



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék

Szalagtekerecs homogenizált térszámítási modellje

TDK dolgozat

Készítette:
Kenderes Anett

Konzulensek:
Dr. Gyimóthy Szabolcs, Dr. Bilicz Sándor

2018. október 29.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Az alkalmazott szoftver	7
3. A végeselem-módszer alapjai	8
3.1. A súlyozott maradék elve	8
3.2. Formafüggvények	10
3.3. Lehetőségek a megoldás pontosítására	11
4. Réz szalagtekercs modellezése	13
4.1. Referenciamodell	13
4.1.1. A tekercs geometriai méretei	13
4.1.2. Áramlási tér	14
4.1.2.1. Alapegyenletek	14
4.1.2.2. Parciális differenciálegyenlet	15
4.1.2.3. Peremfeltételek	15
4.1.2.4. Eredmények	16
4.1.2.5. Referenciaként használt ellenállásértékek	16
4.1.3. Mágneses tér	17
4.1.3.1. Alapegyenletek	17
4.1.3.2. Parciális differenciálegyenlet	17
4.1.3.3. Peremfeltételek – „végtelenbe” kiterjesztett tartomány	18
4.1.3.4. Eredmények	19
4.2. Homogenizálás	20
4.2.1. Áramlási tér	20
4.2.1.1. Alapegyenletek, parciális differenciálegyenlet	20
4.2.1.2. Peremfeltételek	21
4.2.1.3. Áram számítása	21
4.2.1.4. „Hengeres” homogenizálás	21
4.2.1.5. „Spirális” homogenizálás	24
4.2.2. Mágneses tér	26
5. A modell validációja	27
5.1. Hatékonyságvizsgálat	27
5.2. Érzékenységvizsgálat	29
5.2.1. A modell paramétereinek meghatározása	29
5.2.2. Sobol-indexek	30
5.2.3. Polinomiális káosz sorfejtés	32
5.2.3.1. Polinomiális bázis felépítése	33
5.2.3.2. Polinom együttthatók meghatározása	34
5.2.4. Eredmények	35

6. Egy gyakorlati példa	39
7. Összefoglalás	41

Kivonat

A szupravezetőkkel kapcsolatos kutatások középpontjában manapság a többrétegű, második generációs HTS (High Temperature Superconducting) tekercsek állnak. A fellépő fizikai jelenségek végeselem-módszerrel történő modellezése kihívást jelent, mivel jellemzően nagy menetsűrűségű, karakterisztikus méretéhez képest igen kis szalagvastagsággal rendelkező tekercsokat kell vizsgálni eltérő mérettartományokon [1]. Az irodalomban számos homogenizált tekercsmodell létezik, melyek főképp a nagyfrekvenciás viselkedésre koncentrálnak (skin effektus, közelségi hatás) [2]. A jelenleg vizsgált fizikai probléma viszont ettől nagyban eltér. Ha a tekercs egy kicsiny területén megjelenő lokális hőmérsékletváltozás elég nagy ahhoz, hogy a szupravezetőt normál állapotba billentse, azaz az áramsűrűség meghaladja a kritikus értéket, az áram visszafolyik a stabilizátor rétegbe, ahol Joule-hő keletkezik. Majd ez a magasabb hőmérsékletű zóna terjedni kezd a tekercsen belül. Fontos mennyiségként van számon tartva a normál zóna terjedési sebessége (NZPV – Normal Zone Propagation Velocity), mely igen lassú, így nehezen detektálható. A fent leírt folyamat az ún. *quench*-jelenség, mely ritka, viszont tartós fennállás esetén jelentős mértékben roncsolja a szupravezető réteget. Ennek az anyagnak vezetőképessége erősen nemlineáris, illetve hőmérsékletfüggő is, ennek következtében egy csatolt hővezetési-elektromágneses problémával állunk szemben. A fentiekből viszont következik, hogy elektromágneses szempontból lehetséges a jelenséget stacionárius közelítésben tárgyalni.

A dolgozatban bemutatásra kerül egy újszerű homogenizálási eljárás, mely során egy lapos szalagtekercs részletes geometriájának helyettesítése egy homogén anizotrop vezetőképességű közeggel történt [3]. A korábbiakban születtek az irodalomban fellelhető eredmények, például kétdimenziós hengerszimmetrikus modell szalagszintű diszkretizálással [4], 2D-3D vegyes dimenziójú modell, ahol a vékony HTS-szalag belső peremfeltételként lett figyelembe véve [5], továbbá háromdimenziós anizotrop vezetőképesség-tenzor hengerkoordináta-rendszerben is reprezentálásra került [6][7]. Mindegyikben közös, hogy a teljes áramsűrűség az összes menetben előírt, a feszültség pedig integrálás útján került meghatározásra. Viszont nem készült még eddig a tekercs pályájára illeszkedő homogenizálás. A dolgozatban ismertetett modellben ez utóbbi megvalósult, illetve további előnyt jelent a közvetlenül alkalmazott feszültségkényszer is.

Kezdetben a szalagtekercs geometriájának homogenizálása volt a fő cél, illetve a stacionárius áramlási és mágneses tér pontosságának vizsgálata egy könnyen kezelhető, kisebb menetszámú és menetsűrűségű második generációs HTS-tekercs rézrétegének szimulációjának útján. Későbbiekben realizisztikusabb méretek mellett is szemléltetésre került a modell alkalmazhatósága. A végső cél természetesen a *quench*-jelenség szimulációjára.

Abstract

The multilayer second generation high temperature superconducting (HTS) coils have drawn a lot of attention in recent years, considering the research tendency of applied superconductivity. Modelling the physical behaviour with finite element method has always been a challenge because it is required to study densely wound coils with tape thickness much smaller than the characteristic length in different domain size [1]. Therefore a variety of simplified coil models have been developed based on certain homogenization principles. Many of those aim at modelling the high-frequency behaviour (including skin effect and proximity effect) of coils that are made of thin wire filaments [2]. The physical problem currently being investigated differs in many respects. When a local temperature rise created in a HTS coil is high enough to turn the superconductor from superconducting state to normal state, the transport current flowing in the HTS layer redistributes to the stabilizer in which Joule heating occurs. Then the high-temperature zone starts to propagate inside the coil. Normal propagation velocity (NZPV) is an essential value, which is very slow, thus the detection is quite difficult. The phenomena described above is the *quench*. These instabilities are unlikely, however the superconducting layer becomes potentially damaged in case of permanent existence. The conductivity of this material is highly non-linear, in addition temperature-dependent, consequently we have to face with a coupled electromagnetic and heat transfer problem. But it follows from the statements above, that in electromagnetic aspect it is possible to apply stationary approach.

In this work a new homogenization method is introduced, whereby the detailed geometry of the coil is substituted by specific homogenized medium with anisotropic conductivity [3]. Promising results can be found in the literature. Besides the 2-D axial symmetric FE models with tape-level discretization [4], there exist 3-D mixed dimensional models in which the thin HTS tape is represented by interior boundary condition [7]. Yet there are 3-D homogenized coil models based on anisotropic conductivity tensor, with the latter having diagonal form in a cylindrical frame [6][7]. Common to all these solutions is that the total current is prescribed in each turn, and the coil voltage is computed by integration. It seems that no one in the literature has utilized the underlying spiral geometry in such homogenization yet. Thus we derived a specific anisotropic conductivity tensor for this purpose. Moreover the method makes voltage constraint on the coil terminals directly available.

In the beginning, homogenizing the geometry of the coil, and studying the accuracy of the stationary current flow model and magnetic field distribution was the main task on a less densely wound second generation HTS coil with lower number of turns, which is easier to handle. Then the model was illustrated with more realistic parameters. The goal is naturally to simulate the *quench* phenomena considering the multilayer structure.

1. fejezet

Bevezetés

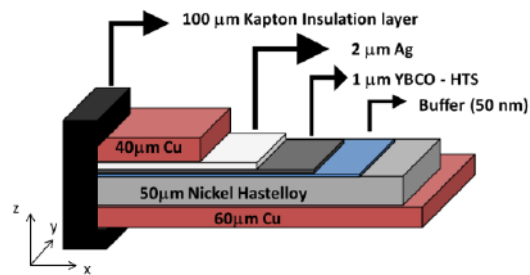
Szupravezetésnek nevezzük azt a jelenséget, melynek során a megfelelő tulajdonsággal rendelkező anyag elveszti ohmos ellenállását egy bizonyos, szobahőmérsékletnél jelentősen alacsonyabb hőmérsékleten. A hétköznapi vezetőanyagok többsége még 0 K közelében se mutat zérus elektromos ellenállást. Egy átlagos szupravezetőnél viszont 10 – 20 K közelében ez az érték hirtelen csökken nullára. Mivel ekkor Joule-veszteség nincsen, így nem meglepő, hogy fő alkalmazási területük az energiatároláshoz köthető, továbbá a legerősebb elektromágneseket is szupravezetőkből készítik pl. orvosi MRI-készülékekbe, illetve részecskegyorsítók nyalábjainak irányítására. Az igazán széleskörű elterjedésének azonban a megvalósítási költségek gátat szabnak, ugyanis nehézkes tartósan ennyire alacsony hőmérsékleti körülményeket biztosítani.

