}. \quad (27)$$

A módusok sűrűségének frekvenciára való nagy mértékű érzékenységének szemléltetésére tekintsünk egy $5 \times 4 \times 2 \text{ m}$ méretű téglatest alakú termet. Ebben a teremben 200 Hz-ig $N_f = 58$ darab módus található $dN_f/df = 1,35 \text{ módus/Hz}$ maximális sűrűséggel, 2000 Hz-ig viszont már $3,62 \cdot 10^4$ darab módus jelentkezik $59,4 \text{ módus/Hz}$ maximális sűrűséggel. Ez a példa jól szemlélteti a terem modális modellezésének a nagy módusszámból adódó jelentős számításigényét még egy ilyen egyszerű esetre is, mint a téglatest alakú terem.

2.2.4. Schroeder frekvencia

A termék átvitelének (17) összefüggésében megfigyelve az n -edik módus amplitúdómenetét (5. ábra) $A_n = p_n(\mathbf{r}_0)p_n(\mathbf{r})/K_n$ behelyettesítéssel:

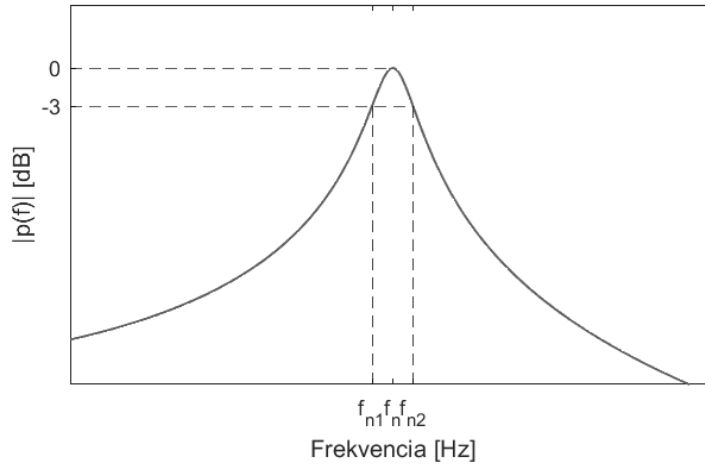
$$|p_n(\omega)| = \frac{|A_n|}{|\omega^2 - \omega_n^2 - 2j\omega_n\delta_n|}$$

megállapítható, hogy az egyes módusok egy rezonáns rendszernek felelnek meg, $f_n = \omega_n/2\pi$ sajátfrekvenciával és δ_n csillapítási együtthatóval. Továbbra is feltételezve, hogy $\delta_n \ll \omega_n$, illetve bevezetve azt a két frekvenciát, ahol az amplitúdómenet f_n helyen felvett értéke fele akkorára csökken, azaz a -3 dB pontokat:

$$f_{n1,2} = \frac{\omega_{n1,2}}{2\pi} = \frac{\omega_n \pm \delta_n}{2\pi}$$

megadható az n -edik módus Δf_n sáv szélessége:

$$\Delta f_n = f_{n1} - f_{n2} = \frac{\omega_n + \delta_n}{2\pi} - \frac{\omega_n - \delta_n}{2\pi} = \frac{\delta_n}{\pi}$$



5. ábra: A $|p_n(\omega)|$ amplitúdómenet -3 dB pontjainak a szemléltetése

A sávszélesség átlagos $\langle \Delta f_n \rangle$ értéke kiszámítható a terem T_{60} utózengési idejét felhasználva [9]:

$$\langle \Delta f_n \rangle = \frac{2,2}{T_{60}} \quad (28)$$

ahol az utózengési idő egy V térfogatú és S felületű teremre Eyring formulája szerint [5]:

$$T_{60} = \frac{6 \ln 10}{c} \frac{4V}{\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) S}$$

Az átlagos $\langle \Delta f_n \rangle$ sávszélességet összehasonlítva az f frekvencia alatt megadott sajátfrekvenciák $\langle f_{\text{dist}} \rangle$ átlagos távolságával, mely a sajátfrekvenciák átlagos sűrűségének (27) a reciproka:

$$\langle f_{\text{dist}} \rangle = \frac{1}{\frac{dN_f}{df}} = \frac{c^3}{4\pi V f^2} \quad (29)$$

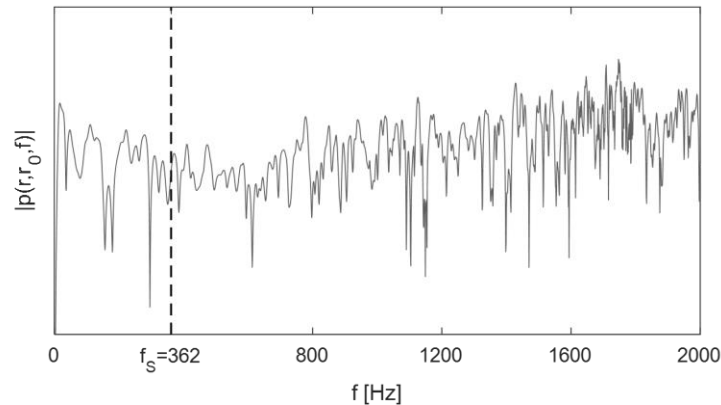
a következő megfigyeléseket tehetjük. Ha a sajátfrekvenciák $\langle f_{\text{dist}} \rangle$ átlagos távolsága jelentősen nagyobb, mint a $\langle \Delta f_n \rangle$ átlagos sávszélesség, akkor a módusok a frekvenciatengelyen jól szeparálható csúcsokként jelennek meg, ekkor egyenként gerjeszthetőek és mérhetőek. Ellenkező esetben, ha a $\langle \Delta f_n \rangle$ átlagos sávszélesség nagyobb, mint az $\langle f_{\text{dist}} \rangle$ sajátfrekvenciák átlagos távolsága, akkor az egyes rezonanciacsúcsok egymásba lapolódnak, így (17) szerint ezeken az ω frekvenciákon nem egy, hanem egyszerre több módus járul hozzá a hangnyomáshoz. A két eset elválasztó frekvenciát Manfred R. Schroeder német fizikus adta meg. Schroeder ennek a határnak azt az f_S frekvenciát határozta meg, melynél átlagosan három sajátfrekvencia esik egy sávszélességbe:

$$\langle \Delta f_n \rangle = 3 \langle f_{\text{dist}} \rangle$$

ahol (28) és (29) összefüggéseket behelyettesítve és az egyenletet átrendezve [9]:

$$f_S = \sqrt{\frac{3c^3}{4\pi \cdot 2,2}} \sqrt{\frac{T_{60}}{V}} \approx 2000 \sqrt{\frac{T_{60}}{V}}$$

Fontos kiemelni a Schroeder frekvencia és a térfogat kapcsolatát. Nagy termekre, csarnokokra a Schroeder frekvencia tipikusan 20 – 30 Hz, tehát a teljes hallható frekvenciatartományban erősen átlapolódnak a módusok. Ellenben kis termék esetén, ahol a Schroeder frekvencia már a 100 – 500 Hz-es tartományra esik.



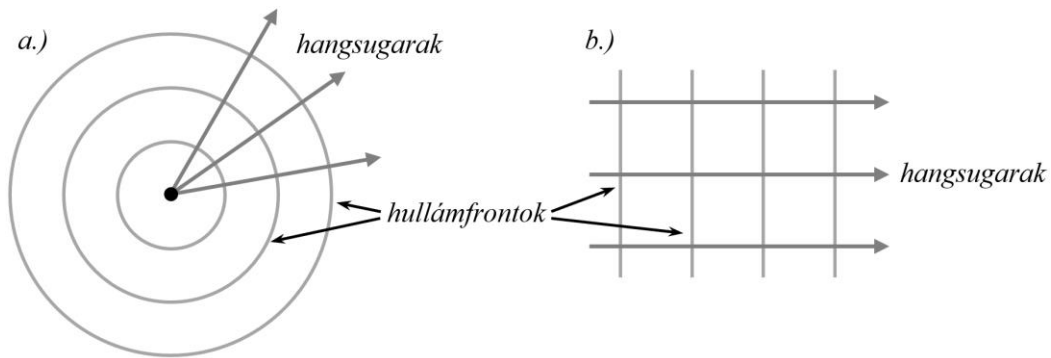
6. ábra: Egy $L_x = 4,6 \text{ m}$, $L_y = 5,2 \text{ m}$, $L_z = 3 \text{ m}$ méretű terem átvitele, $\alpha = 0,4$ elnyelési tényezőjű falakkal, mely esetben a Schroeder frekvencia: $f_s = 362 \text{ Hz}$

A Schroeder frekvencia a terem akusztikai szempontból két részre, kisfrekvenciás, illetve közép- és nagyfrekvenciás részre osztja, mely két tartomány között van egy átmeneti tartomány is. A kisfrekvenciás tartományban a terem módusai határozzák meg a kialakult hangteret. A közép- és nagyfrekvenciás tartományt a nagy módussűrűség és kis hullámhosszok miatt a hullámelmélet helyett érdemes geometriai teremakusztikával modellezni.

2.2.5. Geometriai teremakusztika

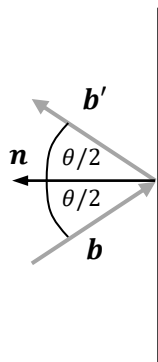
Az előző alfejezetekben az akusztikus hullámegyenlet megoldásával, azaz a hullámelmélettel jellemeztem a termék akusztikáját. A teremben megjelenő módusok száma a frekvencia harmadik hatványával arányosan nő, így az ember által hallható 20 – 20 kHz frekvenciatartományban a terem viselkedését leíró összes módus kiszámítása számításigényes. Erre a problémára ad megoldást a termék közép- és nagyfrekvenciás viselkedésének geometriai akusztikai modellezése. A dolgozatom fókuszában a termék kisfrekvenciás viselkedése áll, azonban szükséges a termék közép- és nagyfrekvenciás modellezésének rövid áttekintése a teremakusztikai problémák bemutatásához.

A fizikai optikával analóg módon a geometriai akusztika alapfelvetése szerint abban a frekvenciatartományban, ahol a hullámhossz lényegesen kisebb, mint a terem mérete, hanghullámok helyett hangsugarakkal modellezzük a hangterjedést. Az optikához hasonlóan a hangsugár a lehető legkisebb keresztmetszetre határolt, a hullámfrontok normálisai kis nyalábjának felel meg [6].



7. ábra: Hanghullámok és hangsugarak szemléltetése a.) pontforrás és b.) síkhullám esetén

Hangsugarak esetén a diffrakció jelensége nem lép fel a sugarak egyenes vonal mentén való terjedése miatt. Hasonlóképpen interferencia sem jön létre, különböző hangterek szuperpozíciójánál nem vesszük figyelembe a fáziskülönbségeket, hanem intenzitásokat adunk össze. Az optikával analóg módon, a hangsugár falakról való visszaverődése során a visszavert sugár a beeső sugár és a fal normálisa által megadott síkban marad, illetve a beeső és visszavert sugár által bezárt szöveget a fal normálisa elfelezi.



8. ábra: Hangsugarak falról való visszaverődése

2.3. Terem akusztikájának kezelése

A teremakusztika tudományának egyik célja a terem akusztikai tervezése a felhasználásának megfelelően. Más hangzást szeretnénk elérni egy hangstúdióban mint egy hangverseny teremben, egy templomban éneklő kórust hallgatva a helység zengése hozzáad az élményhez, míg egy irodában vagy egy osztályteremben ez elkerülendő. Az előző alfejezetekben bemutatott kétféle akusztikus viselkedéssel, a hullám és a sugár modellel, eltérő problémákat modellezhetünk a terem akusztikáját illetően, mely eltérő problémákra különböző megoldások léteznek. Ebben a fejezetben különböző szempontok szerint hasonlítom össze a terem kétféle akusztikai viselkedését.

Az első a terem Schroeder frekvencia alatti kisfrekvenciás viselkedése, ahol a kialakult hangnyomást a terem módusai, azaz a teremben kialakuló állóhullámok határozzák meg. Ahogy azt a 2.2.4-es fejezetben bemutattam, egy módus egy rezonátornak felel meg, eszerint a terem a kisfrekvenciákon egymástól elkülönülő módusok miatt rezonáns viselkedést mutat.

A Schroeder frekvencia fölött a közép- és nagyfrekvenciás tartományban, a teremhangot a geometriai akusztikának megfelelően a falakról visszavert hangsugarak intenzitásának összege alkotja, tehát ezeket a frekvenciákat a terem reflektív viselkedése határozza meg.

A rezonáns és reflektív modell jellemzőit a könnyű összehasonlíthatóság érdekében az alábbi táblázatban foglalom össze.

1. táblázat: A terem rezonáns és reflektív viselkedésének összehasonlítása

	Rezonáns viselkedés	Reflektív viselkedés
Érvényes frekvenciatartomány	$f < f_S$, azaz ahol a hullámhosszok a terem méreteivel egy nagyságrendbe esnek	$f > f_S$, azaz ahol a hullámhosszok nagyságrendekkel kisebbek, mint a terem méretei
Domináns jelenség	Hullám modell: teremmodusok, vagyis a rezonanciafrekvenciákon kialakult állóhullámok (4. ábra)	Sugár modell: falakról történő visszaverődések (8. ábra)
Domináns jelenség által okozott akusztikai problémák	Termen belül nagy hangnyomásbeli különbségek, erős dübörgés, bűgás	Hosszú lecsengési idő, rossz beszédérthetőség, nem kívánt zengés
Passzív megoldások	Membrános basszuscsapda, Helmholtz rezonátor	Jó hangelnyeléssel rendelkező panelek, diffúzorok

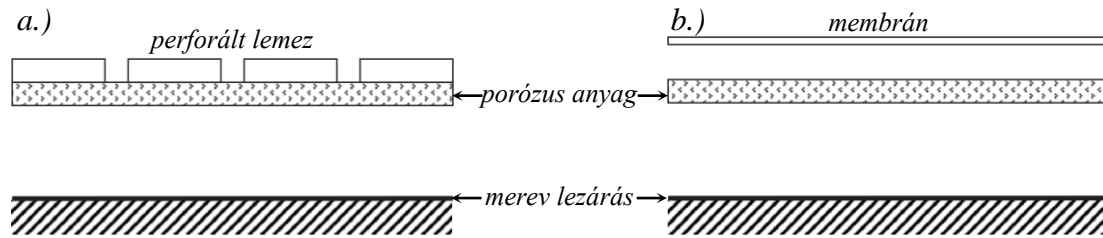
A terem reflektív viselkedéséből adódó problémák megoldására adott, széles választékkal rendelkező hangelnyelő anyagok és diffúzorok, nagy hatékonysággal működnek. Ellenben a kisfrekvenciákon megjelenő rezonancia problémák nehezebben, csak kompromisszumokkal kezelhetők. A passzív kisfrekvenciás teremakusztikai kompenzáció lehetőségeit az alábbi alfejezetben tekintem át.

2.3.1. Termek kisfrekvenciás viselkedésének kontrollálása

A 2.2.4-es fejezetben tárgyaltak szerint, az egymástól elkülönülő kisfrekvenciás módusok kis termekben, mint például hangstúdiókban, házimozikban, konferencia termekben okoznak problémát. Az egymástól frekvenciában jól elszeparálható állóhullámok maximumai és csomópontjai jelentős hangnyomásbeli különbségeket okoznak a hangtérben. Ez a probléma az utóbbi évtizedekben elterjedt nagy basszustartalommal rendelkező zene és mélynyomók kis termekben való használata esetén a legkritikusabb [10].

Módusok kezelésére porózus anyagok és diffúzorok alkalmazása nem túl hatékony a rendelkezésre álló hely kihasználtságát tekintve, mivel fizikai méretüknek a kisfrekvenciákon megjelenő hullámhosszokkal egy nagyságrendbe kellene esni. Hatékony passzív megoldást a különböző rezonáns tömeg-rugó rendszerek adnak, melyeket a modális frekvenciákra hangolva érhető el csillapítás.

Ilyen rendszer például a Helmholtz rezonátor, ahol a rezonanciát ugyanaz a mechanizmus hozza létre mely hangot generál, ha egy sűrösüveg nyílása fölé fújunk. Ebben az esetben az üveg nyakának a perforált lemez rései felelnek meg, az üveg hasának pedig a lemez és egy merev lezárás közti térfogat. Egy másik példa a membrános basszuscsapda, melyben a megfelelő frekvenciára hangolt gumimembrán vagy rétegelt lemez a tömeg, az üregbe zárt levegő pedig a rugó. Az elnyelést a perforált lemez vagy membrán mögé elhelyezett porózus elnyelő anyag biztosítja [10].



9. ábra: a.) Helmholtz rezonátor és b.) membrános basszuscsapda általános felépítése [10]

Rezonáns rendszerekkel a legnagyobb probléma, hogy általában csak keskeny frekvenciatartományban, a behangolt frekvencia körül tudnak csak csillapítani [10]. Különösen nagy problémát jelent a nagyon alacsony frekvenciás *sub-bass*, azaz mély basszus ($\sim 20 - 70 \text{ Hz}$) tartomány, melyek kezelése a terem szerkezeti átalakítását vagy egyéb egyedi megoldást igényel [11]. Azonban hangszórókkal történő hangvisszaadás esetén lehetőségünk van a lesugárzott hang módosításra olyan digitális szűrőkkel, melyek széles frekvenciatartományban csillapítják a terem módusait. Ez a módszer az aktív teremhang-kompenzáció, melyet a 4. fejezetben mutatok be részletesen.

3. Termek hangterének szimulációja

Kisfrekvenciás aktív teremhang-kompenzációs módszerek tervezése során fontos lépés a módszer tesztelése szimulációs környezetben. Attól függően, hogy a terem hullám- vagy sugármodelljét szeretnénk vizsgálni, különböző szimulációs eljárások állnak rendelkezésre. A kisfrekvenciás modális viselkedés a hullámegyenlet analitikus vagy numerikus megoldásával, míg a nagyfrekvenciás reflektív viselkedés például a tükörforrások vagy a sugárkövetés módszerével szimulálható hatékonyan. Mivel ezen dolgozat a termeknek csak a kisfrekvenciás tartományára fókuszál, ezért a reflektív viselkedést szimuláló módszerekre nem térek ki.

Ahogy azt a 2.2.2 fejezet elején említettem, a hullámegyenlet analitikus megoldása néhány kivételes alakú teremtől eltekintve bonyolult feladat, ezért a megoldáshoz numerikus módszereket alkalmazása szükséges. Ebben a fejezetben bemutatom a kivételes esetnek számító hullámegyenlet analitikus megoldásával szimulált téglatest alakú termet, ezt követően röviden összefoglalom a legnépszerűbb numerikus módszereket, végül a választott időtartománybeli véges differenciák módszerének implementációját részletezem.

3.1. Téglatest alakú termék modális szimulációja

A termék modális modelljének összefüggését (17), illetve a téglatest alakú teremre meghatározott (25) módusalakokat, (24) sajátkörfrekvenciákat és (26) csillapítási együtthatókat felhasználva szimulálható egy valós ζ specifikus impedanciával rendelkező falakkal határolt téglatest alakú terem [12]. Vizsgálataim a kisfrekvenciás tartományra korlátozódnak, így a szimuláció során csak egy bizonyos f_m frekvenciáig adom össze a módusokat a (17) szummában, ezzel a jelentősen csökkentve a számításigényt. A feladat tehát az összes olyan $[n_x, n_y, n_z]$ számhármass megtalálása, amire (24) szerint igaz, hogy:

$$\frac{\omega_{n_x n_y n_z}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} < f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}.$$

Az egyenlőtlenséget egy egyenletté alakítva, majd azt átrendezve:

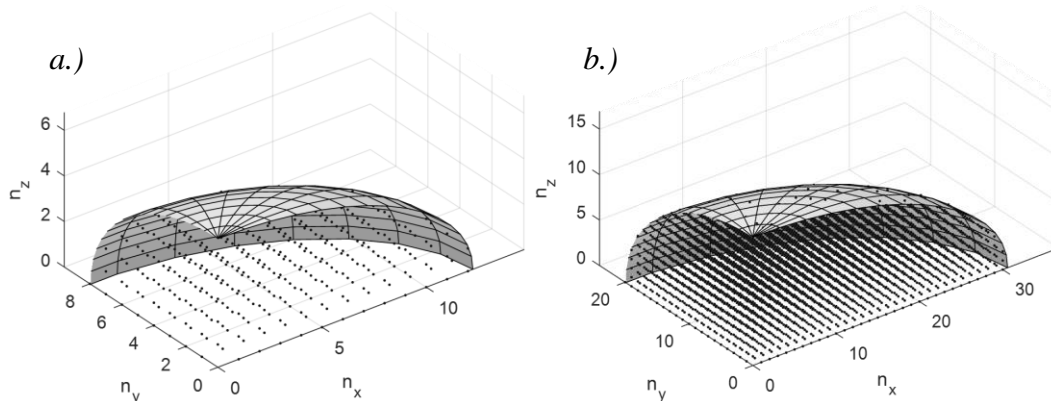
$$1 = \frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2}$$

ahol $A = L_x 2f_m/c$, $B = L_y 2f_m/c$ és $C = L_z 2f_m/c$. Megfigyelhető, hogy a kapott egyenlet egy háromtengelyű ellipszoid egyenlete, ahol az ellipszoid tengelyeinek hossza rendre $2A$, $2B$

és $2C$, a tengelyek pedig n_x , n_y és n_z . Mivel n_x , n_y és n_z pozitív egész számok lehetnek, így az összes keresett $[n_x, n_y, n_z]$ számhármast az ellipszoid pozitív nyolcadán belül helyezkedik el [5]. A keresési algoritmus az alábbi három egymást követő lépésből áll:

1. $n_z = 0, 1, 2, \dots [C]$
2. $n_x(n_z) = 0, 1, 2, \dots \left\lfloor B \sqrt{1 - \frac{n_z^2}{C^2}} \right\rfloor$
3. $n_y(n_x(n_z), n_z) = 0, 1, 2, \dots \left\lfloor B \sqrt{1 - \frac{n_x^2(n_z)}{A^2} - \frac{n_z^2}{C^2}} \right\rfloor$

ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ a lefelé kerekítést jelöli.



10. ábra: Az összes keresett $[n_x, n_y, n_z]$ számhármast az ellipszoid nyolcadon belül, egy $L_x = 5,2$ m, $L_y = 3,4$ m, $L_z = 2,4$ m méretű teremre, a.) $f_m = 400$ Hz, b.) $f_m = 1000$ Hz maximális frekvencia esetén

A modális szimuláció előnye, hogy a módusokat a hullámegyenlet analitikus megoldásával kaptuk meg, tehát pontos eredményt ad. Két legnagyobb hátránya viszont, hogy csak egyszerű alakú, például téglatest, henger vagy gömb alakú termekre alkalmazható, illetve különböző anyagból készült falak specifikus impedanciája nehezen elérhető adat.

3.2. Numerikus módszerek

A modális szimuláció hátrányait kiküszöböli a hullámegyenlet numerikus megoldása. Ezekkel a módszerekkel tetszőleges alakú terem szimulálható a termen belül elhelyezett tárgyak mellett, továbbá a falak csillapítása megadható a specifikus impedanciánál kézenfekvőbb anyagparaméterrel, az α elnyelési tényezővel.

A hullámegyenlet megoldására három legelterjedtebb numerikus módszer a végelem (*Finite Element Method – FEM*) a peremelem (*Boundary Element Method – BEM*) illetve az időtartománybeli véges differenciák (*Finite-Difference Time-Domain – FDTD*) módszere. A végelem és az időtartománybeli véges differenciák módszere a tér felosztásával, míg a peremelem módszer a felületek diszkretizálásával közelíti a hullámegyenletet [13].

3.3. Időtartománybeli véges differenciák módszere

3.3.1. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

A véges differenciák módszerének alapja a deriváltak differenciahányadosokkal való közelítése. Ez az eljárás egy olyan differenciafeladatot ír elő, melyet egy rács véges számú pontjain megoldva közelítő megoldását kapjuk a differenciálegyenletnek. Egyváltozós esetben a rácsot a folytonos $f(x)$ függvény diszkrét pontokban felvett $f_l = f(l\Delta x)$ értékei alkotják, ahol Δx a rácspontok közötti véges távolságot, l egész szám pedig a lépések indexét jelöli az x tengely mentén. Ezen paraméterekkel a df/dx derivált $l\Delta x$ helyen felvett értékét közelítő differenciahányadost többféleképpen megadhatjuk [14]:

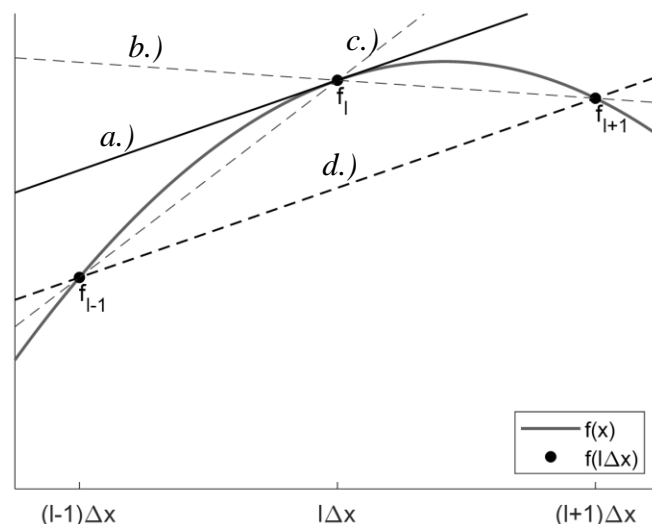
$$\frac{df}{dx}(l\Delta x) \cong \frac{f_{l+1} - f_l}{\Delta x} \quad (30)$$

$$\frac{df}{dx}(l\Delta x) \cong \frac{f_l - f_{l-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dx}(l\Delta x) \cong \frac{f_{l+1} + f_{l-1}}{2\Delta x} \quad (31)$$

mely közelítéseket rendre haladó, retrográd és centrális differenciáknak nevezünk. Az $f(x)$ második deriváltjának $l\Delta x$ helyen felvett értéke hasonló módon közelíthető differenciahányadossal [14]:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(l\Delta x) = \frac{f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1}}{\Delta x^2}. \quad (32)$$



11. ábra: Az $f(x)$ függvény $l\Delta x$ pontban felvett a.) deriválva, illetve a közelítő b.) haladó, c.) retrográd és d.) centrális differenciája

3.3.2. Hullámgörbe numerikus megoldása

A feladat tehát az alábbi (3) hullámgörbe

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{r}, t)$$

és (10) peremfeltétel időtartományba transzformált alakjának

$$(\nabla p(\mathbf{r}, t))_n = -\frac{1}{c\zeta} \dot{p}(\mathbf{r}, t) \quad (33)$$

numerikus megoldása, ahol (10) időtartományba való transzformálásához felhasználtam, hogy $k = \omega/c$ illetve, hogy a $j\omega$ -val való szorzás frekvenciatartományban, idő szerinti deriválásnak felel meg az időtartományban. Az előző alfejezetben tárgyaltak szerint a parciális differenciálegyenlet egy rács pontjain megoldott parciális differenciaegyenlettel közelíthető. Mivel a hullámeqyenlet négyváltozós, a rács ebben az esetben négydimenziós lesz, $p_{l,m,k}^n = p(l\Delta x, m\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ rácspontokkal.

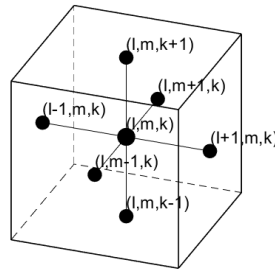
A (3) hullámeqyenlet hely és idő szerinti deriváltjait a (32) differenciahányadossal helyettesítve:

$$\begin{aligned} & \frac{p_{l+1,m,k}^n - 2p_{l,m,k}^n + p_{l-1,m}^n}{\Delta x^2} + \frac{p_{l,m+1,k}^n - 2p_{l,m,k}^n + p_{l,m-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{p_{l,m,k+1}^n - 2p_{l,m,k}^n + p_{l,m,k-1}^n}{\Delta z^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{p_{l,m,k}^{n+1} - 2p_{l,m,k}^n + p_{l,m,k}^{n-1}}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

differenciaegyenletet kapjuk. Az egyenletet átrendezve, a helykülönbségeket egymással egyenlővé téve $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, és bevezetve a $\lambda = c\Delta t/\Delta x$ Courant-számot [15]:

$$\begin{aligned} p_{l,m,k}^{n+1} = & \lambda^2 (p_{l+1,m,k}^n + p_{l-1,m,k}^n + p_{l,m+1,k}^n + p_{l,m-1,k}^n + p_{l,m,k+1}^n + p_{l,m,k-1}^n) + \\ & + 2(1 - 3\lambda^2)p_{l,m,k}^n - p_{l,m,k}^{n-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Ez az összefüggés az úgynevezett *Standard Leapfrog* (SLF) séma, továbbiakban standard séma, ami a $p_{l,m,k}^n$ pont frissítéséhez hat szomszédos pontot használ fel [16].



12. ábra: A standard séma (az ábra [16] alapján készült)

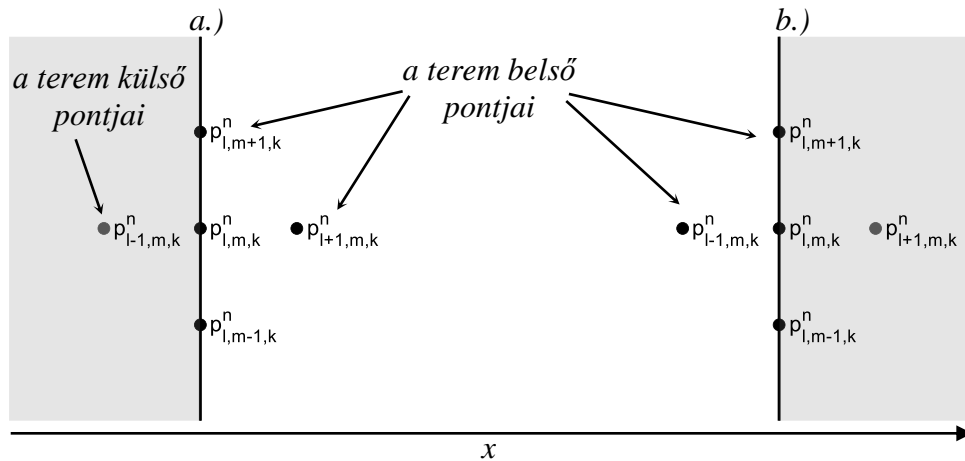
Ezzel a differenciaegyenlettel már minden $n + 1$ -edik időpontban meg lehet határozni a hangnyomást az előző n és $n - 1$ időpontbeli hangnyomás függvényében. Ezzel az egyenlettel csupán a szabad térben terjedő hang szimulálható, azonban a dolgozat fókuszában termék hangtere áll, így a falakról való visszaverődést is figyelembe kell venni, amit a peremfeltétel ad meg. A 2.2.1-es fejezetben leírtak szerint a peremfeltételben a nyomásgradiensnek a teremből tekintve a fal irányába mutató, a falra merőleges komponense szerepel. Könnyen belátható, hogy a nyomásgradiens falra merőleges komponense egy térben diszkrétizált terem esetén a fal l, m, k pontja és a fal külső szomszédos

$$l \pm 1, m, k$$

$$l, m \pm 1, k$$

$$l, m, k \pm 1$$

pontjából alkotott differenciahányaddal is közelíthető.



13. ábra: A $p_{l,m,k}^n$ falpont és a.) $p_{l-1,m,k}^n$ illetve b.) $p_{l+1,m,k}^n$ külső szomszédos pontok szemléltetése (az ábra [16] alapján készült)

A továbbiakban a külső pontokat a l, m, k indexelés helyett az outer indexszel fogom jelölni. A (33) peremfeltételt közelítő differenciaegyenlet hely szerinti parciális deriváltját a fentebb leírtaknak megfelelően a haladó (30), az idő szerinti parciális deriváltját pedig a centrális (31) differenciahányaddal közelítem:

$$\frac{p_{\text{outer}}^n - p_{l,m,k}^n}{\Delta x} = -\frac{1}{c\zeta} \frac{p_{l,m,k}^{n+1} + p_{l,m,k}^{n-1}}{2\Delta x}$$

melyet átrendezve és a Courant-számot behelyettesítve [15]:

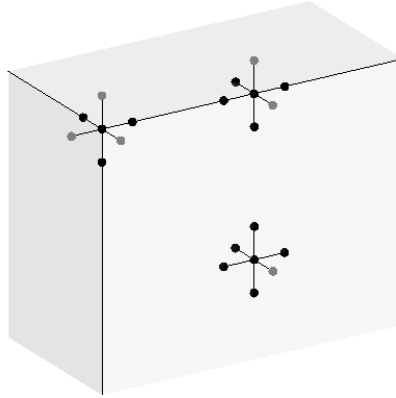
$$p_{\text{outer}}^n = \frac{\lambda}{2\zeta} p_{l,m,k}^{n-1} - \frac{\lambda}{2\zeta} p_{l,m,k}^{n+1} + p_{l,m,k}^n. \quad (35)$$

A (35) differenciaegyenlet tehát az l, m, k falpontoknál alkalmazandó, azaz, ha a (34) egyenletben a $p_{l,m,k}^{n+1}$ értéket egy falnál szeretnénk meghatározni. Ekkor ugyanis a (34) egyenletben minden olyan falon túlra mutató

$$p_{l\pm 1, m\pm 1, k\pm 1}^n = p_{\text{outer}}^n \quad (36)$$

külső szomszédos pont helyére a (35) összefüggést kell behelyettesíteni, ezzel teljesítve a peremfeltételt.

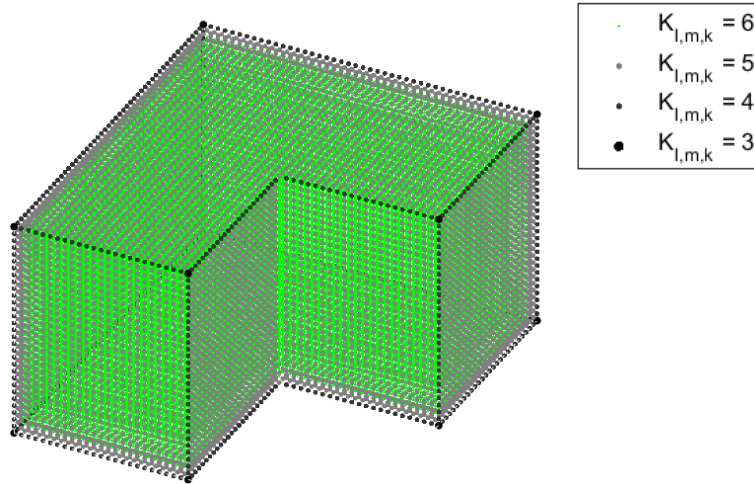
Az egyes falpontok külső szomszédos pontjainak számát jól szemlélteti az alábbi ábra, mely szerint a sarokpontoknak 3, az élpontoknak 2, a felületpontoknak pedig 1 darab külső szomszédos pontjuk van.