Nagy áttörést jelentett a magas hőmérsékletű szupravezetők (HTS – High Temperature Superconductor) felfedezése (1986). A jelenség elméleti hátterének korrekt leírása a mai napig várat magára. A magas hőmérsékletű szupravezető tekercsek sajátossága, hogy nagy kritikus áramsűrűséget képesek szállítani, az eddigieknél magasabb hőmérsékleten (40 K felett). Ennek megfelelően igen nagy mágneses térrel rendelkeznek. Üzemi hőmérsékleten tartásuk könnyebben kivitelezhető és kevésbé költséges, folyékony hélium helyett cseppfolyós nitrogénnel történik. Ugyanakkor hátrányuk, hogy a ma ismert ilyen tulajdonságú anyagok (pl. YBCO – ittrium-bárium-réz-oxid) törékeny kerámiák, így a gyárthatóság méretbeli korlátokba ütközik [8].

A második generációs HTS tekercsek szupravezető rétege tipikusan YBCO. A fent említett megvalósíthatósági korlátok miatt sok alkalmazás, mely nagy méreteket igényelne, késik. Előnyeik miatt viszont intenzív kutatás alatt állnak. A tekercsek üzemeltetésével kapcsolatos legnagyobb problémát a *quench* detektálása és kivédése jelenti. Az ellene történő védekezést nagyban segítheti a jelenség minél pontosabb ismerete, melynek kétségkívül leghatékonyabb eszköze a számítógépes szimuláció. Ezáltal *quench*-jelenség helyes, minél hatékonyabb modellezése időszerű feladatnak bizonyul, mely nemcsak az erős nemlinearitással jellemzett csatolt fizika, hanem a rendkívül eltérő mérettartományok miatt is nagy kihívást jelent. A centiméterekben mérhető nagyságrendű közepes tekercsátmérő melletti többrétegű struktúra jellemző méretei az 1.1. ábrán tekinthetők meg.

A dolgozat felépítése a következő: a második fejezetben a modellezéshez választott szoftver rövid ismertetése után a harmadik fejezetben a végeelem-módszer elméleti alapjainak bemutatása olvasható. Az utóbbi szükségességét az indokolja, hogy enélkül a numerikus

megoldást szolgáltató mechanizmus elve, illetve több számítás mögött rejlő motiváció is rejtve maradna. A negyedik fejezetben az újszerű homogenizálási eljárás kerül ismertetésre. Az áramlási és mágneses tér pontosságának vizsgálata után az ötödik fejezet következik, amely a modell validálásának kérdéskörével foglalkozik mind hatékonysági, mind a modell-paraméterek kimeneti érzékenységének tekintetében. A hatodik fejezetben egy realiztikusabb méretekkel rendelkező, gyakorlatban is alkalmazott tekercs modellezése is megtörténik ugyanezen elv alapján, szemléltetve a homogenizálás fő előnyét, mely abban rejlik, hogy az árameloszlás még a szalagvastagsághoz képest igen ritka végeselem-hálózás esetén is kellően homogén. Zárásként a munka értékelése következik, a távlati tervek felvázolásával.



1.1. ábra. A második generációs HTS-szalagtekercs rétegei [7]

2. fejezet

Az alkalmazott szoftver

A szimulációk elvégzéséhez a választás a Comsol Multiphysics 5.2-re esett, mely egy univerzális, fizikai folyamatok modellezésére kifejlesztett kereskedelmi végeelem-szoftver. Nagy előnye, hogy ún. modulokon, illetve almodulokon belül számtalan fizikai törvényszerűség került implementálásra, a jellemző differenciálegyenletekkel együtt, melyek összekapcsolása könnyen elvégezhető, továbbá nemlineáris problémák számítására is alkalmas. Hátránya, hogy kevésbé felhasználóbarát, helyes alkalmazásához pedig több elméleti ismeret szükséges, mint más végeelem-szoftverek esetében (pl. CST, ANSYS).

A modell felállítása fagráf-struktúrában végezhető. Ez magában foglalja többek között a geometria létrehozását, anyagválasztást, a szükséges fizika, gerjesztések, peremfeltételek megadását. Az egyenletmegoldáshoz a probléma természetéből adódóan választ a szoftver numerikus megoldó-algoritmust. Ehhez mind a differenciálegyenletet, mind a modelltartomány diszkrétizálni kell. Az előbbit elvégzi a program, az utóbbi hálózással történik, mely generálható automatikusan, vagy az alapparamétereket (pl. minimális és maximális méret) a felhasználó is beállíthatja [9]. A negyedik és hatodik fejezetben tetraéder háló, az ötödik fejezetben emellett hexaéder hálózás is alkalmazásra került.

A rézréteg szimulációjához az AC/DC modulra volt szükség [10]. Az áramlási tér modellezésére az *Electric Currents*, a mágneses tér számítására a *Magnetic Fields* almodul kapcsoltuk össze, mely úgy tehető meg, hogy az áramlási teret a mágneses almodulban beiktatott áramsűrűségként vesszük figyelembe. A differenciális Ohm-törvény alakja ekkor:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \vec{J}_{be}. \quad (2.1)$$

Tehát helyes eredményt a mágneses térre akkor kapunk, ha a vezetőképességet 0-nak vesszük.

Az 5. fejezet 5.2. pontjában tárgyalt érzékenységvizsgálat MATLAB környezetben történt, az UQLab Toolbox használatával [11].

3. fejezet

A végeelem-módszer alapjai

3.1. A súlyozott maradék elve

Legyen adott egy tetszőleges peremérték-feladat, melynek jellemző parciális differenciál-egyenlete (továbbiakban PDE):

$$\mathcal{L}\{u\} = f \quad (3.1)$$

ahol u skalármező, \mathcal{L} lineáris operátor, f pedig gerjesztés.

PDE esetén \mathcal{L} speciálisan differenciáloperátor, melynek általános alakja ¹:

$$\mathcal{L}\{u\} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + b(u). \quad (3.2)$$

Az egyenletet egyértelműen meghatározó peremfeltételek²:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D\{u\} &= u_0 \quad \Gamma_{D-n}, \\ \mathcal{L}_N\{u\} &= g \quad \Gamma_{N-n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A (3.1) egyenletből egyszerű átrendezéssel:

$$\mathcal{L}\{u\} - f = 0. \quad (3.5)$$

¹Látható, hogy a fenti alak időfüggetlen. A végeelem-módszer természetesen időfüggő esetekben is alkalmazható, ekkor egy lehetséges diszkretizálás az időlépés kifejezésére:

$$\frac{\partial c_j}{\partial t} = \frac{c_{j,t+\Delta t} - c_{j,t}}{\Delta t}.$$

Ekkor az egyértelmű megoldhatósághoz kezdeti feltételre is szükség van. A megoldásra számos implicit és explicit séma létezik. Illetve külön megemlítendő a szinuszos állandósult állapotbeli eset, amikor közvetlenül a frekvenciatartománybeli egyenletek kerülnek diszkretizálásra.

²A megfelelő peremfeltételek:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \quad \text{Dirichlet,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{Neumann.} \end{aligned}$$

Továbbá ez utóbbi általánosított formája:

$$\vec{n} \cdot (c \nabla u) + qu = g \quad (3.3)$$

Legyen a megoldás közelítő alakja: $\tilde{u} \cong u$.

Írjuk fel ezt a közelítő megoldást $\{v_j\} \in W$ bázisfüggvények lineárkombinációjaként:

$$\tilde{u} = v_0 + \sum_j c_j v_j. \quad (3.6)$$

A $\{v_j\}$ bázis elemeit úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön a Dirichlet-peremfeltétel, ekkor

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 \quad \Gamma_D\text{-n,} \\ v_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A közelítő alak megoldástól való eltérését jelöljük R -rel (*reziduum*), tehát

$$\mathcal{L}\{\tilde{u}\} - f = R. \quad (3.8)$$

A (3.7)-ből következik, hogy ez a maradéktag a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N\{\tilde{u}\} - g &= R_N \cong 0, \\ \mathcal{L}_D\{\tilde{u}\} - u_0 &= R_D = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ismeretes, hogy egy vektor akkor és csak akkor nullvektor, ha a bázis minden elemével vett skaláris szorzata nulla, azaz az összes vetülete zérus:

$$\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v}_i \vec{e}_i = \vec{0} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.10)$$

Ezt az analógiát kiterjesztve függvények által alkotott végtelen dimenziós ún. *Hilbert-térre* [12], két függvény skaláris szorzata:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1 f_2^* d\Omega. \quad (3.11)$$

Legyen W függvénytér egy másik bázisa $\{w_i\} \in W$, álljon végtelen számú elemből (pl. Fourier-sor). Használjuk fel ezt zérus értékű skalárszorzatok képzésére:

$$\mathcal{L}\{\tilde{u}\} - f = 0 \iff \langle \mathcal{L}\{\tilde{u}\} - f, w_i \rangle = 0. \quad (3.12)$$

A függvény skaláris szorzatára vonatkozó definícióval (3.11) megkaphatjuk az ún. *gyenge alakot*:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\{\tilde{u}\} - f) w_i^* d\Omega = 0, \quad \forall w_i. \quad (3.13)$$

Kihasználva, hogy már felbontottuk a közelítő megoldást $\{v_j\}$ bázis lineárkombinációira (3.6):

$$\left\langle \mathcal{L} \left\{ u_0 + \sum_j c_j v_j \right\} - f, w_i \right\rangle = 0. \quad (3.14)$$

Mivel a bázis szabadon megválasztható, emiatt a feladat a c_j együtthatók meghatározására egyszerűsödik. A lineáris operátorok zártak összeadásra, így a fenti egyenlet átrendezhető a következő alakba:

$$\sum_j c_j \langle \mathcal{L}\{v_j\}, w_i \rangle = \langle f, w_i \rangle - \langle \mathcal{L}\{u_0\}, w_i \rangle \quad (3.15)$$

Látható, hogy az alábbi alakú lineáris egyenletrendszerhez jutottunk:

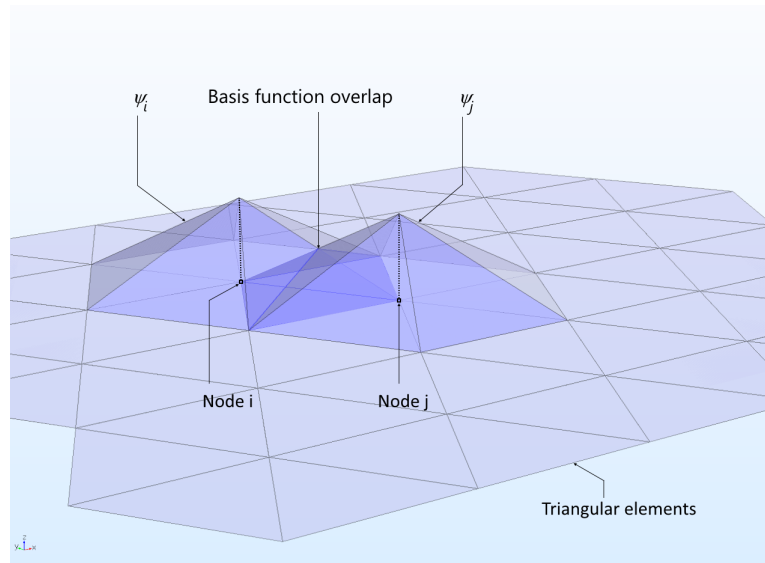
$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{b}}, \quad (3.16)$$

Az együtthatók,

$$\underline{c} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \quad (3.17)$$

kiszámítására számos megoldó-algoritmus létezik, ehhez pedig a $\{w_i\}$ bázis elemszámát korlátoznunk kell.

Mivel a bázisfüggvények szabadon megválaszthatóak, így koncentrálódhatnak kis területre is, ekkor a lineáris egyenletrendszer jellemző \underline{A} mátrix ritka, melyekkel történő számításra gyors algoritmusok léteznek. Az ún. *Galjerkin-módszer* alkalmazásakor $\{w_i\} = \{v_j\}$, azaz ekkor ugyanazt a függvényt használjuk sorfejtésre, mint a projekció ellenőrzésére. Az egyes integrálok akkor kerülnek kiértékelésre, ha a diszkrétizált modelltartomány kis területén a két bázisfüggvény közt átlapolódás következik be, mint ahogy látható a 3.1. ábrán sátor alakú bázisfüggvények esetén háromszöghálózott kétdimenziós modelltartományon.

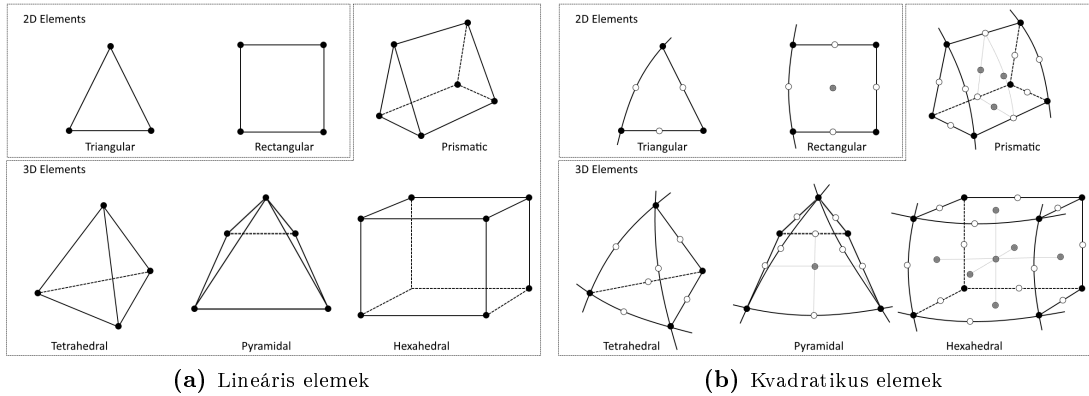


3.1. ábra. A bázisfüggvények átlapolódásának szemléltetése kétdimenziós esetben [13]

A fentiekből következik, hogy a végelem-módszerrel a geometria közelítése, különböző anyagi minőségű közegethatárok, és anyagjellemzők figyelembevétele is megoldott.

3.2. Formafüggvények

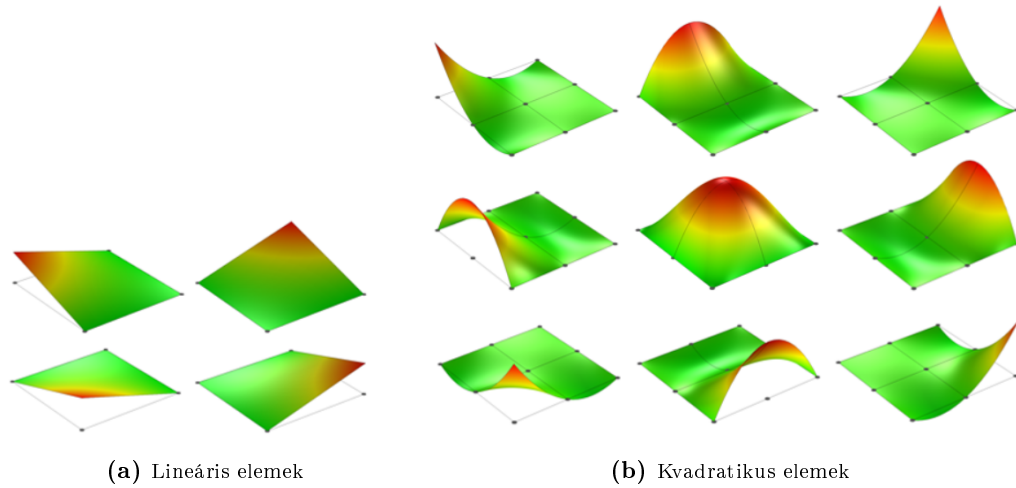
A geometria diszkrétizálására számos lehetőségünk van. A megoldandó probléma természetétől függően alkalmazhatunk egy-, két-, illetve háromdimenziós elemeket, erre néhány példa látható a 3.2. ábrán. Ezek felett értelmezzük az előző pontokban ismertetett bázisfüggvényeket, melyek tipikusan polinomok. A diszkrétizált geometria csomópontjainak száma elsősorban az alkalmazott elem típusától függ, de a bázisfüggvény fokszámából adódóan is szükséges lehet újabbak definiálására. Kvadratikus esetben például megkülönböztetünk Lagrange-típusú és ún. *serendipity* elemeket, melyek között a különbség, hogy a 3.2b. ábrán szürkével jelzett csomópontok az utóbbi esetben nincsenek értelmezve. Az egyes elemek felett értelmezett bázisfüggvények egy bizonyos csomópontban egy értéket vesznek fel, a többiben nullát. Ez alapján értelmezzük az ún. *szabadsági fokot*, mely azt fejezi ki, hogy egy adott elem csomópontjainak számát figyelembe véve ennek megválasztására hányféle lehetőségünk van. Erre láthatunk egy példát a 3.3. ábrán.



(a) Lineáris elemek

(b) Kvadrátikus elemek

3.2. ábra. Két- és háromdimenziós első- és másodfokú elemek [13]



(a) Lineáris elemek

(b) Kvadrátikus elemek

3.3. ábra. Kétdimenziós, négyszög feletti bilineáris és kvadrátikus Lagrange-elemek szabadsági fokai [14]

3.3. Lehetőségek a megoldás pontosítására

Legkézenfekvőbb lehetőség a hálónomítás. Végezhetjük ezt globálisan, csak hogy végtelenül sűrűre nem választhatjuk a hálóelemek nagyságát, illetve a futási idő is folyamatosan nő. A geometria általában nem kívánja meg az egyenletesen sűrű hálózást, amennyiben különböző mérettartományokon szükséges megoldani a PDE-t. Ekkor érdemes lokális hálónomítást alkalmazni, ezáltal a kisebb méretekkel rendelkező területeken a végelem-háló sűrűbbre állítható. További lehetőségként felmerül az adaptív hálózás, melynek során ott történik hálónomítás, ahol az iteratív hibabecslésnél a legnagyobb érték adódott.

A konvergenciát és a futási időt a hálóelemek típusának célszerű megválasztásával is lehet befolyásolni. Az előbbi fogalom azt fejezi ki, hogy a megoldás iteratív módon becsült hibája milyen ütemben éri el a kívánt értéket. A tetraéder elemek ún. *simplex* tulajdonságúak, az ezen alapuló hálógeneráló algoritmusok rugalmasabbak az általános geometriájú tartományok lefedésében. Mégis bizonyos esetekben érdemes olyan hálóelemet választani, melynél a geometria diszkretizálása kevesebb elemből áll, emiatt globálisan a szabadságfokok számát is lecsökkenthetjük. A futási idő azonban nem egyértelmű, hogy rövidebb lesz, például egy másodfokú hexaéder elem lokálisan több szabadságfokkal rendelkezik, mint

ugyanennek a tetraéderes megfelelője, így az előbbi esetben nagyságrendi tekintetben ez akár valamivel hosszabb is lehet.

Nem csak közvetlenül a hálózason tett módosításokkal hathatunk a megoldás pontosságára. Általánosságban elmondható, hogy a formafüggvények fokszámának növelésével a megoldás gyorsabb ütemben konvergál. Ugyanakkor a futási idő sokkal inkább nő, mint amely sűrűbb hálózásnál tapasztalható, így túl nagy fokszámot célszerűtlen alkalmazni.