14. ábra: Külső szomszédos pontok számának a szemléltetése

Legyen $K_{l,m,k} = 3 \dots 6$ az l, m, k pont belső szomszédos pontjainak száma, ekkor $6 - K_{l,m,k}$ adja meg a külső szomszédos pontok számát, illetve legyen az összes fal melletti külső pont hangnyomása nullával egyenlő minden időpillanatban:

$$p_{outer}^n = 0 \quad (37)$$



15. ábra: $K_{l,m,k}$ értékek az l, m, k pozíciótól függően egy 'L' alakú szobára

Ez esetben a (34) differenciaegyenlet és (35) peremfeltétel összekapcsolható, mivel a (33) peremfeltétel haladó differenciás közelítése miatt a (35) peremfeltétel differenciaegyenlete minden külső pontra érvényes:

$$p_{l,m,k}^{n+1} = \lambda^2 \left((6 - K_{l,m,k}) \left(\frac{\lambda}{2\zeta} p_{l,m,k}^{n-1} - \frac{\lambda}{2\zeta} p_{l,m,k}^{n+1} + p_{l,m,k}^n \right) + p_{l+1,m,k}^n + p_{l-1,m,k}^n + p_{l,m+1,k}^n + p_{l,m-1,k}^n + p_{l,m,k+1}^n + p_{l,m,k-1}^n \right) + 2(1 - 3\lambda^2) p_{l,m,k}^n - p_{l,m,k}^{n-1}.$$

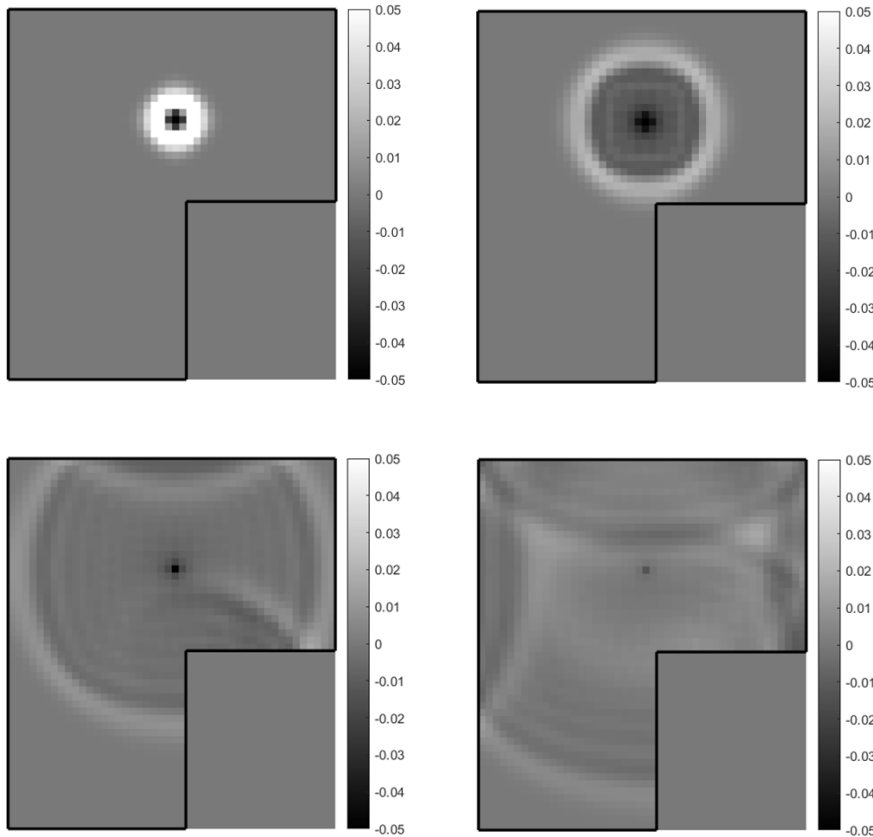
Ha $p_{l,m,k}^{n+1}$ nem egy falpont, azaz $K_{l,m,k} = 6$, az egyenlet a peremfeltételt figyelmen kívül hagyja, ha viszont egy falpont, akkor az egyenletben a falon kívülre mutató pontok (37) szerint nullával lesznek egyenlőek, és $(6 - K_{l,m,k})$ a kívülre mutató pontok számával lesz egyenlő, tehát ennyiszer veszi figyelembe a peremfeltételt. Ez a módszer lényegében a

fentebb említett (36) behelyettesítést végzi el, mely jelentősen leegyszerűsíti a differenciaegyenlet implementálását. A fenti egyenletet $p_{l,m,k}^{n+1}$ -re átrendezve kapjuk meg a hullámeqyenletet és peremfeltételt közelítő differenciaegyenletet végső kompakt alakját [15]:

$$\begin{aligned}
 p_{l,m,k}^{n+1} = & \frac{1}{1 + (6 - K_{l,m,k}) \frac{\lambda^3}{2\zeta}} \left(\lambda^2 (p_{l+1,m,k}^n + p_{l-1,m,k}^n + p_{l,m+1,k}^n + p_{l,m-1,k}^n + p_{l,m,k+1}^n \right. \\
 & \left. + p_{l,m,k-1}^n) + \left((6 - K_{l,m,k}) \frac{\lambda^3}{2\zeta} + 2(1 - 3\lambda^2) \right) p_{l,m,k}^n \right. \\
 & \left. + \left((6 - K_{l,m,k}) \frac{\lambda^3}{2\zeta} - 1 \right) p_{l,m,k}^{n-1} \right) \quad (38)
 \end{aligned}$$

ahol a fal ζ akusztikus specifikus impedanciája és α elnyelési tényezője között a (5) és (9) összefüggés adja meg a kapcsolatot.

Az időtartománybeli véges differenciák módszerét MATLAB-ban implementáltam. A szimulált hullámterjedést különböző egymást követő időpontokban az alábbi ábra szemlélteti, ahol egy háromdimenziós 'L' alakú terem közepét egy (43) Gauss-impulzussal gerjesztettem.



16. ábra: Gauss-pulzussal gerjesztett háromdimenziós 'L' alakú teremben terjedő hullám a terem síkjában, négy különböző időpillanatban

3.3.3. Konvergencia és stabilitás

A konvergencia és a stabilitás definiálásához vezessük be a diszkretizálásból adódó hibát:

$$e_d = p - \bar{p}$$

illetve a kerekítésből adódó hibát:

$$e_r = \bar{p} - p^*$$

ahol p a differenciálegyenlet pontos megoldása, \bar{p} a differenciálegyenletet közelítő differenciaegyenlet pontos megoldása, p^* pedig a differenciaegyenlet numerikus megoldása. Tehát a differenciálegyenlet numerikus megoldásának teljes hibája:

$$e = e_d + e_r.$$

A differenciaegyenlet akkor konvergens, ha a rács felbontását végtelenül csökkentve, azaz $\Delta x \rightarrow 0$ és $\Delta t \rightarrow 0$, az e_d diszkrétizálásból adódó hiba a nullához tart. A differenciaegyenlet pedig akkor stabil, ha az e_r kerekítésből adódó hiba nem növekszik túl gyorsan a rács felbontásának csökkentése mellett [17].

Egy differenciaegyenlet explicit, ha megoldása csak az előző időpontbeli megoldásoktól függ, ellenkező esetben implicit. Az implicit differenciaegyenlet általában stabil, mivel az idő növekvő irányában megjelenő instabilitást kiegyenlíti az idő csökkenő irányában megjelenő stabilitás [17]. Mivel a (38) differenciaegyenlet explicit, így a stabilitás feltételét meg kell adni, ami levezetés nélkül [16] szerint az alkalmazott standard sémára:

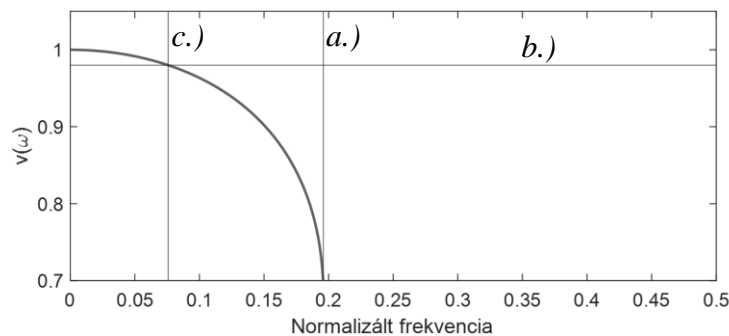
$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = \lambda^2 \leq \frac{1}{3} \quad (39)$$

ahol λ a Courant-szám.

3.3.4. Numerikus diszperzió

Az időtartománybeli véges differenciák módszerének egyik nem kívánt hatása a numerikus diszperzió, ami a nagyfrekvenciás hullámok terjedési sebességét csökkenti. Ez jól szemléltethető a hang \hat{c} szimulált és c tényleges terjedési sebességének a $v(\omega)$ hányadosával. A standard séma esetén a numerikus diszperzió az x , y , vagy z tengellyel párhuzamos irányú axiális terjedéskor a legnagyobb, ekkor a sebességek hányadosa a frekvencia függvényében:

$$v(\omega) = \frac{\hat{c}}{c} = \frac{\omega}{c \sqrt{\left(\frac{2}{\Delta x} \arcsin\left(\frac{\sin^2(\omega\Delta t/2)}{\lambda^2}\right)\right)^2}}$$



17. ábra: A levegőben terjedő hang \hat{c} szimulált és $c = 340 \text{ m/s}$ valós terjedési sebességének hányadosa a frekvencia függvényében $\lambda = \sqrt{1/3}$ esetén a Nyquist frekvenciáig ábrázolva, ahol a.) f_c , b.) 2%-os hibahatár és c.) f_p

Az $\arcsin(x)$ függvény $x > 1$ -re komplex eredményt ad, ami a $v(\omega)$ hányadosra nem értelmezett, a 17. ábrán csak az érvényes $v(\omega) \in \mathbb{R}$ értékeket ábrázolom. A 17. ábrán megfigyelhető, hogy a frekvencia növelésével valóban csökken a szimulált hullám terjedési sebessége a valós terjedési sebességhez képest, illetve, hogy a szimuláció csak egy bizonyos f_c törésponti frekvenciáig érvényes:

$$f_c = f_s \frac{\arcsin(\lambda)}{\pi} \quad (40)$$

ahol $f_s = 1/\Delta t$ a mintavételi frekvencia. A törésponti frekvencia értékét különböző Courant-számok mellett vizsgálva, megállapítható, hogy a legnagyobb törésponti frekvenciát és a legkisebb diszperziót a Courant-szám legnagyobb lehetséges értéke mellett érhetjük el, ami a stabilitás feltétele (39) szerint:

$$\lambda = \sqrt{1/3}, \quad (41)$$

ekkor az érvényes frekvenciatartomány felső határa $f_c = 0.196f_s$ lesz. A törésponti frekvencia azt a frekvenciatartományt adja meg, ahol a szimuláció érvényes, de esetleg pontatlan eredményt ad. Definiáljuk azt az f_a maximális frekvenciát, ahol a diszperzió mértéke nem haladja meg a 2%-ot. Ez a standard séma esetén $\lambda = \sqrt{1/3}$ mellett:

$$f_p = 0.075f_s \quad (42)$$

Ezen alfejezetben közölt eredmények és következtetések a [16] forrásból származnak.

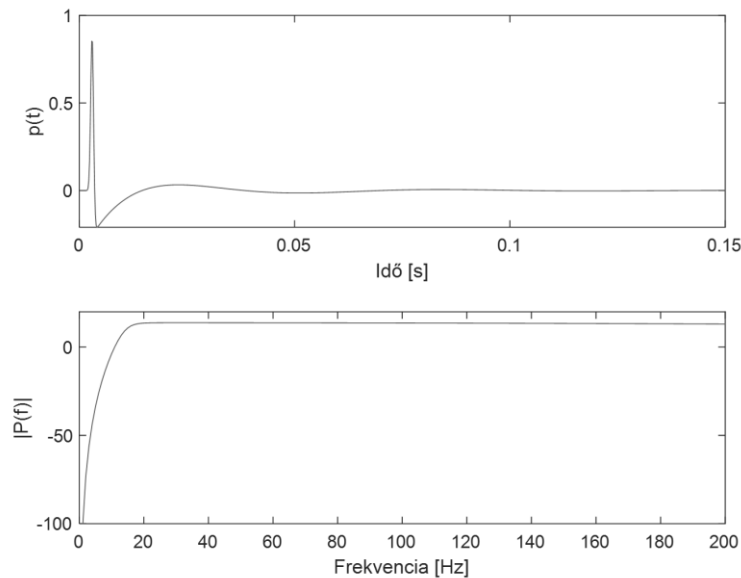
3.3.5. Frekvenciaválasz-függvény ellenőrzése

A MATLAB-ban implementált időtartománybeli véges differenciák módszert egy téglatest alakú, $4,6 \times 5,2 \times 3$ m méretű terem modális modelljével és egy ugyanekkora valós téglatest alakú teremben végezett mérésével is összehasonlítom. Az összehasonlítást a dolgozat fókuszában álló kisebb méretű, $\sim 30 - 70$ m³ térfogatú termék 200 Hz alatti rezonáns viselkedésű tartományára végzem el.

A modális modellel való összehasonlítás során a véges differenciák módszerével szimulált terem frekvenciaválasz-függvényének meghatározásához a terem szimulált impulzusválaszát transzformáltam a frekvenciatartományba diszkrét Fourier-transzformációval. A falak elnyelési tényezőjére $\alpha = 0$, térbeli felbontásra $\Delta x = 0,1$ m, az időbeli felbontásra (41) szerint $\Delta t = c\Delta x\sqrt{1/3} = 0,17$ ms, a mintaszámra $N = 5889$ értékeket választottam, így a mintavételi frekvencia $f_s = 1/\Delta t = 5889$ kHz lesz, tehát pontos eredmény $f_p = 0.075f_s = 441$ Hz-ig várható, a frekvenciafelbontás pedig $\Delta f = f_s/N = 1$ Hz lesz. Ezen paraméterek a vizsgált frekvenciatartomány, a frekvenciafelbontás és a szimuláció futási idejének szempontjából optimális választások. Az elnyelési tényező nullára állításával a (35) összefüggés nullával lesz egyenlő, így a peremfeltétel számítása nem fog további numerikus hibát okozni. A termet egy Gauss-pulzussal gerjesztettem [18]:

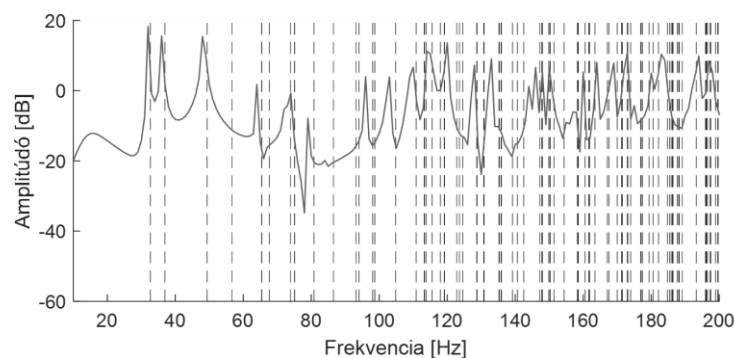
$$p(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0-\sigma/2}{\sigma/2}\right)^2} \quad (43)$$

ahol $\gamma \geq 2$ szórás fordítottan arányos a pulzus szélességével, t_0 a késleltetés, a -3 dB-es f_{Gauss_c} törésponti frekvenciát pedig a $\sigma = 1/f_{\text{Gauss}_c}$ összefüggéssel lehet beállítani. A szórást $\gamma = 3$ -ra, a késleltetést $t_0 = 2$ ms-ra, a törésponti frekvenciát $f_{\text{Gauss}_c} = 500$ Hz-re állítottam, majd a jelet egy 15 Hz-es törésponti frekvenciával rendelkező felüláteresztő szűrővel szűrtem.



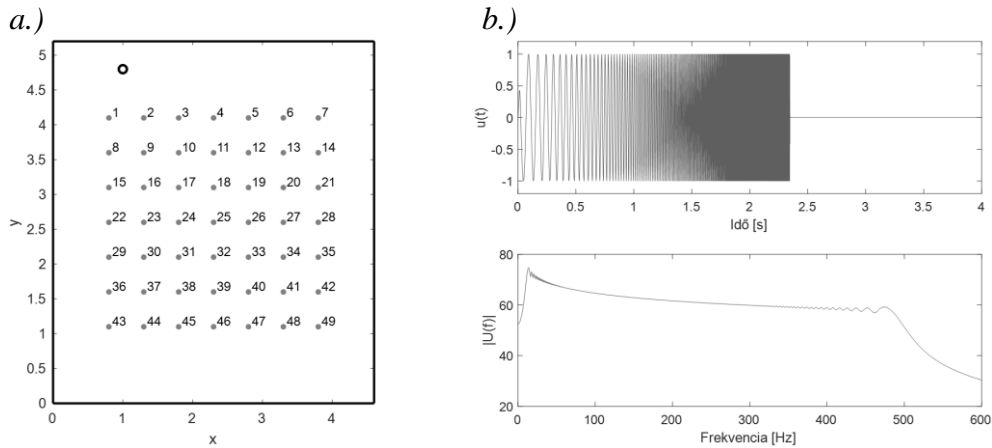
18. ábra: A szimulált terem gerjesztő szűrt Gauss-pulzus az a.) idő- és b.) frekvenciatartományban

A modális modell sajátfrekvenciáit a 3.1 fejezetben leírt algoritmus szerint $f_m = 200$ Hz-ig határoztam meg. Ahogy az a 19. ábrán is látható a szimulált módusok frekvenciája egy kicsit kisebb, mint az analitikus megoldásból számítottak. A frekvenciatengelyen fölfelé haladva ez a különbség folyamatosan növekszik.



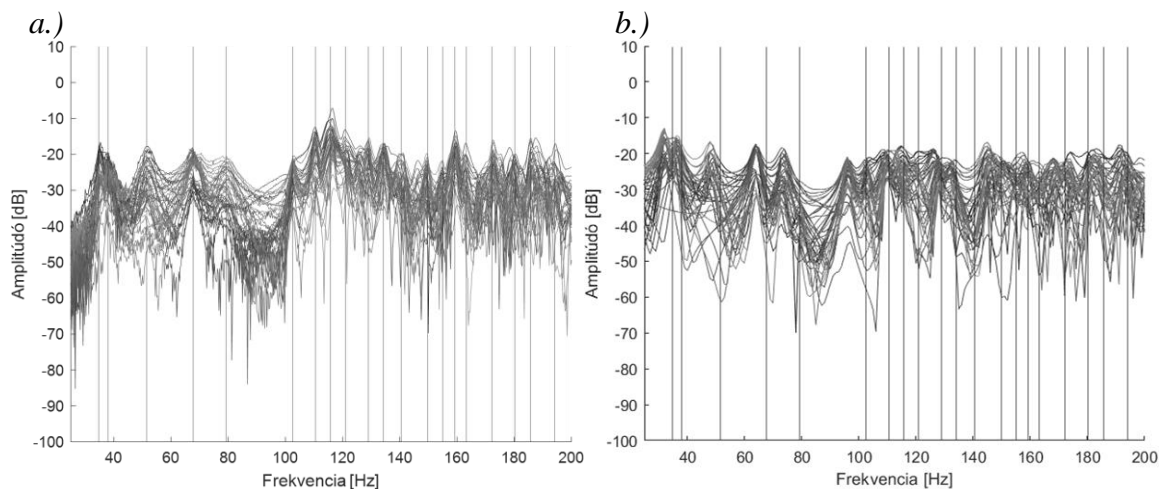
19. ábra: Folytonos vonallal a véges differenciák módszerével szimulált terem két pontja közötti frekvenciaválaszt, szaggatott vonallal a modális modell sajátfrekvenciáit jelölöm

A valós téglatest alakú terem mérését a BME I épület egyik tantermében hajtottam végre. A hangszórót a terem egyik sarkában helyeztem el, és egy 14 – 500 Hz-es sine sweep jellel gerjesztettem, $f_s = 44100$ Hz mintavételi frekvenciával és $N = 176400$ mintaszámmal. A hangszóró gerjesztésére adott választ 49 mikrofonpozícióban mértem a terem közepén.



20. ábra: a.) A valós terem mérésének az elrendezése. b.) A valós terem méréséhez felhasznált gerjesztőjel

A valós teremmel való összehasonlításhoz a szimuláció Δx hely- és Δt időfelbontását változtatlanul hagytam. A szimulált teremátvitelt a valós méréssel azonos hangszóró- és mikrofonpozíciókban határoztam meg, a fentebb bemutatott 200 Hz-es törésponti frekvenciával rendelkező Gauss-pulzus gerjesztést felhasználva. A valós és szimulált esetben is az egyes mikrofonpozíciókban mért jel és a gerjesztőjel frekvenciatartományba transzformált hányadosával határoztam meg az átviteleket. Mivel a valós terem falainak az elnyelési tényezője ismeretlen volt, ezért a szimulált teremben ezt az eredményeket összehasonlítva, közelítőleg tudtam megadni $\alpha = 0,1$ -re.



21. ábra: a.) valós és b.) a szimulált teremben mért átvitel a 49 mikrofonpozícióban, mindkét ábrán a mért terem rezonancia csúcsait jelölve

Ebben az esetben is megfigyelhető, hogy a szimulált rezonanciacsúcsok lejjebb helyezkednek el a valós teremben mértekkel, mely különbség a frekvenciatengelyen fölfelé haladva egyre növekszik, azonban a szimulált átvitel jellegre megegyezik a mért átvittel.

Az időtartománybeli véges differenciák módszerének az egyik legnagyobb előnye, hogy az általam vizsgált kisfrekvenciás tartományt megfelelő pontossággal szimulálja tetszőleges alakú terem mellett. Jelentős hátrányt jelent azonban a $K_{l,m,k}$ mátrix (15. ábra) konstruálása, melyet manuálisan megadni időigényes munka, különösképpen nem téglatest alakú termekre.

4. Aktív teremhang-kompenzáció

A 2.3 fejezetben bemutattam a terem rezonáns és reflektív viselkedéséből adódó problémákat, illetve a passzív akusztikai megoldásokat. Az irodalomkutatásom során megállapítottam, hogy a legelterjedtebb kisfrekvenciás passzív akusztikai elemek, mint a Helmholtz rezonátor vagy a membrános basszus csapda csupán egy keskeny frekvenciasávot képesek kontrollálni, ezért a teljes kisfrekvenciás tartomány lefedésére több ilyen elemet kell elhelyezni a teremben. A dolgozat fókuszában álló kis termek esetén a rendelkezésre álló hely miatt ez gondot okozhat ezért érdemes a terem modális viselkedéséből adódó problémákra aktív megoldásokat keresni. A 4.1 és 4.2 fejezetben bemutatom a terem több pontjában, a kisfrekvenciás tartományt kompenzáló aktív módszereket, majd ezt követően a 4.3 fejezetben a saját munkámat, a síkhullám alapú módszer időtartománybeli implementációját és vizsgálatának eredményeit prezentálom.

4.1. Kisfrekvenciás teremhang-kompenzációs módszerek rövid áttekintése

Az aktív kisfrekvenciás teremhang-kompenzációs módszerek több hangsugárzó elhelyezésével, illetve szűrők felhasználásával próbálják csökkenteni az teremmodusok által okozott egyenletlenséget a hangtérben. A teremhang kompenzációs módszerekre számos megoldás született az utóbbi évtizedekben [19], így az alábbiakban csak néhányat tekintek át röviden, a legelső és legfrissebb kutatási eredmények közül.

A teremben megjelenő rezonanciákat póluspárokkal modellezve, a teremben mért átvitelekre illeszthető egy csak pólusokból álló minimálfázisú átviteli karakterisztika. Az átviteli karakterisztika inverzét véve egy FIR szűrőt kapunk, mellyel a hangszóró jelét szűrve kompenzálhatóak a teremben kialakuló rezonanciacsúcsok. Ezzel a módszerrel a terem több pontjában is megvalósítható a kompenzáció, mivel a rezonanciákat modellező pólusok a terem globális, azaz helytől független tulajdonságát írják le. Az ötlet tehát, hogy a kompenzáció során ezeket a rezonanciacsúcsokat nyomjuk el a közös akusztikai pólusokat felhasználva [20].

Az első módszerek közé tartozik a modális kompenzáció, melynek fő célja nem a teremátvitel kisimitása, hanem a túl kicsi csillapítással rendelkező kisfrekvenciás teremmodusok lecsengési idejének a csökkentése. A mért modális paramétereiből egy korrekciós szűrő tervezhető, mely segítségével az adott módus kis csillapítását megnöveljük a pólusainak kicserélésével. A [21] forrás egy egyhangszórós és egy többhangszórós megoldást is bemutat.

Egy frissebb 2018-as kutatás FIR és IRR szűrőket nemlineáris optimalizálási eljárással becsült. Az optimalizálás célja a hallgatói pozíciók közötti szórás csökkentése és a teremátvitel laposságának elérése volt [22]. A cikk két időtartománybeli és egy frekvenciatartománybeli szűrőtervezési eljárást is bemutat, melyek közül mindhárom hatékonyan csökkentette a teremrezonanciákat, illetve a hallgatói pozíciók között fellépő különbségeket a hangtérben.

A terem kisfrekvenciás módusai által okozott negatív hatásokat ki lehet küszöbölni egy idővariáns dekorrelációs eljárással, az úgynevezett dinamikus diffúz jelfeldolgozással, egy 2019-ben megjelent kutatás szerint. A módszer hatékonyan csökkenti a hallgatói pozíciók közötti eltéréseket csupán egy mélynyomó használatával, azonban egy éles kompromisszum jelenik meg az algoritmus hatékonysága és hangszórók által lejátszott hang színezettsége között [23].

Az utóbbi években a mesterséges intelligencia több különböző tudományos területben, így a teremakusztikában is megjelent. Egy 2021-ben publikált cikk egy gépi tanulást felhasználó teremhang-kompenzációs módszert mutat be. A módszer célja, hogy a kompenzáció folyamatát automatizálja, ezzel elérve a minimális felhasználói beavatkozást [24].

4.2. Síkhullám alapú módszer

Mivel a munkám során egy síkhullám alapú módszert implementáltam és teszteltem a véges differenciák technikájával szimulált teremben, így először ebben a fejezetben bemutatom a termekben történő síkhullámú hullámterjedés feltételének levezetését, végül három síkhullám alapú teremhang-kompenzációs módszer működését részletezem.

4.2.1. Síkhullám alapú módszerek elméleti háttere

Elméletben, ha egy téglatest alakú terem hossza mentén egy bizonyos f_{plane} frekvencia alatt síkhullámú terjedést biztosítunk minden frekvencián azonos P_0 amplitúdóval, a terem teljes területén egységes, azaz kompenzált hangteret érünk el. Ezzel a módszerrel először [25] tudományos cikk foglalkozott részletesen, melyben fellehető a síkhullám-konstruálás technikájának levezetése.

Tekintsünk egy merev falú L_x széles, L_y hosszú és L_z magas téglatest alakú termet, melyet L darab hangszóró gerjeszt $q(\mathbf{r}_l, \omega) = q_l(\omega)$ forráserősséggel az \mathbf{r}_l pozícióban. Ekkor a (15) modális szuperpozíciót és a téglatest alakú terem modális paramétereit (2.2.3 fejezet) felhasználva, a hangnyomást az \mathbf{r} pozícióban az alábbi összefüggés adja meg:

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \sum_{l=1}^L q_l(\omega) \frac{p_{n_x n_y n_z}(\mathbf{r}_l) p_{n_x n_y n_z}(\mathbf{r})}{(k^2 - k_{n_x n_y n_z}^2) K_{n_x n_y n_z}}. \quad (44)$$

Feltételezzük, hogy a teremnek csak a hosszmenti, y irányú axiális módusait gerjesztjük, azaz csak azokat a $n_x n_y n_z$ számhármassokat vesszük figyelembe, ahol $n_x = 0$ és $n_z = 0$ minden $n_y \in \mathbb{Z}$ érték mellett. Ekkor a terem modális paraméterei:

$$k_{n_y}^2 = \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2$$

$$p_{n_y}(\mathbf{r}) = \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right)$$

lesznek, (44) pedig az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{l=1}^L q_l \frac{\cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y_l \right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right)}{\left(k^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \right) K_{n_y}} \quad (45)$$

ahol az ω -tól való függés jelölését elhagytam. Az L darab hangszóró egyik N darab felét helyezük el az $y_l = 0$ helyen lévő elülső falhoz, a másik $L - N$ darab felét pedig a szemben lévő $y_l = L_y$ helyen elhelyezkedő hátsó falhoz. Ekkor a (45) összefüggésben a hangszóró y_l pozíciójától függő tagok:

$$\cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} 0 \right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} L_y \right) = (-1)^{n_y}$$

lesznek. Ezeket visszahelyettesítve és a hangszórók szummáját kettéválasztva az elülső és a hátsó hangszórókra:

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right)}{\left(k^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \right) K_{n_y}} \sum_{a=1}^N q_a + \sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_y} \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right)}{\left(k^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \right) K_{n_y}} \sum_{b=N+1}^L q_b.$$

A [25] forrásra hivatkozva a két végtelen sorozat összege:

$$\sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right)}{\left(k^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \right) K_{n_y}} = L_y \frac{\cos(k(L_y - y))}{k \sin(kL_y)}$$

$$\sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_y} \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right)}{\left(k^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \right) K_{n_y}} = L_y \frac{\cos(ky)}{k \sin(kL_y)}$$

ahol az első összefüggés $y = 0$ és $y = 2L_y$ között, a második pedig $y = L_y$ és $y = L_y$ között érvényes. A sorozatok összegét behelyettesítve:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{L_y}{k \sin(kL_y)} \left[\cos(k(L_y - y)) \sum_{a=1}^N q_a + \cos(ky) \sum_{b=N+1}^L q_b \right]$$

majd a komplex számok Euler és trigonometrikus alakja közti

$$\cos(x) = \frac{(e^{jx} + e^{-jx})}{2}$$

kapcsolatot felhasználva, és az összefüggést átrendezve:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{L_y}{k \sin(kL_y)} \left[e^{jky} \left(\sum_{a=1}^N e^{-jkL_y} q_a + \sum_{b=N+1}^L q_b \right) + e^{-jky} \left(\sum_{a=1}^N e^{jkL_y} q_a + \sum_{b=N+1}^L q_b \right) \right] \quad (46)$$

egyenletet kapjuk a hangnyomásra. Az y tengely mentén terjedő síkhullám feltétele a frekvenciatartományban:

$$p(\mathbf{r}) = P_0 e^{-jky}$$

ahol P_0 egy konstans, így a (46) összefüggés e^{jky} együtthatójának nullának kell lennie a síkhullámú terjedés eléréséhez:

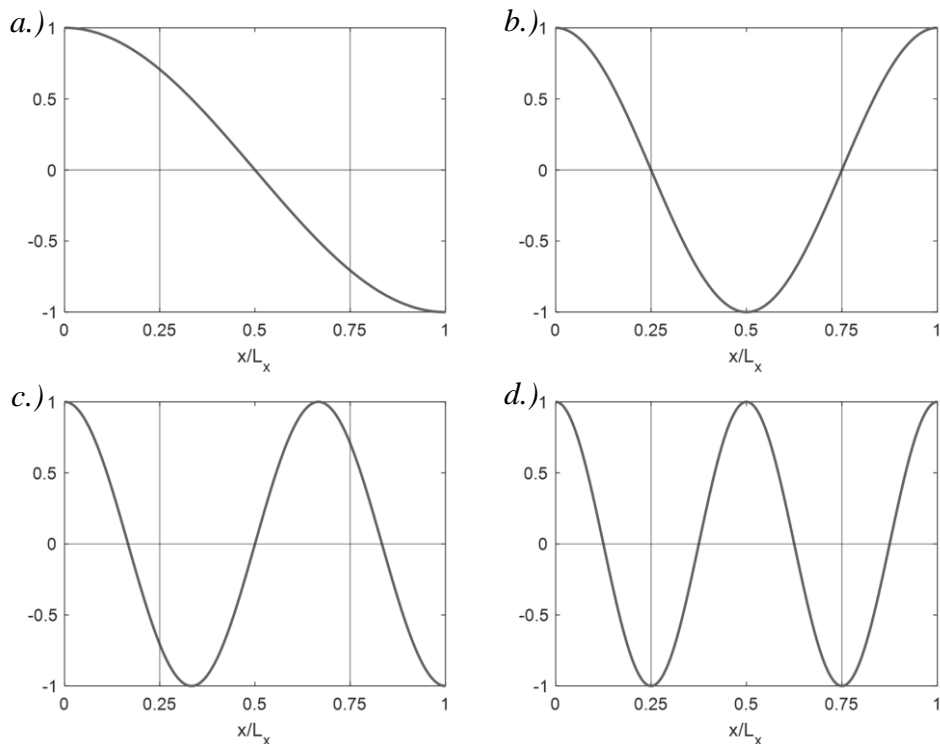
$$\sum_{b=N+1}^L q_b = -e^{-j\omega \frac{L_y}{c}} \sum_{a=1}^N q_a \quad (47)$$

ahol a $k = \omega/c$ behelyettesítéssel éltem. A fenti összefüggés szerint ahhoz, hogy az y tengely mentén síkhullámú terjedés jelenjen meg, a hátsó falnál elhelyezkedő hangszórók q_b forráserejét késleltetni kell, illetve a fázisát meg kell fordítani a szemben lévő hangszórók jeléhez képest. A t_d késleltetés mértéke az az idő, amennyi idő alatt a hang a terem egyik végéből a másikba ér az y tengely mentén, azaz $t_d = L_y/c$. A késleltetés és a fázisfordítás a hátsó falnál destruktív interferenciával éppen kioltja az elülső faltól érkező hanghullámot, ezzel a megszüntetve a hátsó falról történő visszaverődést [25].