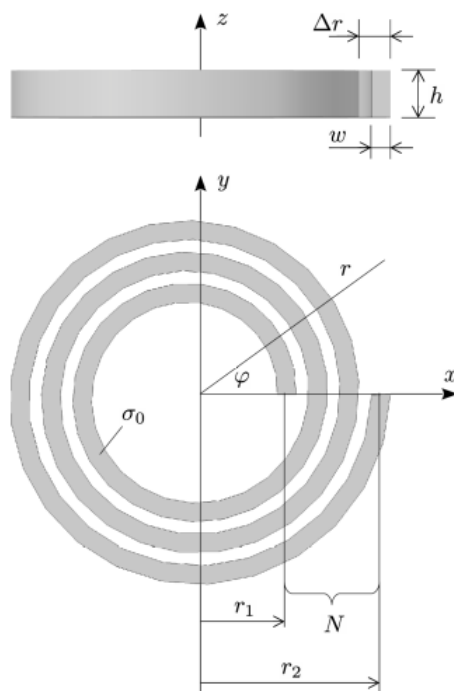
4. fejezet

Réz szalagtekercs modellezése

4.1. Referenciamodell

A 4. fejezetben a homogenizálási eljárás elvét fogjuk végigkövetni egy egyszerűbben kezelhető, kisebb sugárirányú méretekkel rendelkező, alacsonyabb menetszámú réz szalagtekercs példáján keresztül. Ehhez szükséges egy részletes geometriájú referenciamodell, annak érdekében, hogy a homogenizálás során kapott eredmények könnyen kiértékelhetőek legyenek.

4.1.1. A tekercs geometriai méretei



4.1. ábra. A tekercs geometriai méreteinek szemléltetése

Jelölés	Érték	Leírás
r_1	10 mm	belső sugár
r_2	20 mm	külső sugár
N_t	8	menetszám
w_t	1 mm	szalagvastagság
h_t	5 mm	szalagszélesség
Δr	1,25 mm	a spirál menetemelkedése
f	0,8	kitöltési tényező
σ_0	$5,7 \cdot 10^7$ S/m	vezetőképesség
R	0,05 m	levegő gömb sugara
D	0,02 m	„végtelen” perem vastagsága

4.1. táblázat. A vizsgált tekercs paraméterei

A vizsgálandó lapos szalagtekercs a 4.1. ábrán látható, paraméterei a 4.1. táblázatban kerülnek ismertetésre. Közülük néhány magyarázatra szorul.

A menetemelkedésével megkaphatjuk a sugár növekedését menetenként, azaz a szalagvastagság és két tetszőleges menet közti légrés méretének összegét. Ezt a következőképpen számítjuk:

$$\Delta r = \frac{r_2 - r_1}{N}. \quad (4.1)$$

A kitöltési tényező megadja a vezető keresztmetszet arányát a teljeshez képest:

$$f = \frac{w_t}{\Delta r}. \quad (4.2)$$

Az R és D modellspecifikus végeelem-paraméterek, későbbiekben a mágneses tér meghatározásához szükségesek (4.1.3.3. pont).

4.1.2. Áramlási tér

4.1.2.1. Alapegyenletek

Stacionárius áramlási probléma lévén az időbeli változásokat elhanyagoljuk, továbbá időben állandó áramsűrűséget feltételezünk.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (4.3)$$

Véve mindkét oldal divergenciáját:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (4.4)$$

mivel

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0. \quad (4.5)$$

Ezzel megkaptuk a folytonossági egyenlet időfüggetlen alakját.

A Faraday-féle indukciós törvény stacionárius esetben:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (4.6)$$

Az elektromos és áramlási tér közti kapcsolatot a differenciális Ohm-törvény teremti meg:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}. \quad (4.7)$$

4.1.2.2. Parciális differenciálegyenlet

Felhasználva az alábbi azonosságot:

$$\nabla \times \nabla \phi = \vec{0}, \quad (4.8)$$

örvénymentes tér esetén bevezethetjük az ún. skalárpotenciált:

$$\vec{E} = -\nabla \phi. \quad (4.9)$$

A (4.4), (4.9), és a (4.7) egyenlet felhasználásával:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (4.10)$$

Homogén, lineáris, izotrop vezetőképesség esetén a megoldandó differenciálegyenlet:

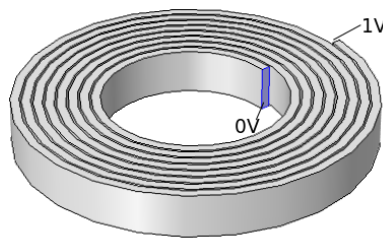
$$\Delta \phi = 0. \quad (4.11)$$

4.1.2.3. Peremfeltételek

A tekercset célszerűen feszültség rákapcsolásával gerjesztjük. Az így adódó Dirichlet-peremfeltételek (4.2. ábra):

$$\phi_1 = 0, \quad (4.12)$$

$$\phi_2 = \phi^+ = 1V. \quad (4.13)$$



4.2. ábra. A tekercs feszültséggerjesztése

A környezet levegő, így feltesszük, hogy benne áram nem folyik, azaz

$$\vec{n} \cdot \vec{J} = 0, \quad (4.14)$$

ahol \vec{n} az aktuális felületelem normálvektora.

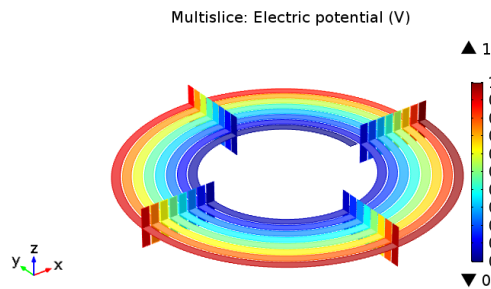
Ennek megfelelően a tekercs további felületeleire homogén Neumann-peremfeltételt írunk elő:

$$\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (4.15)$$

4.1.2.4. Eredmények

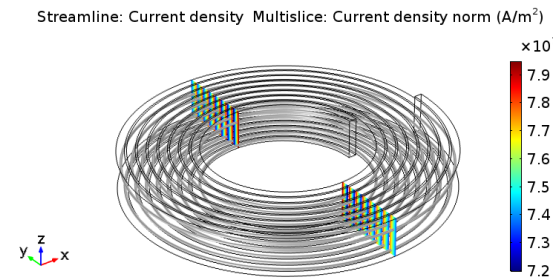
Meghatároztuk a megoldandó differenciálegyenletet és megadtuk a szükséges peremfeltételeket. Az egzisztencia és unicitás tétele értelmében a megoldás létezik és egyértelmű.

A differenciálegyenlet teljes tartományra történő megoldása során közvetlenül a potenciáltér adódik. Ennek szemléltetése a 4.3. ábrán látható.



4.3. ábra. A tekercs elektromos potenciáltere

Az áramlási teret tekintve (4.4. ábra) megfigyelhető, hogy az áramsűrűség kívülről befele növekszik menetenként. Mivel egy menet külső és belső sugara különböző, így ez nem meglepő.



4.4. ábra. A tekercs áramlási tere

4.1.2.5. Referenciaként használt ellenállásértékek

A tekercs l hosszára közelítő formulát adhatunk, amennyiben minden menetet kör alakúnak veszünk. Ekkor az egyes menetek sugarai számtani sorozatot alkotnak, az eredő kerület:

$$l \approx 2\pi(R_1 + R_2 + \dots + R_N) = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) N. \quad (4.16)$$

A tekercs ellenállására ezáltal egy igen pontos analitikus összefüggést kaphatunk:

$$R_0 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{l}{h_t w_t}. \quad (4.17)$$

A 4.1. táblázatban szereplő paraméterekkel az ellenállásérték:

$$R_0 = 2,6456 \text{ m}\Omega. \quad (4.18)$$

A Comsol 5.2 szoftverben létrehozott végeelem-modellben ezt a következőképp számíthatjuk:

$$R = \frac{\phi^+}{I} = 2,6447 \text{ m}\Omega \quad (4.19)$$

A különbség elhanyagolható.

4.1.3. Mágneses tér

4.1.3.1. Alapegyenletek

A feltételek megegyeznek a 4.1.2.1. pontban leírtakkal. Jelen esetben a mágneses teret vizsgáljuk. Ezt külön-külön azért tehetjük meg, mert időfüggetlen esetben az elektromos és mágneses térre vonatkozó egyenletek között egyirányú csatolás van.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (4.20)$$

A mágneses Gauss-törvény:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.21)$$

A közeg lineáris, így a mágneses indukció és térerősség közt a következő kapcsolat áll fent:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (4.22)$$

ahol a közeg permeabilitása $\mu = \mu_r \mu_0$.

A tekercs anyagát mágneses szempontból nem szükséges különbözőnek tekinteni a levegőtől, tehát mindkét esetben $\mu_r = 1$, azaz

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.23)$$

a teljes modelltartományon.

4.1.3.2. Parciális differenciálegyenlet

Kihhasználva a $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ vektoranalitikai azonosságot, bevezethetjük az ún. vektorpotenciált

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4.24)$$

A (4.20), (4.21) és a (4.23) felhasználásával:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}. \quad (4.25)$$

Mivel mindkét közeg homogén, így a parciális differenciálegyenlet alakja:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (4.26)$$

Felhasználva a vektoriális Laplace-operátor definícióját:

$$\Delta \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}), \quad (4.27)$$

a (4.26) egyenlet bal oldala a következő alakba írható át:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (4.28)$$

Ismeretes, hogy egy vektormezőt egyértelműen meghatároz a divergenciája és rotációja. A (4.24) egyenlettel megadtuk az A vektormező rotációját. Divergenciájáról még nem nyilatkoztunk. Tehát mértékválasztásra van szükségünk.