A módszer működésének fizikai magyarázatához tekintsük az axiális módusok kialakulását az időtartományban. Ha a terem elülső végében egy axiális módus (24) sajátfrekvenciájával ($n_x = 0$ és $n_z = 0$) rendelkező harmonikus hangot játszunk le, akkor a hátsó falról visszavert és az elülső fal felől érkező hullám eredője egy állóhullámot, azaz módust fog alkotni. Ennek megfelelően a hátsó falról történő reflexiók megszüntetésével, megakadályozható az axiális módusok kialakulása. Tehát ha biztosítjuk, hogy egy bizonyos f_{plane} frekvencia alatt csak az axiális módusokat gerjesztjük, vagyis elérjük, hogy csak ezek a módusok okozzanak eltérést a hangtérben, akkor a fenti módszert alkalmazva f_{plane} alatt egy teljesen egyenletes hangtér állítható elő a terem teljes területén.

4.2.2. Kisfrekvenciás hangszórók optimális elhelyezése

A hangszórók optimális elhelyezéséhez tekintsük a terem hossza mentén kialakuló állóhullámokat (22. ábra).



22. ábra: Az x tengely mentén kialakuló axiális állóhullámok az $[n_x, n_y, n_z]$ számhármass a.) $[1,0,0]$, b.) $[2,0,0]$, c.) $[3,0,0]$, d.) $[4,0,0]$ értékei mellett

Az ábrát vizsgálva az alábbi megállapításokat tehetjük.

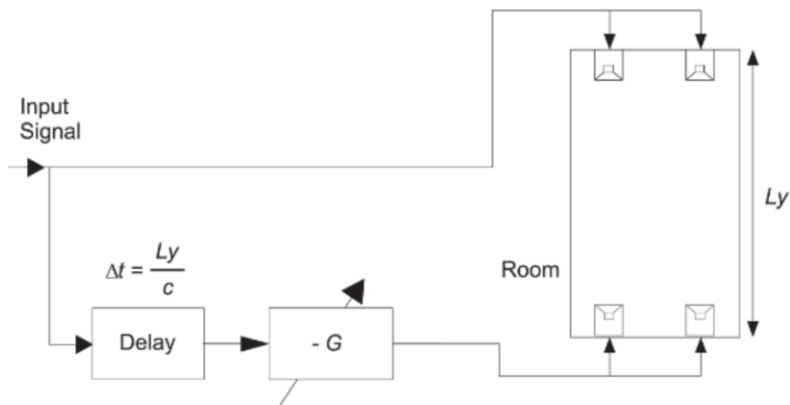
1. A terem x , y vagy z tengelyének a közepén a páratlan n_x , n_y vagy n_z rendű módusoknak nullpontja van.
2. A tengely közepétől egyenlő távolságokra a páratlan rendű módusoknak éppen ellentétes a fázisa.
3. Az első páros rendű, azaz $n_{x,y,z} = 2$ módusnak a tengely negyedénél és háromnegyedénél szintén nullpontja van.

Ha az állóhullám nullpontjába helyezünk hangszórót, vagy ha az állóhullámot ellentétes fázisban gerjesztjük akkor, az adott állóhullám nem fog kialakulni a teremben. A fenti megfigyelések alapján az optimális kisfrekvenciás hangszóró-elrendezés a következő, ha az y tengely mentén csak az axiális módusokat szeretnénk gerjeszteni a kisfrekvenciás tartományban. A terem két végébe kettő-kettő hangszórót $L_x/4$ és $3L_x/4$ pozíciókba, illetve $L_z/2$ magasságban elhelyezve ki tudjuk küszöbölni a páratlan n_x , n_y és n_z , illetve $n_x = 2$ rendű módusokat. Ezzel az elrendezéssel tehát elérhetjük, hogy kis termek esetén körülbelül $f_{\text{plane}} \approx 100 \text{ Hz}$ -ig csak páros rendű axiális módusokat gerjesszük [26], tehát a hangszórók optimális elhelyezésével, a hangszórók jelének módosítása nélkül számos módot ki tudunk küszöbölni, ezzel egy kisfrekvenciás teremhang-kompenzációt megvalósítva.

4.2.3. Késleltetés alapú módszer

A terem két végébe optimálisan elhelyezett egyenlő számú hangszórókkal az f_{plane} frekvencia alatt gerjesztett páros n_y rendű axiális módusokat (47) szerint késleltetéssel és fázisfordítással meg lehet szüntetni, a $q(\omega)$ forráserőségek becslése nélkül. Ezt a módszert a [27] forrás szerzője vizsgálta.

A [27] forrásban prezentált módszer kettő-kettő hangszórót helyezett el optimálisan az elülső és a hátsó falhoz a síkhullámok konstruálásához, a 4.2.1 fejezetben leírt késleltetést és fázisfordítást pedig egy késleltetővel és egy $-G$ szorzóval valósítja meg, ahol a $G < 1$ együtthatóval figyelembe vehető a hang terjedése során bekövetkezett amplitúdócsökkenés. A módszer működését szemléltető blokkdiagram a 23. ábrán látható.



23. ábra: Síkhullám alapú módszer késleltetéssel megvalósítva [27]

Ennek a megközelítésnek az előnye, hogy nem igényel teremakusztikai méréseket, illetve nincs szükség a hangszórók jelének szűrésére.

4.2.4. Optimális forráserőségek becslése

Az fentebb bemutatott késleltetés alapú módszernél robusztusabb megközelítés a hangszórók optimális $q(\mathbf{r}_l, \omega)$ forráserőségének becslése [25]. A fentebb leírtak szerint az \mathbf{r}_l pozíciókban lévő $l = 1, 2, \dots, L$ hangszóró felhasználásával a terem \mathbf{r}_m , $m = 1, 2, \dots, M$ pontjában előírva a síkhullámú terjedést egy bizonyos f_{max} frekvencia alatt, egy több bemenetű több kimenetű (MIMO) kompenzációt valósítunk meg:

$$p(\mathbf{r}_m, \omega) = \sum_{l=1}^L Z(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_l, \omega) q(\mathbf{r}_l, \omega) \quad (48)$$

ahol $p(\mathbf{r}_m, \omega)$ az m -edik terempozícióban a hangnyomás, $Z(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_l, \omega)$ az m -edik terempozíció és l -edik hangszóró pozíció közötti átvitel, $q(\mathbf{r}_l, \omega)$ pedig az l -edik hangszóró forráserősége ω frekvencián. A (48) egyenlet mátrixos alakba átírva:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Z}\mathbf{q}$$

ahol

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p(\mathbf{r}_1, \omega) \\ \vdots \\ p(\mathbf{r}_M, \omega) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega) & \dots & Z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_L, \omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_1, \omega) & \dots & Z(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_L, \omega) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q(\mathbf{r}_1, \omega) \\ \vdots \\ q(\mathbf{r}_L, \omega) \end{bmatrix}.$$

A cél a síkhullámú terjedés elérése a teremben, amely minden m pozícióra előírva:

$$p_d(\mathbf{r}_m, \omega) = P_0 e^{-jk(L_y - y_m)}. \quad (49)$$

ahol y_m az m -edik terempozíció elhelyezkedése az y tengely mentén. A síkhullámú terjedést az alábbi négyzetes hiba minimalizálásával érünk el:

$$e_{LS}(\omega) = \sum_{m=1}^M |p(\mathbf{r}_m, \omega) - p_d(\mathbf{r}_m, \omega)|^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d)^H (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) \quad (50)$$

ahol $(\)^H$ a komplex konjugált transzponálást jelöli. A (50) hiba minimumát a legkisebb négyzetek módszere adja meg:

$$\mathbf{q}_{LS} = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{p}_d.$$

A \mathbf{q}_{LS} vektorokat meghatározva minden $\omega \leq 2\pi f_{\text{plane}}$ frekvencián, megkapjuk a síkhullámú terjedés kialakulásához szükséges L darab hangszóró frekvenciatartománybeli forráserősségét.

A [28] cikk a \mathbf{q} forráserősség becslésének olyan egy továbbfejlesztett verzióját mutatja be, mely a kívánt $p_d(\mathbf{r}_m, \omega)$ hangnyomásnak csak az amplitúdóját írja elő, a fázisát pedig iteratív módon frissíti. A módszer első lépéseként a fentebb leírtak szerint írjuk elő a síkhullámú terjedést és becsljük a forráserősségeket, majd ezt követően kiszámoljuk a kompenzált hangnyomást. A következő iterációban a kívánt hangnyomás amplitúdóját változatlanul hagyjuk, azonban a fázisát a kompenzált hangnyomás fázisával frissítjük. Az algoritmus lépései az alábbiak:

1. Síkhullámú terjedés előírása:

$$p_d^{(0)}(\mathbf{r}_m, \omega) = P_0 e^{-jk(L_y - y_m)}.$$

2. A forráserősségek becslése:

$$\mathbf{q}_{IT}^{(i)} = (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{p}_d^{(i)}.$$

3. A kompenzált hangnyomás kiszámítása:

$$\mathbf{p}_{IT}^{(i)} = \mathbf{Z} \mathbf{q}_{IT}^{(i)}.$$

4. Az előírt hangnyomás fázisának frissítése a kompenzált hangnyomásával:

$$p_d^{(i+1)} = P_0 e^{-j\phi\{p_{IT}^{(i)}\}}.$$

5. Ugrás a 2. lépésre.

A fenti módszer gyorsan konvergál, így tipikusan körülbelül tíz iteráció elegendő. Ez az iteratív eljárás továbbra is a síkhullámú terjedést kényszeríti ki, azonban azokon a frekvenciákon, ahol ez nem érhető el, feladja a fázisra történő illesztést és helyette az amplitúdó pontosítására összpontosít. A hivatkozott cikkben közölt eredmények szerint az iteratív módszerrel hatékonyabb kompenzáció érhető el.

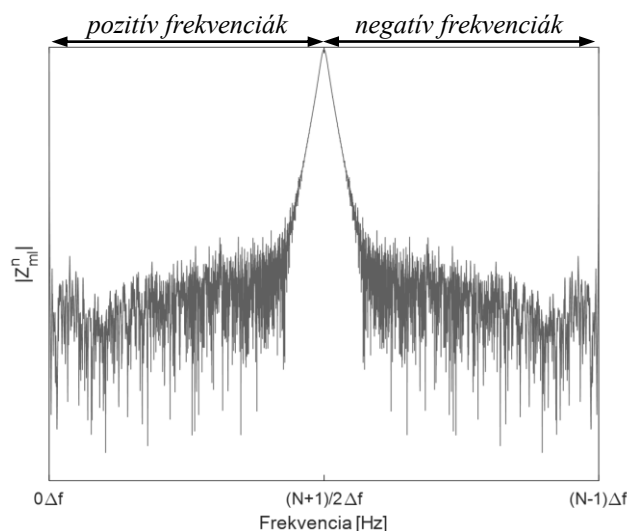
4.3. Síkhullám alapú módszerek időtartománybeli megvalósítása

Az aktív teremhang kompenzációs módszerek esetén fontos kérdés a gyakorlati alkalmazhatóság. A 4.2.2 és 4.2.3 fejezetben bemutatott módszerek nem, vagy csak minimális jelfeldolgozást igényelnek, így ezek gyakorlati megvalósítása nem jelent különösebb problémát, ellenben a 4.2.4 fejezetben tárgyalt forráserőségek becslésével, melyeket a kutatott irodalom csak a frekvenciatartományban, a termék modális modelljével szimulált környezetben vizsgált. Ezen munkámmal az említett problémára kívánok megoldást nyújtani, kétféle FIR szűrőtervezési eljárás bemutatásával, és az időtartományban szimulált vizsgálatokkal. Az első szűrőtervezési technika a digitális jelfeldolgozásban jól ismert ablakozás módszert használja fel [29], a második esetben pedig a szűrőegyütthatók direkt módon történő becslésére adok egy megoldást. A tervezéshez szükséges átviteleket a 3.3 fejezetben bemutatott szimulált termekben határoztam meg.

A tervezett szűrőket időtartományban, a szimulációs környezetben hasonlítom össze egymással és a 4.2.3 fejezetben bemutatott időtartománybeli módszerrel, egy téglatest és egy 'L' alakú teremre, illetve optimális és aszimmetrikus hangszóró-elrendezések mellett.

A MATLAB környezetben szimulált termekben f_s mintavételi frekvenciával, N mintaszámmal, azaz $\Delta f = f_s/N$ frekvenciafelbontással határoztam meg a terem összes L hangszóró és M terempozíciója közötti impulzusválaszt, (43) Gauss-pulzus gerjesztés mellett. A továbbiakban az $f_n = n\Delta f$ frekvencia jelölésére az n indexet fogom használni, illetve az N mintaszámot páratlannak feltételezem. Az impulzusválaszt diszkrét Fourier-transzformálva kapható meg a két pont közötti $Z(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_l, n)$ teremátvitel az $n = 0 \dots (N + 1)/2 - 1$ pozitív és az $n = (N + 1)/2 \dots N - 1$ negatív frekvenciák között (24. ábra). A szűrőtervezések során az előírt hangnyomásnak, a mért átviteleknek, illetve a becsült forráserőségeknek csak a számomra értékes információt tartalmazó pozitív frekvenciás részeit használom fel. A továbbiakban az átláthatóság érdekében az alábbi jelöléseket alkalmazom:

$$p(\mathbf{r}_m, n) = p_m^n, \quad Z(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_l, n) = Z_{ml}^n, \quad q(\mathbf{r}_l, n) = q_l^n.$$



24. ábra: Egy Z_{ml}^n átvitel amplitúdómenetének pozitív és negatív frekvenciái

4.3.1. Szűrőtervezés ablakozással

A tervezés egyes lépései a 25. ábrán követhetők nyomon. A 4.2.4 fejezetben bemutatott módszer szerint a q_l^n forraserősség becslése után a szűrőtervezés 1.) lépése azon f_{\max} frekvencia megválasztása ameddig a szűrőt tervezni kívánom. Ekkor a q_l^n forraserősségeknek csak az n' mintáit használom fel:

$$n' = 0 \dots \left\lfloor \frac{f_{\max}}{\Delta f} \right\rfloor = 0 \dots \frac{N' - 1}{2}, \quad (51)$$

ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ a lefele kerekítést jelöli. Fontos kiemelni, hogy (51) szerint a forraserősségekből mintákat hagytam el, tehát az új mintaszám:

$$N' = 2 \left\lfloor \frac{f_{\max}}{\Delta f} \right\rfloor + 1, \quad (52)$$

az új mintavételi frekvencia pedig:

$$f_s' = \left(2 \left\lfloor \frac{f_{\max}}{\Delta f} \right\rfloor + 1 \right) \Delta f = N' \Delta f, \quad (53)$$

azaz a Δf frekvenciafelbontást nem változtatom. Mivel a $q_l^{n'}$ forraserősségek csak a pozitív frekvenciákat tartalmazzák, így a 2.) lépés a $q_l^{n'}$ forraserősségek mögé a negatív frekvenciák fűzése:

$$Q_l^{n'} = \left[q_l^{n'} \left| \left(q_l^{(N'+1)/2 \dots 1} \right)^* \right. \right], \quad (54)$$

ahol $q_l^{(N'+1)/2 \dots 1}$ a $q_l^{n'}$ mintáinak fordított sorrendjét jelöli a DC komponens nélkül, $(\cdot)^*$ pedig a komplex konjugált művelet. Az l -edik szűrő (54) szűrőspecifikációját inverz diszkrét Fourier transzformálva (3.) lépés), majd a pozitív és negatív időket megcserélve (4.) lépés) kapom meg a FIR szűrő impulzusválaszát. A szűrő eddig a pontig az f_s' mintavételi frekvenciára van tervezve, amely eltér a mért rendszer eredeti f_s mintavételi frekvenciájától. Ezt a problémát az 5.) lépéssel, az interpolálással lehet kiküszöbölni. Az interpoláció következtében a szűrő f_{\max} tervezési frekvencia fölött nem fog áteresztetni, ez azonban a kisfrekvenciás hangszórók limitált áteresztőképességét szem előtt tartva nem jelent hátrányt. Az interpolációt a MATLAB beépített `interp1()` függvényével, illetve az 'spline' módszerrel valósítottam meg, melyre a MATLAB által kínált, különböző módszerek összehasonlítását követően esett a választás. Az interpoláció után a szűrő impulzusválasza:

$$h^i = \sum_{k=0}^K b_{lk} \delta_{i-k}, \quad (55)$$

ahol $h^i = h(i\Delta t)$ az impulzusválasz az i -edik időpontban, $K = N - 1$ a szűrő fokszáma, b_{lk} az l -edik hangszóró szűrőjének k -edik együtthatója, δ_{i-k} pedig az i időpontba eltoltság egységimpulzus. Az eddig tervezett szűrő fokszámát a mérés N mintaszáma határozza meg, azonban a tervezésnek ezen a pontján lehetőség van egy általam választott K_{fir} szűrőfokszámot megadni $(b_{\text{fir}})_{lk}$ szűrőegyütthatókkal:

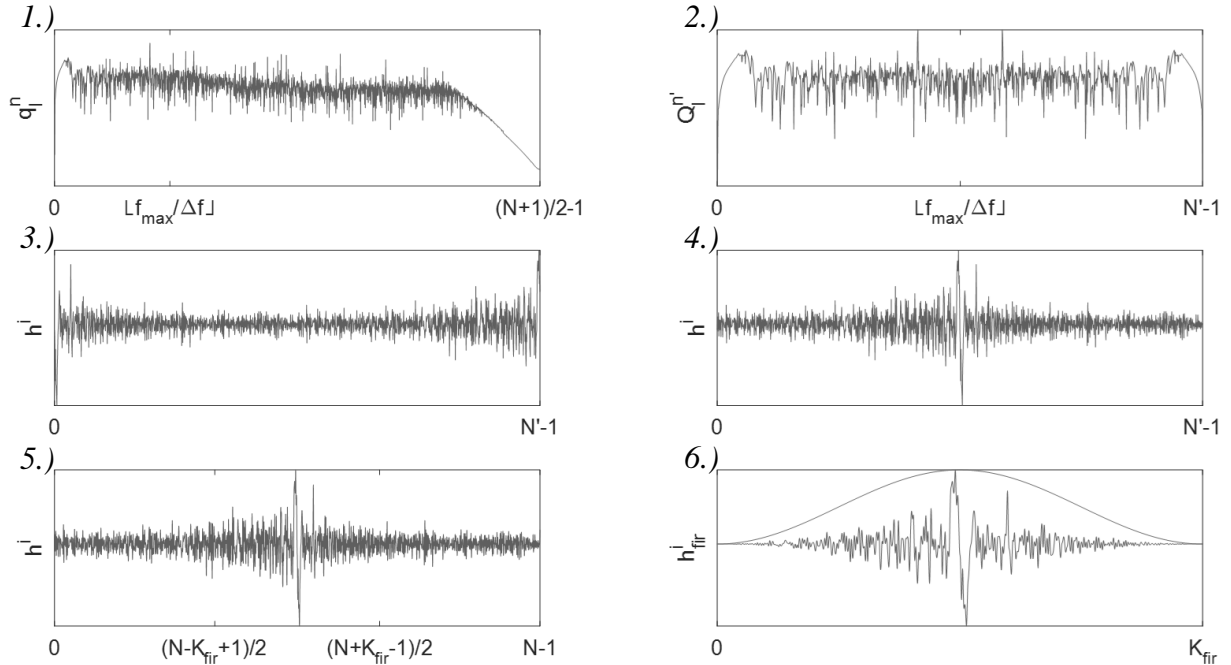
$$(b_{\text{fir}})_{lk} = b_{lk'},$$

$$(N - K_{\text{fir}} + 1)/2 \leq k' \leq (N + K_{\text{fir}} - 1)/2,$$

ahol az utolsó 6.) lépésként az (55) impulzusválasz középső, K_{fir} széles tartományát választom ki. A választott K_{fir} fokszerű szűrő impulzusválasza:

$$h_{\text{fir}}^i = \sum_{k=0}^{K_{\text{fir}}} (b_{\text{fir}})_{ik} \delta_{i-k}.$$

Végül az impulzusválaszban megjelenő szivárgásokat ablakozással csökkentem, úgy, hogy az impulzusválaszt megszorozom egy ablakfüggvénnyel, például Hanning-ablakkal.



25. ábra: FIR szűrőtervezés lépései: 1.) f_{max} kiválasztása, 2.) a pozitív és negatív frekvenciák összefűzése, 3.) inverz diszkrét Fourier-transzformáció 4.) negatív és pozitív idők megcserélése 5.) interpoláció az f_s mintavételi frekvenciára 6.) a kívánt FIR szűrő fokszerű kiválasztása és ablakozás

A fentebb bemutatott módszer egyik előnye, hogy a szűrőt a lehető legjobb $\Delta f = f_s/N$ frekvenciafelbontás mellett tervezem, de csak az általam választott f_{max} frekvenciáig. Másik előnye, hogy az 5.) lépésben kapott $K = N - 1$ fokszerű szűrőt eltávololva, könnyen tesztelhető egy tetszőleges $K_{\text{fir}} \leq K$ fokszerű szűrő, melyet a 6.) lépés szerint lehet meghatározni, tehát nincs szükség egy újabb szűrő tervezésére.

4.3.2. A szűrőegyütthatók becslése a legkisebb négyzetek módszerével

A FIR szűrők meghatározására alternatív módszer a szűrőegyütthatók direkt módon történő becslése. Ez esetben a (48) összefüggésben nem a q_l^n forrásrősségekkel, hanem az l -edik hangszóró FIR szűrőjének az átviteli karakterisztikájával módosítom a hangszóró jelét:

$$H_l(e^{j\vartheta_n}) = b_{l0} + b_{l1}e^{-j\vartheta_n} + b_{l2}e^{-2j\vartheta_n} + \dots + b_{l(N-1)}e^{-(N-1)j\vartheta_n} \quad (56)$$

ahol $\vartheta_n = 2\pi n \Delta f / f_s$ a diszkrét körfrekvencia. Az (56) átviteli karakterisztikát behelyettesítve a (48) összefüggésbe a forrásrősség helyére, és a $H_l(e^{j\vartheta_n}) = H_l^n$ jelölést alkalmazva:

$$\begin{aligned}
p_m^n &= \sum_{l=1}^L Z_{ml}^n H_l(e^{j\vartheta_n}) = Z_{m1}^n H_1^n + Z_{m2}^n H_2^n + \dots + Z_{mL}^n H_L^n \\
&= Z_{m1}^n (b_{10} + b_{11}e^{-j\vartheta_n} + \dots + b_{1(N-1)}e^{-(N-1)j\vartheta_n}) \\
&\quad + Z_{m2}^n (b_{20} + b_{21}e^{-j\vartheta_n} + \dots + b_{2(N-1)}e^{-(N-1)j\vartheta_n}) + \dots \\
&\quad + Z_{mL}^n (b_{L0} + b_{L1}e^{-j\vartheta_n} + \dots + b_{L(N-1)}e^{-(N-1)j\vartheta_n}). \tag{57}
\end{aligned}$$

Az előző módszerhez hasonlóan itt is megadható egy f_{\max} maximális tervezési frekvencia. Ekkor az előző fejezethez hasonlóan kapom meg a (51) frekvencia-indexet, (51) mintaszámot, és (53) mintavételi frekvenciát. Ennek megfelelően a diszkrét körfrekvencia:

$$\vartheta_{n'} = 2\pi f_{n'}/f_s'$$

lesz. Az (57) egyenlet minden m terempozícióra, n' frekvenciára és l hangszóró pozícióra felírható egy kompakt mátrixos alakba:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Z}\mathbf{b} \tag{58}$$

ahol

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{n'} \\ \mathbf{p}_2^{n'} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M^{n'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11}^{n'} & \mathbf{Z}_{12}^{n'} & \dots & \mathbf{Z}_{1L}^{n'} \\ \mathbf{Z}_{21}^{n'} & \mathbf{Z}_{22}^{n'} & \dots & \mathbf{Z}_{2L}^{n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{M1}^{n'} & \mathbf{Z}_{M2}^{n'} & \dots & \mathbf{Z}_{ML}^{n'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1k} \\ \mathbf{b}_{2k} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{Lk} \end{bmatrix}, \tag{59}$$

illetve

$$\mathbf{p}_m^{n'} = \begin{bmatrix} p_m^0 \\ p_m^1 \\ \vdots \\ p_m^{(N'-1)/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{lk} = \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{l(N'-1)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_{ml}^{n'} = \begin{bmatrix} Z_{ml}^0 & Z_{ml}^0 e^{-j\vartheta_0} & \dots & Z_{ml}^0 e^{-(N'-1)j\vartheta_0} \\ Z_{ml}^1 & Z_{ml}^1 e^{-j\vartheta_1} & \dots & Z_{ml}^1 e^{-(N'-1)j\vartheta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{ml}^{(N'-1)/2} & Z_{ml}^{(N'-1)/2} e^{-j\vartheta_{(N'-1)/2}} & \dots & Z_{ml}^{(N'-1)/2} e^{-(N'-1)j\vartheta_{(N'-1)/2}} \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Mivel a fenti (58) összefüggésben a \mathbf{p} kívánt hangnyomás és \mathbf{Z} mért teremátvitelek a 24. ábra szerint csak a pozitív frekvenciákat tartalmazzák továbbá komplex értéket, így az egyenletrendszer megoldva a \mathbf{b} szűrőegyütthatók szintén komplex számok lennének, ami helytelen megoldás. Azonban a valós \mathbf{b} értékek kikényszeríthetőek, ha a \mathbf{Z} mátrix és a \mathbf{p} vektor mögé fűzöm a negatív frekvenciákat, vagy ha az egyenletrendszer külön oldom meg a valós, illetve képzetes \mathbf{p} és \mathbf{Z} értékekre:

$$\mathbf{p}_{\text{ReIm}} = \mathbf{Z}_{\text{ReIm}}\mathbf{b}, \tag{61}$$

ahol

$$\mathbf{p}_{\text{ReIm}} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{p}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{p}\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{\text{ReIm}} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{Z}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{Z}\} \end{bmatrix}. \tag{62}$$

A (61) egyenletrendszer a legkisebb négyzetek módszerével megoldva kapom meg a valós \mathbf{b} együtthatókat:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{Z}_{\text{ReIm}})^{-1} \mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{p}_{\text{ReIm}}.$$

A szűrőtervezés többi lépése megegyezik az előző fejezet 4.) – 6.) lépésével.

A szűrőegyütthatók direkt módon történő becslésével, a 4.2.4 fejezetben leírt iteratív módszer az alábbiak szerint módosul:

1. Síkhullámú terjedés előírása:

$$\mathbf{p}_m^{n(0)} = P_0 e^{-j \frac{2\pi f_n}{c} (L_y - y_m)}.$$

2. A forráserekségek becslése:

$$\mathbf{b}_{\text{IT}}^{(i)} = (\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{Z}_{\text{ReIm}})^{-1} \mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{p}_{\text{ReIm}}^{(i)}.$$

3. A kompenzált hangnyomás kiszámítása:

$$\mathbf{p}_{\text{IT}}^{(i)} = \mathbf{Z} \mathbf{b}_{\text{IT}}^{(i)}$$

4. Az előírt hangnyomás fázisának frissítése a kompenzált hangnyomásával:

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = P_0 e^{-j\phi\{\mathbf{p}_{\text{IT}}^{(i)}\}}.$$

5. Ugrás a 2. lépésre.

Érdemes kitérni a (61) összefüggésben található \mathbf{Z}_{ReIm} mátrix méretére. A mátrixnak (59), (60) és (62) szerint $M(N' + 1)$ sora és LN' oszlopa van, azaz például $M = 49$ terempozíció, $L = 4$ hangszóró és $N' = 1999$ minta esetén 98000×9995 méretű lesz. Ekkora mátrixra a $\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{Z}_{\text{ReIm}}$ és $\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{p}_{\text{ReIm}}$ kiszámítása nagyon sok memóriát és futási időt igényelne a számítógép részéről. Azonban a \mathbf{Z} mátrix és \mathbf{p} vektor blokkos struktúrája miatt $\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{Z}_{\text{ReIm}}$ és $\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{p}_{\text{ReIm}}$ kisebb blokkonként is kiszámítható, ezzel jelentősen lecsökkentve a memóriai igényt és a futási időt:

$$\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{Z}_{\text{ReIm}} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{z}_{ml}^{n'}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{z}_{ml}^{n'}\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{z}_{ml}^{n'}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{z}_{ml}^{n'}\} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_{\text{ReIm}}^T \mathbf{p}_{\text{ReIm}} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{z}_{ml}^{n'}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{z}_{ml}^{n'}\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{p}_m^{n'}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{p}_m^{n'}\} \end{bmatrix}.$$

4.3.3. Síkhullám alapú módszerek összehasonlítása az időtartományban

Fontos kérdés a fentebb bemutatott eljárásokkal tervezett szűrőknek a gyakorlatban való alkalmazhatósága és robusztussága. Ennek vizsgálatához összehasonlítom:

- a.) a szűrés nélküli egyhangszórós elrendezést, téglalatest alakú terem esetén az 1-es számú, 'L' alakú terem esetén a 3-as számú hangszórót felhasználva,
- b.) a szűrés nélküli négyhangszórós elrendezést,
- c.) a 4.2.3 fejezetben bemutatott késleltetés alapú módszert,

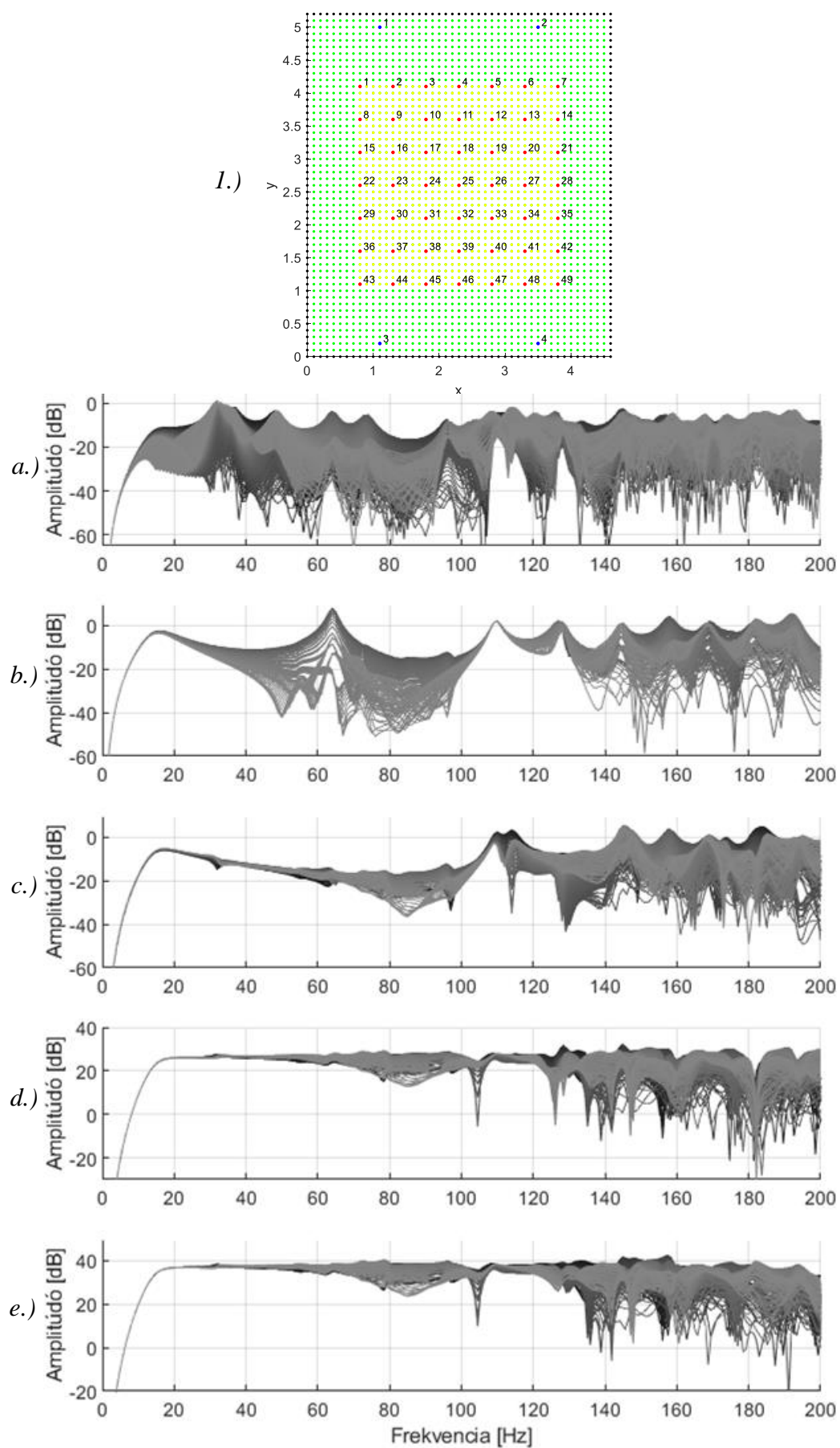
- d.) az iteratív technikával becsült forrásereőségekből az ablakozás módszerrel tervezett FIR szűrővel történő kompenzációt (4.3.1 fejezet),
- e.) az iteratív technikával becsült szűrőegyütthatókkal történő kompenzációt (4.3.2 fejezet).

Az említett módszereket az időtartománybeli véges differenciákkal szimulált teremben, négy elrendezés mellett tesztelem:

- 1.) téglatest alakú terem, optimálisan elrendezett hangszórókkal,
- 2.) téglatest alakú terem, aszimmetrikusan elrendezett hangszórókkal,
- 3.) 'L' alakú terem, optimálisan elrendezett hangszórókkal,
- 4.) 'L' alakú terem, aszimmetrikusan elrendezett hangszórókkal.