A Coulomb-mérték használatával:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (4.29)$$

a megoldandó differenciálegyenlet:

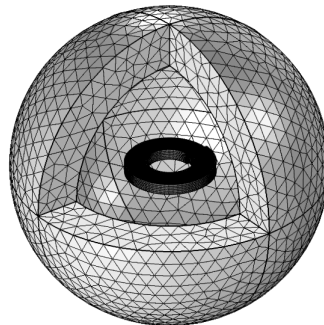
$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (4.30)$$

4.1.3.3. Peremfeltételek – „végtelenbe” kiterjesztett tartomány

A véges energiamennyiség miatt a tekercstől távolodva a mágneses tér lecseng, azaz abszolútértékben nullához konvergál. A Gauss-törvényből (4.21) következik, hogy a mágneses teret önmagukban záródó erővonalak jellemzik, így egy végtelen nagynak tekinthető perememen jó közelítéssel csak tangenciális komponenssel rendelkezik. Ennek előírását nevezzük mágneses falnak, amikor

$$\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0}. \quad (4.31)$$

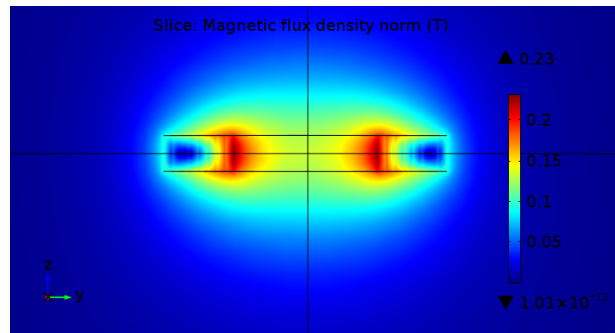
A Comsolban van arra lehetőség, hogy egy véges méretű tartomány peremén olyan speciális feltételeket írjunk elő, amelyek a végtelenül távol lévő pontokat leképezik egy véges, a modellezni kívánt objektummal összemérhető méretű gömb felszínére. Ezáltal egy olyan aszimptotikus peremfeltételt adunk meg, mely egy véges, D vastagságú réteget úgy kezel, mintha a modelltartomány végtelen nagy lenne, azaz nagyságrendileg nagyobb, mint a tekercs méretei [15]. Az ennek megfelelően megadott modelltartomány a 4.5. ábrán tekinthető meg.



4.5. ábra. Modelltartomány és végeelem-háló a tekercs mágneses terének vizsgálatához

4.1.3.4. Eredmények

A homogenizált modell áramlási tere körül kialakuló mágneses tér vizsgálatánál 4.6. ábrán látható keresztmetszeti eloszlást fogjuk viszonyítási alapnak tekinteni. Észrevehető, hogy a tér ilyen csekély menetszám esetén is jó közelítéssel hengersizmetrikus.

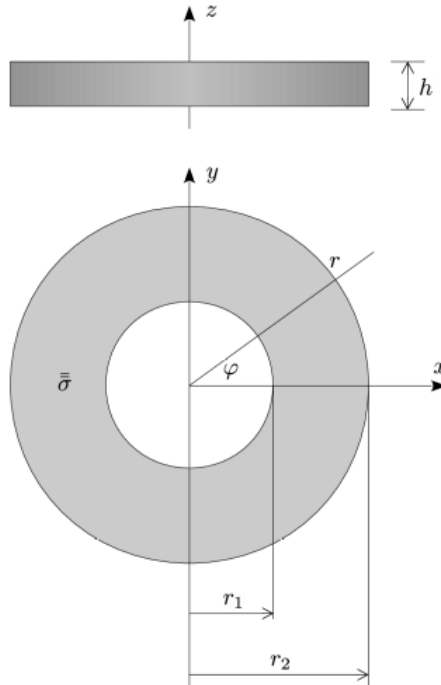


4.6. ábra. A mágneses indukció eloszlása a tekercs keresztmetszetében

4.2. Homogenizálás

Ahogy kivonatban is szerepelt, a fő cél, hogy a tekercset helyettesítsük egy anizotrop vezetőképességű koronggal, elkerülve ezáltal a szalagszintű diszkretizálást. Ennek megfelelően a továbbiakban a σ vezetőképességet nem tekinthetjük skalárnak, a homogén közeg $\bar{\sigma}$ vezetőképesség-tenzorral értelmezhető, ezt pedig úgy fogjuk megadni, hogy az árameloszlás a tekercsmodellel összehasonlítva irányhelyesen megegyezzen.

A *quench* lokálisan jelenik meg, perturbálva az áramlási és mágneses teret, továbbá a tekercsen belül a tér minden irányába terjed. Ezáltal a problémát három dimenzióban szükséges tárgyalni annak ellenére, hogy a gyakorlatban alkalmazott HTS-tekercsek nagy menetszáma, illetve menetsűrűsége tisztán a stacionárius teret tekintve megengedné a két-dimenziós leírást is. Ennek megfelelően az anizotrop vezetőképesség-tenzor 3×3 -as mátrix-reprezentációját fogjuk megadni.



4.7. ábra. A homogenizált korong geometriája

4.2.1. Áramlási tér

4.2.1.1. Alapegyenletek, parciális differenciálegyenlet

Az alapegyenletek lényegében megegyeznek a 4.1.2.1. pontban leírtakkal, azzal a különbséggel, hogy a differenciális Ohm-törvényben már a vezetőképesség-tenzor szerepel:

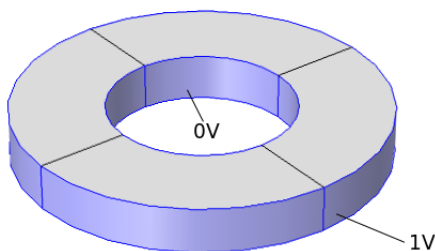
$$\vec{J} = \bar{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (4.32)$$

A parciális differenciálegyenlet (4.10)-hez hasonlóan:

$$\nabla \cdot (\bar{\sigma} \nabla \phi) = 0. \quad (4.33)$$

4.2.1.2. Peremfeltételek

A (4.17) egyenletből látható, hogy a szalag σ_0 vezetőképességét és w_t vastagságát nyugodtan helyettesíthetjük $\sigma' = f\sigma_0$ és $w'_t = \Delta r = \frac{w_t}{f}$ értékekkel anélkül, hogy megváltoztatnánk az R_0 ellenállásértéket. A tekercs egy menetének ehhez a Δr távolság megtételéhez teljesen körbe kell fordulnia. A korong külső és belső fala a tekercs első és utolsó menetének felel meg. Ebből kifolyólag a 4.1.2.3 pontban meghatározott Dirichlet-peremfeltételeket ezúttal ezen felületeken írjuk elő. Mivel áram nem folyik a levegőtartományban, így a (4.14) egyenlet által meghatározott homogén Neumann-peremfeltételt a korong aljára és tetejére adjuk meg.



4.8. ábra. A homogenizált korong feszültség-gerjesztése

4.2.1.3. Áram számítása

A homogenizált modellben a korong belső falán kifolyó áramot a következőképp számítjuk:

$$I = \int_{-h_t/2}^{+h_t/2} \int_0^{2\pi} (\vec{n} \cdot \vec{J}) r_1 d\varphi dz. \quad (4.34)$$

egy alternatív formula Descartes koordináta-rendszerben:

$$I = \frac{1}{N} \int_{-h_t/2}^{+h_t/2} \int_{r_1}^{r_2} J_y dx dz. \quad (4.35)$$

4.2.1.4. „Hengeres” homogenizálás

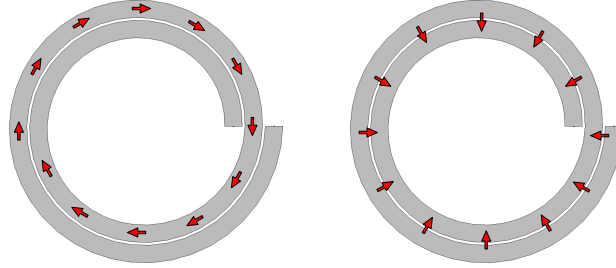
A modellezéshez meg kell határoznunk az anizotrop vezetőképességhez tartozó $\bar{\sigma}$ tenzor reprezentációját egy alkalmas koordináta-rendszerben.

Mivel az elrendezés közelítőleg hengersizmetrikus, ezért a legkézenfekvőbb a problémát hengerkoordináta-rendszerben tárgyalni. Első közelítésben a mátrix tisztán diagonális, φ és z irányú összetevőkkel.

$$\hat{\sigma}_{henger}^{r\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & f\sigma_0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Ennek oka, hogy ekkor a tekercs meneteit forgásszimmetrikusnak tekintjük, azaz mintha a geometriája koncentrikusan elhelyezkedő kör alakú menetekből állna elő, (ezzel a feltételezéssel éltünk a referencia ellenállás analitikus értékének meghatározásánál is a (4.16) egyenlet felírásakor). Ekkor az áramlási térnek r irányú összetevője nyilván nincsen, φ irány a forgásszimmetriából következik (azaz kör alakú vezetónél az áram azimutális irányban folyik), illetve a kiterjedésből adódóan z irányban is szükséges a homogén közegnek vezetnie.

Ugyanakkor figyelembe kell venni, hogy az áramnak valahogy el kell jutnia egyik menetről a másikra, mely egyfajta *radiális ekvivalens vezetőképesség* bevezetésével oldható meg (4.9. ábra).



4.9. ábra. A radiális ekvivalens vezetőképesség szemléltetése

Tekintsük egy menet ellenállását:

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_0} \frac{2\pi r}{h_t w_t}. \quad (4.37)$$

A menetek közti ugrás reprezentálására:

$$R_{eq} = \frac{1}{\sigma_{rr}} \frac{\Delta r}{2\pi r h_t}. \quad (4.38)$$

A két ellenállásérték $R_1 = R_{eq}$ egyenlőségét kihasználva:

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \frac{w_t \Delta r}{4\pi^2 r^2} = f \sigma_0 \left(\frac{\Delta r}{2\pi r} \right)^2. \quad (4.39)$$

Ezáltal a módosított mátrix:

$$\sigma_{henger}^{r\varphi z} = f \sigma_0 \begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta r}{2\pi r} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

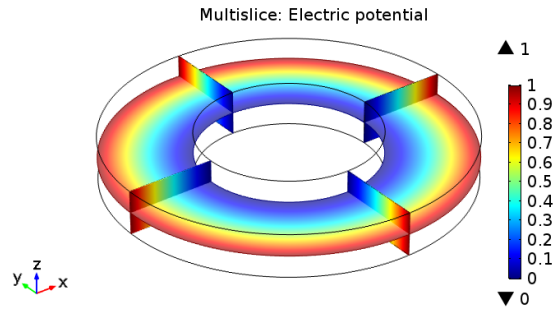
A 4.1. táblázatban megadott értékekkel:

$$\sigma_{henger}^{r\varphi z} = f \sigma_0 \begin{bmatrix} 3,56 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

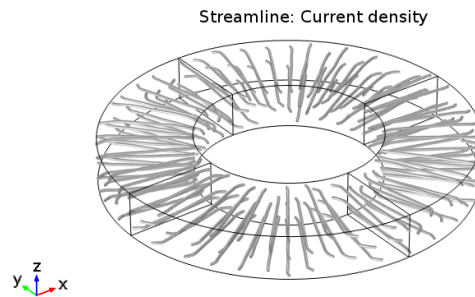
A tekercs ellenállását a 4.1.1. pontban leírtakkal összhangban, a (4.19) egyenlettel határozzuk meg:

$$R_{henger} = \frac{\phi^+}{I} = 2,6465 \text{ m}\Omega, \quad (4.42)$$

amely közelítőleg megegyezik a (4.18) és (4.19) értékekkel. Az elektromos potenciál (4.10. ábra) lényegében a tekercs folytonos közelítése. Az áramlási tér (4.11. ábra) azonban nem ad helyes eredményt, szinte tisztán radiális irányú, mely ellentmond a fizikai képnek. Iránya a mátrix és a gerjesztés szimmetriáját tekintve nem meglepő. Az ellenállásértékben ez nem jelentett problémát, de a mágneses tere a két modellnek nagyban eltérő lesz. A későbbi szupravezetős alkalmazás szempontjából ennek helyes modellezése kiemelkedően fontos. Következésképpen e homogenizálási eljárást a továbbiakban elvetjük.



4.10. ábra. Az elektromos potenciáltér („hengeres” homogenizálás)



4.11. ábra. Az áramlási tér („hengeres” homogenizálás)

4.2.1.5. „Spirális” homogenizálás

Vizsgáljuk meg a $\bar{\sigma}$ tenzor egy olyan ortogonális bázisbeli reprezentációját, mely figyelembe veszi a tekercs geometriáját. Tekintsük ehhez a 4.12. ábrát. A koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy ξ a tekercs meneteinek spirális pályájára merőleges, η ezzel párhuzamos, ζ pedig a magasságirányú vezetést jellemzi. Innen következik, hogy természetesen élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy a $\bar{\sigma}$ tenzort reprezentáló mátrix ebben a koordináta-rendszerben tisztán diagonális:

$$\sigma_{spr}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & f\sigma_0 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Ezáltal egy olyan alakhoz jutottunk, melyet már közvetlenül is megadhatunk a Comsol-ban, mivel a szoftver lehetőséget biztosít számos lokális koordináta-rendszer definiálására, melyek közül az elforgatott változatra van szükségünk.

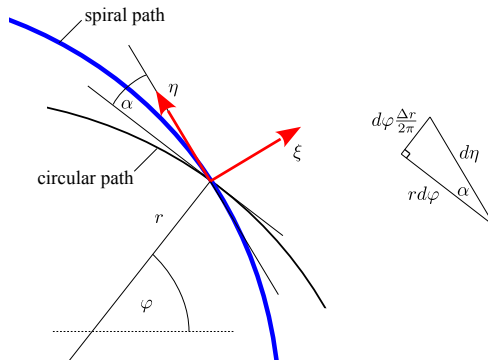
Bázistranszformációval eljuthatunk e mátrix hengerkoordináta-rendszerbeli megfelelőjéhez, ezáltal lehetőség nyílik arra, hogy a kapott eredményt összehasonlíthassuk a „hengeres” homogenizálással. Ehhez vegyünk észre, hogy $\zeta \equiv z$, továbbá η és ξ megkapható r és φ egy α szöggel történő elforgatásával.

Tekintsük az infinitezimális megfelelőket, ehhez felhasználjuk az α szöggel történő elforgatás mátrixát:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ rd\varphi \\ dz \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} dr \\ rd\varphi \\ dz \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Szükségünk van az elforgatás α szögére, mely a 4.12. ábrán látható háromszög segítségével könnyen meghatározható:

$$\tan \alpha = \frac{d\varphi \frac{\Delta r}{2\pi}}{rd\varphi} = \frac{\Delta r}{2\pi r}. \quad (4.45)$$



4.12. ábra. A spirális koordináta-rendszer szemléltetése és kapcsolata a hengerkoordinátákkal [3]

Majd elvégezve a bázistranszformációt, kihasználva, hogy kis szögek esetén $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, és $\tan \alpha \approx \alpha$:

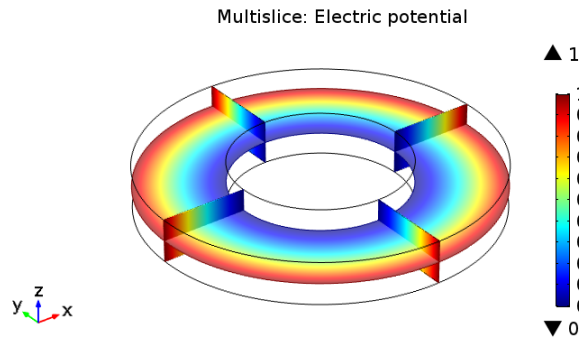
$$\sigma_{spr}^{r\varphi z} = \mathbf{Q}^{-1} \left(\sigma_{spr}^{\xi\eta\zeta} \right) \mathbf{Q} = f\sigma_0 \begin{bmatrix} \left(\frac{\Delta r}{2\pi r} \right)^2 & -\frac{\Delta r}{2\pi r} & 0 \\ -\frac{\Delta r}{2\pi r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Jól látható, hogy a jelenleg kapott mátrix hengerkoordináta-rendszerben nem tisztán diagonális. Vegyük észre, hogy σ_{rr} értéke megegyezik a „hengeres” homogenizálás során az ekvivalens vezetőképesség elve alapján kapott σ_{rr} -rel. Továbbá még kiegészült két keresztirányú taggal is ($\sigma_{\varphi r}$, $\sigma_{r\varphi}$).

A 4.1.1. pontban ismertetett paraméterekkel:

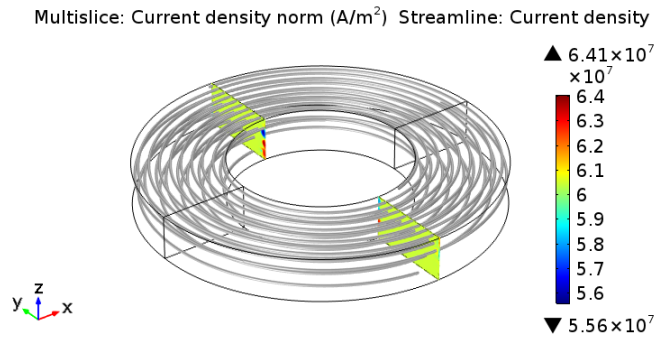
$$\sigma_{spr}^{r\varphi z} = f\sigma_0 \begin{bmatrix} 3,56 \cdot 10^{-7} & -5,97 \cdot 10^{-4} & 0 \\ -5,97 \cdot 10^{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

A potenciáltér a 4.3. és 4.10. ábrán látottakhoz hasonló módon a várakozásoknak megfelel.



4.13. ábra. Az elektromos potenciáltér („spirális” homogenizálás’)

Az áramlási tér (4.14. ábra) jellegre és nagyságrendi tekintetben is kielégítő, homogénnek mondható, eltekintve néhány helyen látható, numerikus hibának betudható kiugró értéket, mely hálófínomítással kiküszöbölhető.