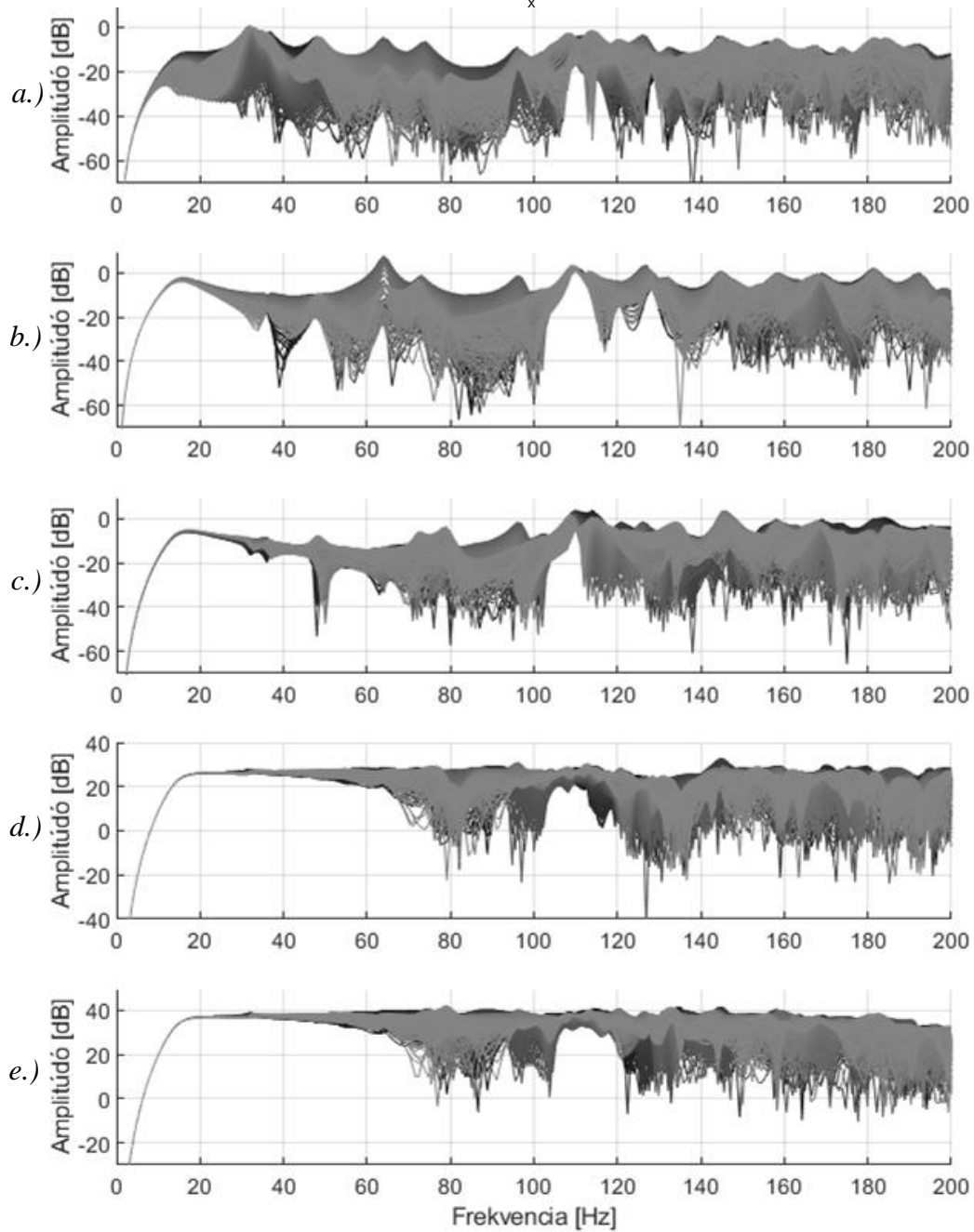
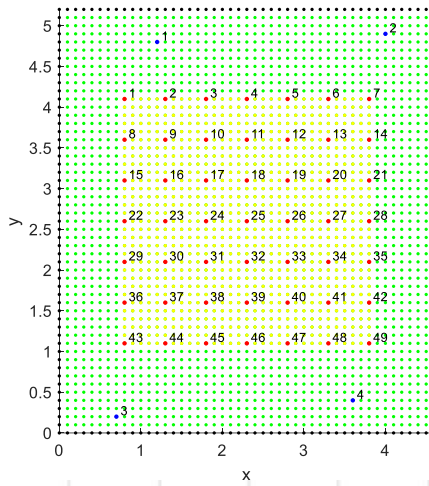
A szimulált terem $4,6 \times 5,2 \times 3$ m méretű, a falak elnyelési tényezőjére $\alpha = 0,1$, térbeli felbontásra $\Delta x = 0,1$ m, a mintavételezés és a gerjesztésként alkalmazott Gauss-pulzus paraméterei pedig megegyeznek a 3.3.5 fejezetben leírtakkal. A virtuális hangszórókat és mikrofonokat $z = 1,4$ m magasságban helyeztem el, így az alábbi ábrákon a termeknek ebben a magasságban elhelyezkedő x - y síkját ábrázolom, ahol a zöld pontok a terem belső pontjait, a fekete pontok a terem falait, a kék pontok az $l = 1 \dots L$ hangszórókat, a piros pontok az $m = 1 \dots M$ tervezéshez felhasznált pozíciókat, a sárga pontok pedig a vizsgált hallgatói területet jelölik. A FIR szűrőket $f_{\max} = 200$ Hz-re terveztem, a választott foksámok pedig minden esetben $K_{\text{fir}} = 2000$, mivel a szűrőfoksámot tovább növelve a maximális $K = N - 1 = 5888$ foksámig nem értem el számottevő javulást, illetve mivel az ennél kisebb foksámú szűrő már kisebb hatékonysággal működött. A hangszórók jelének szűrését időtartományban, konvolúcióval hajtottam végre a MATLAB `conv()` függvényét felhasználva.

Az alábbiakban a fentebb felsorolt 1.) – 4.) terem- és hangszóró-elrendezések, illetve az a.) – e.) módszerek mellett meghatározott frekvenciaválasz-függvényeket (*Frequency Response Function – FRF*) prezentálom. A frekvenciaválasz-függvényeket a Gauss-pulzus gerjesztésre kapott impulzusválasz diszkrét Fourier-transzformációjával határoztam meg, minden sárga színű hallgatói pozícióban. Az egyes módszerek kirajzolt eredményeit ugyanolyan széles dB sávban ábrázolom, így az ábrákat vizsgálva könnyebben összehasonlíthatóak.

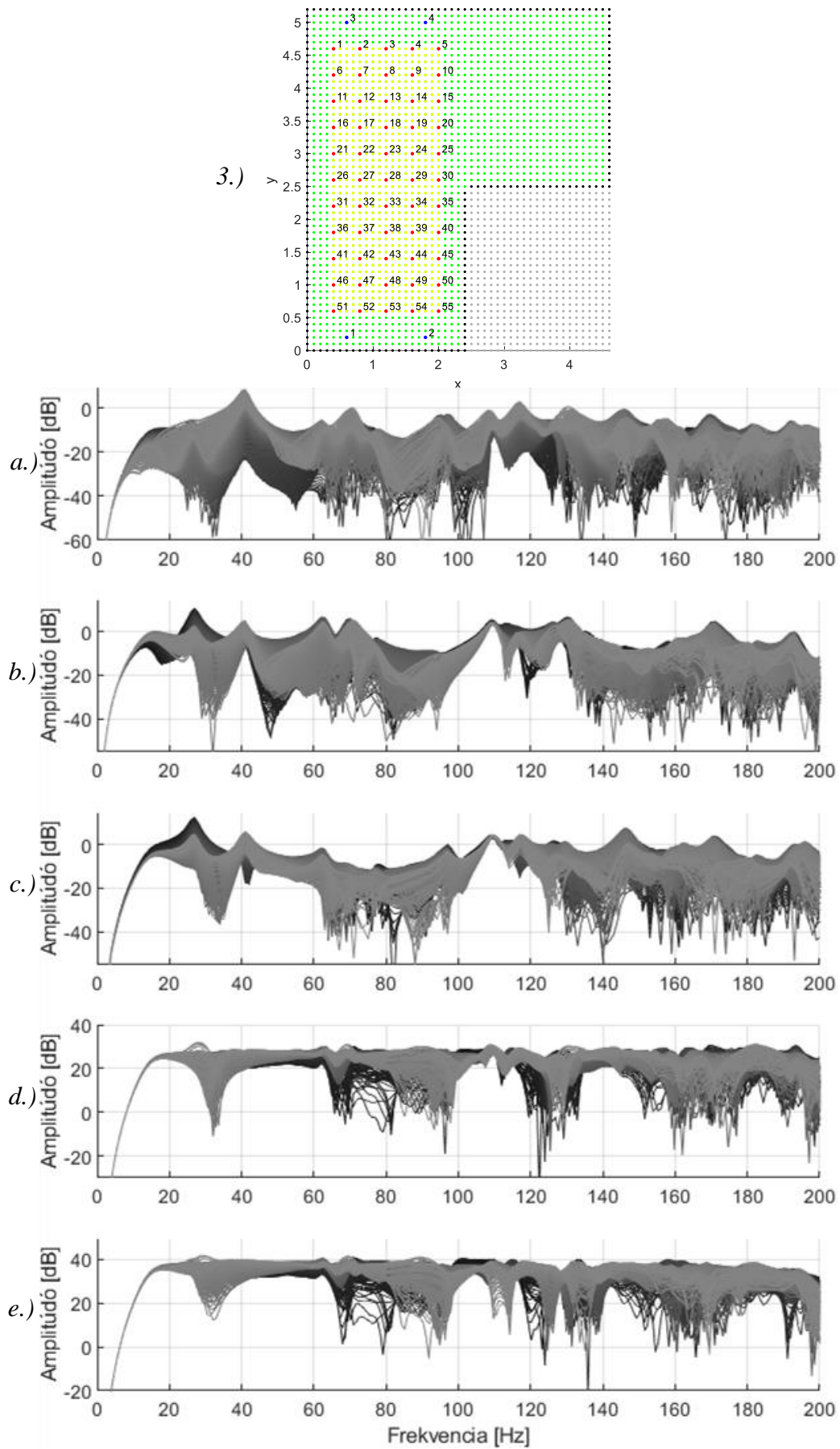


26. ábra: 1.) téglatest alakú terem, optimálisan elrendezett hangszórókkal, és a számított teremátvitel a sárga hallgatói pozíciókban a.) – e.) módszerek esetén

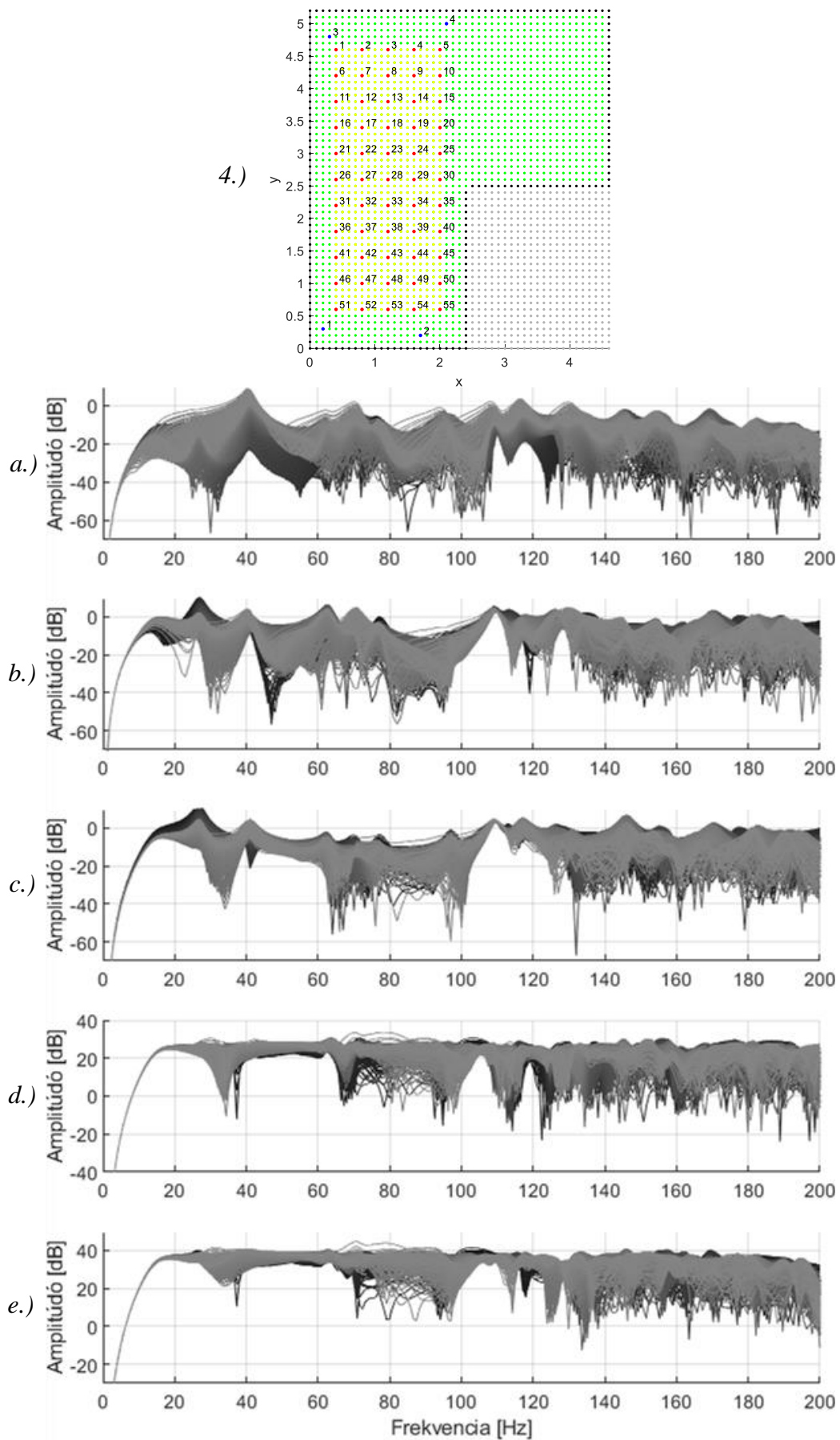
2.)



27. ábra: 2.) téglatest alakú terem, aszimmetrikusan elhelyezett hangszórókkal, és a számított teremátvitel a sárga hallgatói pozíciókban a.) – e.) módszerek esetén



28. ábra: 3.) 'L' alakú terem, optimálisan elrendezett hangszórókkal, és a számított teremátvitelek a sárga hallgatói pozíciókban a.) – e.) módszerek esetén



29. ábra: 4.) 'L' alakú terem, aszimmetrikusan elhelyezett hangszórókkal, és a számított teremátvitelek a sárga hallgatói pozíciókban a.) – e.) módszerek esetén

A módszerek hatékonyságának számszerű összehasonlítására kettő statisztikai mérőszámot adok meg. Az egyik a frekvenciaválasz-függvény amplitúdójának szórása átlagosan minden pontra (*Mean Magnitude Variance – MMV*):

$$MMV_{dB} = \frac{1}{n_p} \sum_{p=1}^{n_p} \sqrt{\frac{1}{n_f - 1} \sum_{i=f_{\text{alsó}}}^{f_{\text{felső}}} (x_{p,i} - \bar{x}_p)^2}$$

a másik pedig a pontok közötti amplitúdóeltérés szórása átlagosan minden frekvenciára (*Mean Spatial Variance – MSV*):

$$MSV_{dB} = \frac{1}{n_f} \sum_{i=f_{\text{alsó}}}^{f_{\text{felső}}} \sqrt{\frac{1}{n_p - 1} \sum_{p=1}^{n_p} (x_{p,i} - \bar{x}_i)^2}$$

ahol n_p a hallgatói pontok száma, n_f a minták száma $f_{\text{alsó}}$ és $f_{\text{felső}}$ között, $x_{p,i} = 20 \log_{10}(|FRF_{p,i}|)$ a frekvenciaválasz-függvény amplitúdója decibelben a p -edik hallgatói pozícióban és i -edik frekvencián, \bar{x}_p az $x_{p,i}$ átlaga a p -edik hallgatói pozícióban, \bar{x}_i az $x_{p,i}$ átlaga az i -edik frekvencián. Az átlagos amplitúdószórás (*MMV*) a teremátvitel laposságára, az átlagos térbeli szórás (*MSV*) pedig a hallgatói pozíciók közötti különbségre adnak mérőszámot. A teremhang-kompenzáció célja, hogy mindkét mérőszám minél jobban közelítse 0 dB-t a kompenzálendő frekvenciatartományban [18].