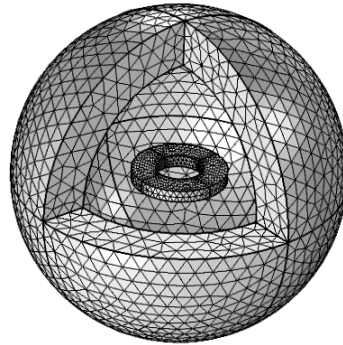
4.14. ábra. Az áramlási tér („spirális” homogenizálás)

Az ellenállás összhangban van a (4.18), (4.19) és (4.42) értékekkel:

$$R_{spr} = 2,6465 \text{ m}\Omega. \quad (4.48)$$

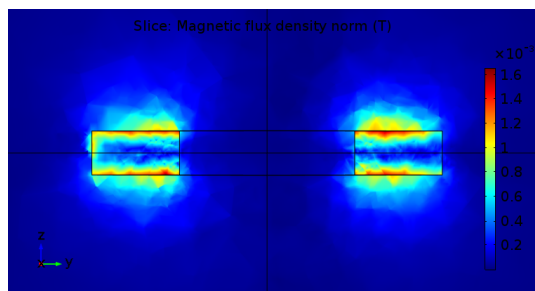
4.2.2. Mágneses tér

A megoldandó differenciálegyenlet és a peremfeltételek megegyeznek a 4.1.3.2. pontban leírtakkal. Ezért ebben az alfejezetben rögtön az eredmények kerülnek ismertetésre. A modelltartomány és a végelem-háló is az előzőekhez hasonló, a 4.15. ábrán tekinthető meg.



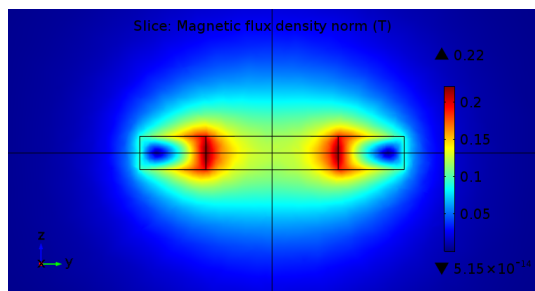
4.15. ábra. Modelltartomány és végelem-háló a homogenizáláshoz

A „hengeres” homogenizálás esetében, mint ahogyan az a 4.2.1.4. pontban is említésre került, nem kaptunk helyes modellt az áramlási térre, így a mágneses térre sem. Ez jól látható a 4.16. ábrán is. Mind a nagyságrendi, mind az irány tekintetében igen nagy eltérés tapasztalható.



4.16. ábra. A mágneses indukció eloszlása a keresztmetszetben („hengeres” homogenizálás)

A „spirális” homogenizálással kapott eredményt tekintve, a mágneses tér az áramlási térrel összhangban igen jól közelíti a tekercsét (4.17. ábra). A maximumértékeket tekintve az eltérés kb. 4%.



4.17. ábra. A mágneses indukció eloszlása a keresztmetszetben („spirális” homogenizálás)

5. fejezet

A modell validációja

5.1. Hatékonyságvizsgálat

Célunk megmutatni, hogy a megoldás konvergens, illetve az árameloszlás kellően homogén. Ehhez például vizsgálhatjuk az áramsűrűség szórását a hálóelemek méretének függvényében, a konvergenciához pedig elvárjuk, hogy ez zérus értékhez tartson a hálózás folyamatos sűrítésével. Így célszerű a tanulmányozni kívánt mennyiségnek az elemméret reciprokától való függését venni. A homogenizálással igyekszünk elkerülni a szalagszintű diszkretizálást, ezért ésszerű a szalagvastagságot választani viszonyítási alapnak, jelen esetben az elemmérethez megválasztott intervallum: $[\frac{w_t}{2}, 5w_t]$. A 3.2. pontban leírtak alapján az alkalmazott végeelem-formafüggvény fokszáma jelentős hatást gyakorol a vizsgált mennyiség pontosságára és a konvergenciára is. Ezáltal a számítás háromféle fokszám esetére is elvégzésre került: lineárisra, kvadratikusra és köbösre.

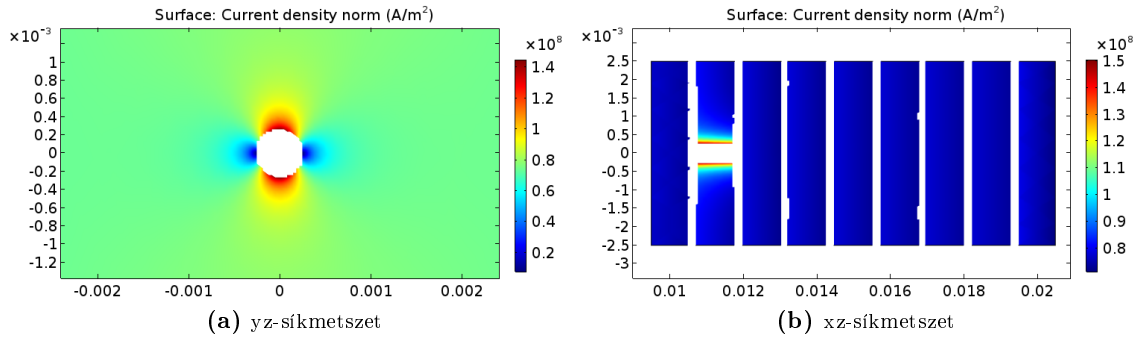
A homogenizált modell akkor tekinthető hatékonynak, ha a korong áramsűrűségének értéke nem tartalmaz nagyobb inhomogenitást, mint amely a részletes geometriájú tekercsben előállhat. Ez számunkra a *quench-jelenség* során kialakuló normál zónák vizsgálatakor kiemelkedően fontos tulajdonság lesz. Érdeemes előzetesen meggondolni, milyen alakú „üreg” esetén írható elő a legerősebb feltétel az áramsűrűség szórására. Megmutatható, hogy E_0 nagyságú homogén elektrosztatikus térbe helyezett fémgömb felületén létrejövő maximális térerősség $3E_0$ [16]. Hasonlóan henger esetében ez az érték $2E_0$. A stacionárius áramlási térre és az elektrosztatikára vonatkozó differenciálegyenlet és peremfeltételek megegyező alakúak. Az analógiát kihasználva ezen megállapítások igazak az áramlási térre is, térerősség helyett áramsűrűsége értelmelve. A perturbációt okozó objektum kicsiny méretéből adódóan a tér e lokális környezetében homogénnek mondható, így ezek a megállapítások a jelen vizsgálatnál is érvényesek. Szögletes geometriájú elemet használva (pl. téglatest), az áramsűrűség eloszlásában szingularitások jelennének meg a sarokpontokon, mely numerikus hiba, így nem biztosít megfelelő összehasonlítási alapot. Mindezekből következik, hogy legkisebb átlagtól való eltérést a tekercsbe helyezett hengeres üreg alkalmazásával adhatunk meg.

Tekintsünk ehhez egy igen kicsiny, $r_0 = \frac{h_t}{20}$ sugarú hengert, ahol h_t a tekercs magassága, ez pedig keresztezze az egyik menetet. Az áram útja olyan, hogy ezt az üreget igyekszik megkerülni (5.1. ábra). Ennek megfelelően a peremén kialakuló maximumérték átlagtól való eltérése könnyen összevethető a homogenizált modell szórásával. Az 5.2a. ábrán az

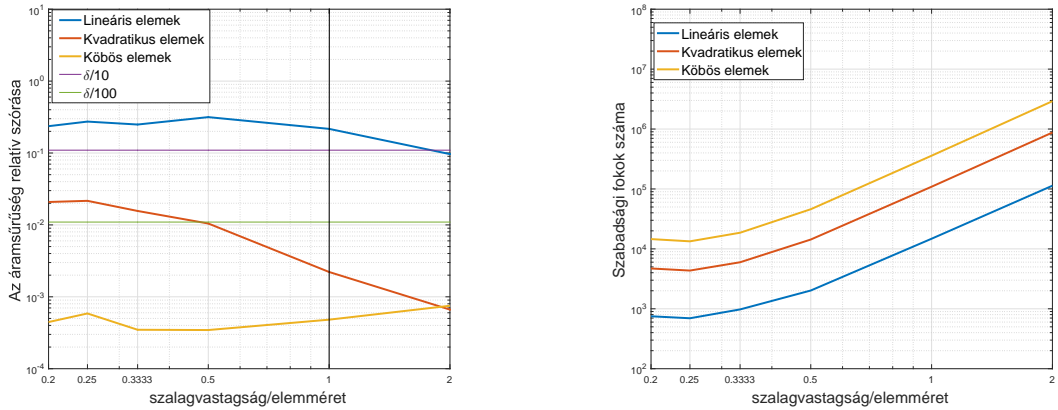
áramsűrűség átlagra nézve relatív szórásértékei láthatóak, továbbá megjelölésre kerültek az üreg által létrehozott *perturbációhoz* tartozó $\frac{\delta}{10}$ és $\frac{\delta}{100}$ értékek¹, ahol

$$\delta = \frac{J_{max} - J_{\text{átlag}}}{J_{\text{átlag}}}. \quad (5.1)$$

Ha ezek valamelyikét még a szalagvastagságnál kisebb maximális elemméretnél éri el a szórás, a modell kellően hatékynak bizonyul. Látható, hogy lineáris foksámú forma-függvényeket nem érdemes alkalmazni. A kvadratikus eset kellően konvergens és homogén, a $\frac{\delta}{100}$ érték kétszeres szalagvastagságú elemméretnél következik be. Köbös elemeknél érdekes módon a szórásérték lassabb ütemben konvergál a zérus értékhez, ezzel szemben már négyszeres szalagvastagságnál is igen kicsiny, 0,05% alatti. Nem elhanyagolható a megnövekedett számítási kapacitásigény sem, melyet például a szabadsági fokok számának elemmérettől való függése is jól szemléltet (5.2b. ábra). Látható, hogy kb. egy nagyságrendnyi eltérés tapasztalható a foksám növekedésével.