2. táblázat: Az átlagos amplitúdószórás (*MMV*) decibelben, $f_{\text{alsó}} = 20$ Hz és $f_{\text{felső}} = 200$ Hz között a különböző 1.) – 4.) teremrendezések és a.) – e.) kompenzációs módszerek mellett

	1.)	2.)	3.)	4.)	átlag
a.)	7,33	7,47	6,84	7,00	7,16
b.)	7,47	6,69	7,50	7,08	7,18
c.)	6,05	5,94	6,70	6,78	6,37
d.)	4,09	4,99	3,68	4,31	4,27
e.)	4,04	4,50	3,97	4,52	4,26

3. táblázat: Az átlagos térbeli szórás (*MSV*) decibelben, $f_{\text{alsó}} = 20$ Hz és $f_{\text{felső}} = 200$ Hz között a különböző 1.) – 4.) teremrendezések és a.) – e.) kompenzációs módszerek mellett

	1.)	2.)	3.)	4.)	átlag
a.)	6,09	6,08	5,96	6,07	6,05
b.)	4,87	4,92	5,21	5,32	5,08
c.)	3,45	4,33	4,61	4,63	4,26
d.)	2,59	3,43	3,02	3,54	3,15
e.)	2,49	3,05	2,99	3,27	2,95

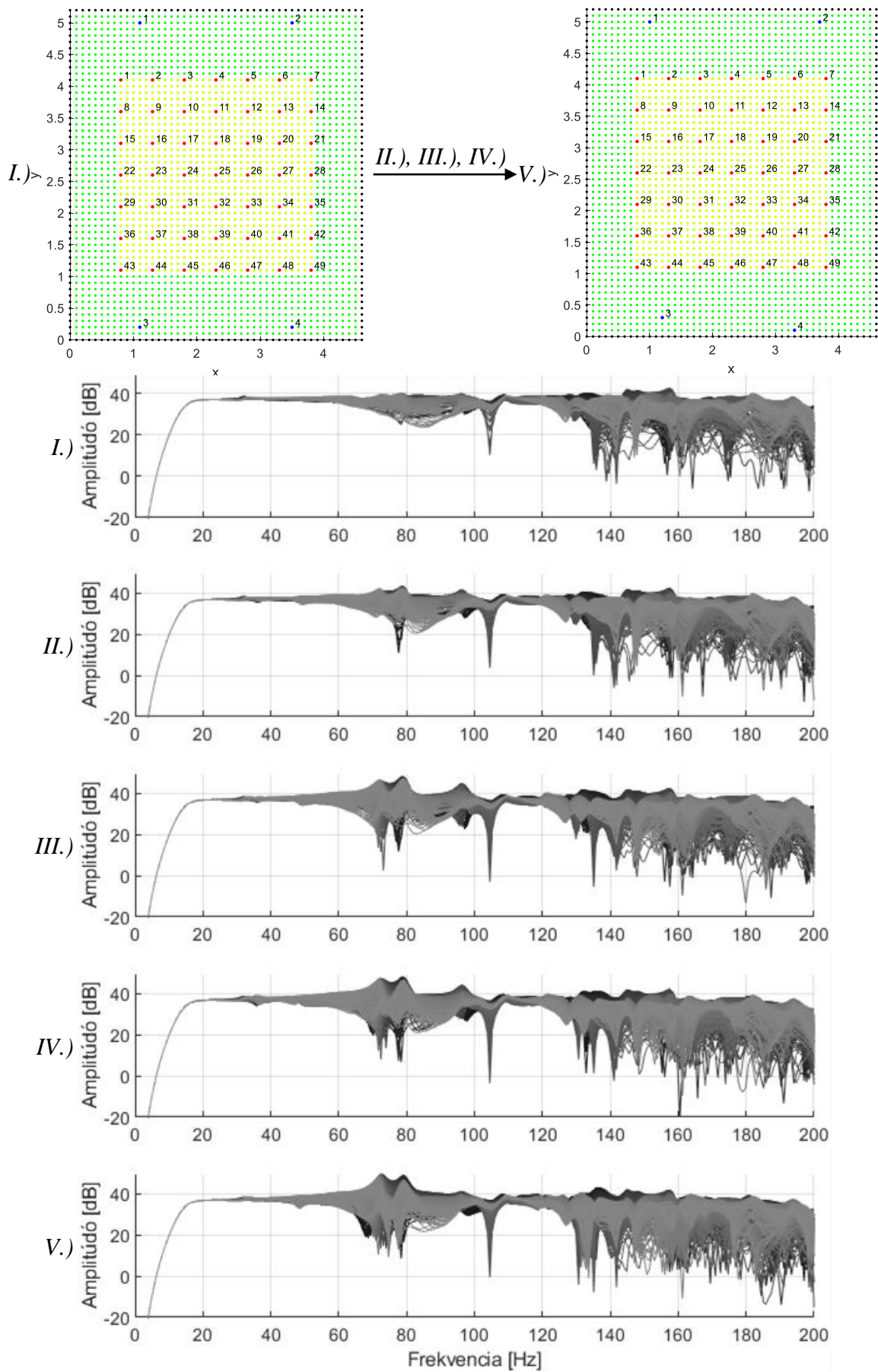
A fentebb bemutatott eredményeket vizsgálva megállapítható, hogy a kisfrekvenciás hangszórók optimális elhelyezésével, még jelfeldolgozás nélkül is javulást értem el a hallgatói pozíciók közötti hangnyomásbeli különbségek (*MSV*) átlagosan 1 *dB*-es csökkentésével, mivel ez az elrendezés a 4.2.2 fejezetben tárgyaltak szerint bizonyos kisfrekvenciás módusokat nem fog gerjeszteni.

Megfigyelhető, hogy a téglatest alakú terem és optimális hangszóróelrendezés esetén $f_{\text{plane}} \cong 100 \text{ Hz}$ frekvenciáig, azaz addig amíg csak az *y* tengely mentén kialakuló állóhullámokat gerjesztem, a késleltetés alapú *c.)* módszer megfelelő hatékonysággal működik, azonban az f_{plane} frekvencia fölött már nem fog kompenzálni. Továbbá látható, hogy a 2.) téglatest alakú terem aszimmetrikus hangszórókkal elrendezés esetén csak a 60 *Hz* alatti mély basszus tartományban kompenzált hatékonyan, a 'L' alakú teremben pedig egyáltalán nem alkalmazható.

Az két különböző módszerrel tervezett FIR szűrővel történő kompenzáció között nem tapasztaltam jelentős különbséget, körülbelül azonos hatékonysággal működnek. A téglatest alakú teremben optimális hangszóró-elrendezés mellett 120 *Hz*-ig elértem a teljes teremhang kompenzációt, tehát még az f_{plane} frekvencia fölött is kompenzálnak. Továbbá látható, hogy az 'L' alakú teremben és aszimmetrikus hangszóró-elrendezések esetén is javítható a hangtér a mély basszus tartományban. Ezzel a két módszerrel az átlagos amplitúdó- és térbeli szórást is 3 *dB*-el voltam képes csökkenteni, ami jelentős javulásnak számít.

A FIR szűrők tehát hatékony működést mutatnak a kisfrekvenciákon, azonban a robusztusság szempontjából fontos kérdés, hogy ha egy bizonyos hangszóró-elrendezés mellett meghatároztuk a teremátviteleket, majd ezeket az átvitel felhasználva tervezünk egy szűrőt, akkor a kompenzáció hatékonyságát hogyan befolyásolja, ha kicsit megváltoztatjuk a hangszórók pozícióját, a szűrőt viszont nem frissítjük. A felvetés jogos, mivel a való életben is előfordulhat, hogy a hangszórókat akarva-akaratlanul egy kicsit elmozdítjuk, kérdés tehát, hogy ekkor újra meg kell-e mérni a termet és új szűrőket kell-e tervezni. Ennek vizsgálatához az 1.) elrendezésben található hangszórók pozícióját módosítom maximum kettő $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ térbeli felbontással véletlenszerűen, a szűrőt viszont nem tervezem újra. Mivel a két szűrőtervezési eljárás a fenti eredmények alapján közelítőleg ugyanazt az eredményt adja, ezért most csak a 4.3.2 fejezetben tárgyalt, közvetlen szűrőegyüttható becsléssel tervezett szűrőt vizsgálom, az előzőekhez hasonlóan $K_{fir} = 2000$ választott fokszám mellett. A tesztelés során öt esetet vizsgálok:

- I.) optimális hangszóró-elrendezés
- II.) 1-es hangszóró elmozdítása a $-x$ irányba 0,1 *m*-rel,
- III.) majd a 2-es hangszóró elmozdítása *x* irányba 0,2 *m*-rel,
- IV.) majd a 3-as hangszóró elmozdítása az *x* és *y* irányba 0,1 *m*-rel,
- V.) majd a 4-es hangszóró elmozdítása a $-x$ irányba 0,2 *m*-rel és a $-y$ irányba 0,1 *m*-rel, ahol minden esetben az I.) esetre tervezett szűrővel kompenzálom.



30. ábra: A kiinduló I.) és a végső V.) elrendezés a teremben (felül), illetve a sárga hallgatói pozíciókban mért teremátvitel ugyanazon szűrővel de I.) – V.) hangszóró-elrendezésekkel (alul)

4. táblázat: Az átlagos amplitúdószórás (MMV) és átlagos térbeli szórás (MSV) különböző hangszóró-elrendezések, de ugyanazon szűrővel történő kompenzáció esetén

	I.)	II.)	III.)	IV.)	V.)
MMV	4,04	4,14	4,42	4,59	4,73
MSV	2,49	2,61	2,84	2,93	3,04

A 30. ábra és a 4. táblázat eredményeit megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy attól az elrendezéstől fokozatosan és kis mértékben eltérve, amelyre terveztem a szűrőt, romlik az módszer hatékonysága. Ez a romlás azonban csekély mértékű, a legrosszabb V.) esetben is csak 0,7 dB-lel nőtt az átlagos amplitúdószórás és 0,55 dB-lel az átlagos térbeli szórás.

Összefoglalva az eredményeket, az aktív síkhullámú teremhang kompenzációval, a kis termekben problémás kisfrekvenciás tartományt, különösen a mély basszus tartományt nagy hatékonysággal képesek vagyunk kezelni, akár aszimmetrikus hangszóró-elrendezés és nem téglatest alakú termék esetén is. A módszer hatékonysága csak kis mértékben romlik, ha hangszórók pozícióját minimálisan változtatjuk, de a szűrőegyütthatókat nem frissítjük. A módszer hátránya, hogy extra hangszórókat, csatornákat és digitális szűrést igényel, továbbá a szűrőtervezéshez szükséges nagy számú teremátvitel mérése időigényes munka.

5. Összefoglalás

Ebben a dolgozatban először bemutattam a teremakusztika elméleti hátterének releváns részeit, majd kitértem a termék akusztikáját illető problémákra. A legelterjedtebb passzív akusztikai megoldásokat bemutató irodalmakat kutatva megállapítottam, hogy a nagyfrekvenciás problémákat kezelő passzív elemek megfelelő hatékonysággal működnek, ellenben a kisfrekvenciás akusztikai elemekkel, melyek a nagy fizikai méretükből kifolyólag és az általuk kezelt keskeny frekvenciatartomány miatt kis termekben, például hangstúdiókban korlátozottan alkalmazhatóak. Erre a problémára kíván megoldást adni a szűrőket és extra kisfrekvenciás hangszórókat alkalmazó aktív teremhang-kompenzáció.

A dolgozatban röviden áttekintettem a terem egy területét kompenzáló kisfrekvenciás technikákat, majd részletesen bemutattam a síkhullám alapú módszereket. A síkhullám alapú módszereket kutatva, nem találtam olyan tudományos cikket, amely kitért volna az módszer időtartománybeli implementációjára és robusztussági vizsgálatára, ezért a munkámmal ezeket a problémákat kívántam orvosolni.

Ebben a dolgozatban két FIR szűrőtervezési eljárást prezentáltam, melyeket felhasználva az időtartományban is megvalósítható a síkhullám alapú kompenzáció. Ezek az eljárások a síkhullám alapú módszer továbbfejlesztett, iteratív becslési technikán alapuló verzióját veszi alapul.

Mivel a tervezett szűrőket az időtartománybeli véges differenciák módszerével szimulált teremben teszteltem, a dolgozat második nagy fejezetében részletesen bemutattam a szimulációs módszer elméleti hátterét, implementációját, illetve korlátait, majd a hullámegyenlet analitikus megoldásával és egy valós terem mérésével ellenőriztem.

A tervezett szűrőket és a késleltetés alapú módszert egy téglatest és egy 'L' alakú szimulált teremben hasonlítottam össze különböző hangszóró-elrendezések mellett. A teszt eredményeit vizsgálva megállapítottam, hogy a tervezett FIR szűrőket felhasználva nagy hatékonysággal kompenzálhatók a kis, akár nem téglatest alakú termék kisfrekvenciás tartománya, különösen a passzív elemekkel nehezen kontrollálható mély basszus tartomány. A módszerek összehasonlítása után arra a kérdésre kerestem a választ, hogy egy adott hangszóró-elrendezésre tervezett szűrő mennyit veszít a hatékonyságából, ha a hangszórók pozícióját kis mértékben módosítom, de a szűrőegységüket nem frissítem. A vizsgálatot egy téglatest alakú teremben végeztem, ahol az egyes hangszórókat egymás után fokozatosan elmozgattam. A vizsgálat eredményei alapján megállapítottam, hogy a tervezett szűrő egy kicsit más hangszóró elrendezés mellett is megfelelően működik.

Az implementált módszert a szimulációs környezetben tesztelve biztató eredményeket kaptam. A passzív akusztikai elemekkel nagyon nehezen kezelhető mély basszus

tartományban a síkhullám alapú módszer kiválóan működik. A passzív és aktív megoldásokat összehasonlítva, azokhoz a kis termekhez, ahol kifejezetten fontos a kompenzált hangtér a teljes hallható frekvenciatartományban, mint például professzionális hangstúdiókban, egy hibrid aktív-passzív akusztikai megoldást ajánlanék.

Fontos kérdés azonban, hogy a tervezett FIR szűrő hogyan színezi meg a hangszórók által visszaadott hangot, azaz hogyan befolyásolja a szubjektív hallgatói élményt. Ennek a kérdésnek a megválaszolása és a módszer valós környezetben való hatékonyságának a vizsgálata további kutatást igényel a jövőben.

Irodalomjegyzék

- [1] Z. Alabárdos, Szerző, *Akusztika az oktatásban – oktatás az akusztikában*. [Előadás] Akusztikai Szakmai Nap, 2022.
- [2] B. Addis, „A Brief History of Design Methods for Building Acoustics,” in *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*, 2009.
- [3] „Subwoofer,” Wikipedia, [Online]. Available: <https://en.wikipedia.org/wiki/Subwoofer>.
- [4] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, negyedik kiadás, London: Spon Press, 2000, pp. 6-8., 31-39., 59-90., 147-173..
- [5] P. Fiala, „Műszaki akusztika jegyzet,” BME Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék, Budapest, 2021.
- [6] A. Csákány, G. Flórik, P. Gnädig, L. Holics, A. Juhász, C. Sükösd és P. Tasnádi, *Fizika*, Budapest: Akadémia Kiadó, 2009, pp. 372-374., 635-637..
- [7] P. M. Morse és K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, New York: McGraw Hill, 1968, pp. 259-263..
- [8] J. G. Obádovics és Z. Szarka, *Felsőbb matematika*, harmadik kiadás, Budapest: Scolar Kiadó, 2017, pp. 478-485..
- [9] M. R. Schroeder és H. Kuttruff, „On Frequency Response Curves in Rooms. Comparison of Experimental, Theoretical, and Monte Carlo Results for the Average Frequency Spacing between Maxima,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1962.
- [10] T. J. Cox és P. D’Antonio, *Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, design and application*, második kiadás, Abingdon: Taylor & Francis, 2009, pp. 15-16., 196-197..
- [11] B. Fazenda és K. Griffiths, „Tuneable Pistonic Diaphragmatic Absorber,” [Online]. Available: <https://www.artnovion.com/educational/tpda>.
- [12] T. J. Cox, P. D’Antonio és M. R. Avis, „Room Sizing and Optimization at Low Frequencies,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2004.
- [13] S. Siltanen, T. Lokki és L. Savioja, „Rays or Waves? Understanding the Strengths and Weaknesses of Computational Room Acoustics Modeling Techniques,” in *the International Symposium on Room Acoustics*, 2010.

- [14] I. Faragó és R. Horváth, *Numerikus Módszerek*, második kiadás, Budapest: BME Természettudományi Kar, 2013, pp. 193-195..
- [15] B. Hamilton, *Finite Difference and Finite Volume Methods for Wave-based Modelling of Room Acoustics*, PhD thesis, The University of Edinburgh, 2016.
- [16] K. Kowalczyk és M. van Walstijn, „Room Acoustics Simulation Using 3-D Compact Explicit FDTD Schemes,” *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2011.
- [17] L. G. Kelly, *Handbook of Numerical Methods and Applications*, első kiadás, Addison-Wesley Publishing Company, 1967, pp. 218-219..
- [18] A. Celestinos és S. B. Nielsen, „Low-Frequency Loudspeaker–Room Simulation Using Finite Differences in the Time Domain—Part 1: Analysis,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2008.
- [19] S. Cecchi, A. Carini és S. Spors, „Room Response Equalization—A Review,” *Appl. Sci.*, 2018.
- [20] Y. Haneda, S. Makino és Y. Kaneda, „Multiple-Point Equalization of Room Transfer Functions by Using Common Acoustical Poles,” *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 1997.
- [21] A. Mäkivirta, P. Antsaló, M. Karjalainen és V. Välimäki, „Modal Equalization of Loudspeaker–Room Responses at Low Frequencies,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2003.
- [22] A. Celestinos, P. Brunet és G. Kubota, „Nonlinear optimization of sound field control at low frequencies produced by loudspeakers in rooms,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2018.
- [23] A. J. Hill és J. B. Moore, „Optimizing wide-area sound reproduction using a single subwoofer with dynamic signal decorrelation,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2019.
- [24] A. Celestinos, Y. Li és V. M. C. Lopez, „Automatic Loudspeaker Room Equalization Based On Sound Field Estimation with Artificial Intelligence Models,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2021.
- [25] A. O. Santillán, „Spatially extended sound equalization in rectangular rooms,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 2001.
- [26] A. Celestinos és S. B. Nielsen, „Optimizing placement and equalization of multiple low frequency loudspeakers in rooms,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2005.
- [27] A. Celestinos és S. B. Nielsen, „Controlled acoustic bass system (CABS) A method to achieve uniform sound field distribution at low frequencies in rectangular rooms,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2008.
- [28] B. Bank, „Full room equalization at low frequencies with asymmetric loudspeaker arrangements,” *J. Audio Eng. Soc.*, 2012.

[29] L. Balogh, I. Kollár, J. Németh, G. Péceli és L. Sujbert, *Digitális Jelfeldolgozás*, Budapest: BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék, 2008, pp. 104-106..