5.1. ábra. Az üreg körül kialakuló árameloszlás két metszetben



(a) Az áramsűrűség szórásának vizsgálata az elemméret függvényében

(b) A szabadsági fokok számának elemmérettől való függése

5.2. ábra. A modell hatékonyságának vizsgálata

¹Mivel $J_{max} = 2J_{\text{átlag}}$, ezért a $\frac{\delta}{10}$ és $\frac{\delta}{100}$ lényegében az átlagos áramsűrűség tized illetve századrésze.

5.2. Érzékenységvizsgálat

Az 5.1. pontban leírtakból következik, hogy a modellben számított áramsűrűség homogenitása magasabb fokszámú végeelem-formafüggvények és sűrűbb hálózás alkalmazásával javítható. A szupravezetős alkalmazás szempontjából az árameloszlás kiemelkedően fontos, jellemzően $\frac{\Delta r}{r} \sim 10^{-3}$ nagyságrendű menetsűrűség esetén is. Ezáltal jogosan merül fel az igény az áramsűrűség szórásának kézben tartására. Ehhez ismernünk kell a bizonytalanságot okozó tényezők kimenetre gyakorolt hatását, továbbá meghatároznunk azt a paramétert, ami a leginkább befolyásolja azt. E területtel az érzékenységvizsgálat mint matematikai ág foglalkozik, mely oly mértékben általános, hogy mind műszaki, természet-tudományos és gazdasági területen is alkalmazott. Ennek egy igen elterjedt változata az ún. *Sobol-indexek* számításán alapszik, a számos módszer közül egy igen hatékony eljárás, a *polinomiális káosz sorfejtés* kerül alkalmazásra e dolgozatban. Ebben az alfejezetben a módszernek megfelelően az eddig ismertetett homogenizált modellt *feketedobozként* kezeljük, tehát eltekintünk annak fizikai működésétől. A modern statisztikai eszközökkel történő vizsgálatok fókuszpontja pedig a különböző bemenetiérték-kombinációk hatására a kimenő adat megváltozásának nyomon követése.

5.2.1. A modell paramétereinek meghatározása

Hálóelemek típusa	Jelölés	Tartomány	Leírás
Tetraéder	h	$[3; 5] \cdot w_t$	elemméret
	N_t	$[8; 80]$	a tekercs menetszáma
Hexaéder	h_r	$[3; 5] \cdot w_t$	elemméret (radiális irány)
	h_φ	$[3; 5] \cdot w_t$	elemméret (azimutális irány)
	h_z	$[3; 5] \cdot w_t$	elemméret (z-irány)
	N_t	$[8; 80]$	a tekercs menetszáma

5.1. táblázat. A homogenizált modell bemeneti paramétere

A választott bemeneti paraméterek és értéktartományaik felsorolása az 5.1. táblázatban látható. A $\frac{\Delta r}{r}$ arányt a geometria módosítása nélkül a menetszámmal változtathatjuk. Az előző fejezetben vizsgált tekercs menetszámahoz tartozó $\frac{\Delta r}{r} = 10^{-2}$, így most érdemes egy nagyságrenddel lejjebb kijelölni az alsó korlátot, melyhez $N_t = 80$ menetszámmérték tartozik. Mint ahogy az 3.3. pontban is említésre került, tetraéderekkel történő diskretizálással bármilyen geometriai objektum rugalmasan lefedhető, azonban sűrűbb hálózás esetén indokolatlanul megnövelheti a szabadsági fokok számát, így érdekesebb lehet olyan elemek választása, melyekkel a modelltartomány kevesebb részre osztással is lefedhető. Hexaéder elemekkel egyenletesebb hálózás biztosítható, ezáltal az áramsűrűség homogénebbé tehető, globálisan a szabadsági fokok száma pedig csökkenthető. A hálóelemek mérete három irányban is változtatható, jelen esetben a forgásszimmetrikus elrendezésből következően hengerkoordináta-rendszerbeli irányok figyelembevételével, ezáltal a tetraédes hálózashoz képest további két paraméter szerinti vizsgálatot tesz lehetővé. Előnye főképp abban rejlik, hogy kihasználható az árameloszlásnak és a potenciáltérnek a gerjesztés szimmetriájából adódó z-iránytól való függetlensége. Sőt, összességében elmondható, hogy a „túlhálózás” még numerikus hibát is bevisz a számításokba. A jelenlegi vizsgálatnál két oka van annak, hogy e tulajdonság kihasználásával nem éltünk. Az egyik, hogy egyforma intervallumok esetén könnyebben nyomon követhető az árameloszlásra gyakorolt hatás, a második inkább technikai jellegű, miszerint pl. h_t tekercsmagassággal összemérhető hálózás esetén

kevésbé állítható diszkrétan az elemméret, mely akár különböző minták látszólagos ekvivalenciájához is vezethet. Egyedüli hátránya, hogy az elemek alakilag nehezebben tudják követni a korong két szélének görbületét. Az így okozott numerikus hiba pedig rontja az egyébként igen homogén árameloszlásnak megfelelő szórásértéket. E hatás csökkentésére köbös geometriai fokszámfüggvények kerültek alkalmazásra annak érdekében, hogy a tetraéderes esethez képest lehetőleg kedvezőbb eredményt kapjunk. A változók diszkretizálása lineáris, kvadratikusan és köbösen formafüggvények alkalmazásával is megtörtént, mely nem állítható automatizáltan, ez összesen három-három érzékenységvizsgálatot jelent. A hálócsoport mérettartományának meghatározása mögött a futási idő optimális megválasztása áll, mely nagyszámú mintán történő vizsgálatnál nem elhanyagolható kérdés. A menetszám előző fejezetben is alkalmazott kiindulási értéke ($N_t = 8$) felülről korlátozza a hálócsoport méretét $5w_t$ nagyságúra. Szalagszintre nem érdemes lemenni, illetve ekkor az anizotrop vezetőképesség-tenzorral történő számítás időigényesebb is, mint a részletes geometriájú tekercsmodellnél. Például a $2w_t$ méretű tetraéderes elemek esetén, kvadratikusan formafüggvények alkalmazásával, $N_t = 80$ nagyságú menetszámértéknél vizsgálva a homogenizált modellt, a szabadsági fokok száma még mindig magasnak számít, meghaladja a tízmilliót, mely még egy nagyságrenddel nagyobb köbös esetben. A nagy mintaszámra való tekintettel a $3w_t$ méretű elemek használata tűnt legmegfelelőbbnek mint alsó korlát, mind futási idő, mind memóriaigény tekintetében. Ekkor a szabadsági fokok száma nagyrészt egymillió alatti, ennek megfelelően köbös esetben sohasem éri el a tízmilliót.

5.2.2. Sobol-indexek

A paraméterek megválasztása után érdemes áttekinteni az ún. *Sobol*-indexek számításán alapuló érzékenységvizsgálat elméleti hátterét. Tekintsünk ehhez egy tetszőleges, $y = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ matematikai modellt, ami a bemeneti változóknak egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ halmazától függ. Érdemes megjegyezni, hogy itt nem szükséges a modellt jellemző összes mennyiség feltüntetése. Amennyiben sikerül elkülönítenünk a fontos és kevésbé fontos paramétereket, a dimenziószám csökkenthető.

A Sobol-indexek számítása egy nemrégiben elterjedt globális érzékenységvizsgálati technika, melynek a célja a kimenet varianciájának felosztása az egyes bemeneti változók és azok csoportjai között ún. *részvarianciákra* a csoportok hozzájárulásának megfelelően. Bár jelen esetben független, egyenletes eloszlású változók jellemzik a modellt, érdemes megemlíteni, hogy a közelmúltban a Sobol-indexek hatékony számításának kiterjesztése összefüggő bemeneti tartományokra és vektor értékű kimenetekre is megtörtént, többek között tanszéki fejlesztés útján is, roncsolásmentes anyagvizsgálati alkalmazással [17].

Jelen esetben a változóink 5.1. táblázat szerinti tartományokban változhatnak; feltételezzük, hogy eloszlásuk egyenletes és egymástól független. A Sobol-indexek számításához skálázzunk lineárisan minden változót a $[0, 1]$ intervallumba, így a modell értelmezési tartománya az egység oldalú n -dimenziós hiperkocka: $\mathcal{D}_{\mathbf{x}} = [0, 1]^n$. A Sobol-indexek számítása azon az ötleten alapszik, hogy felbontjuk a matematikai modellt mint függvényt egyre növekvő dimenziójú részfüggvények összegeként az alábbi módon:

$$y = \mathcal{M}(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.2)$$

A bemeneti változók minden egyes részhalmazához pontosan egy részfüggvényt rendelünk hozzá, ami kizárólag ezektől a változóktól függ, n darab esetén ez így 2^n részfüggvényt

jelent, melyekkel szemben két követelményt írunk elő:

1. Az összeg első tagja egyezzen meg $f(\mathbf{x})$ várható értékével:

$$f_0 = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.3)$$

2. A tagfüggvények integrálja bármely, az argumentumukban szereplő változóra nézve 0 legyen, azaz:

$$\int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0, \text{ ha } 1 \leq k \leq s, \quad (5.4)$$

mely egyben azt is jelenti, hogy a függvények ortogonálisak.

Belátható, hogy $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$ -en integrálható függvények esetén ez a felbontás létezik és egyértelmű, továbbá a sorfejtő függvények megkaphatók integrálással rekurzív módon:

$$f_0 = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.5a)$$

$$f_i(x_i) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_{\sim i} - f_0, \quad (5.5b)$$

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_{\sim i, j} - f_0 - f_i(x_i) - f_j(x_j), \quad (5.5c)$$

ahol $\mathbf{x}_{\sim i}$ egy x_i nélküli halmazt jelöl. A magasabb rendű függvények analóg módon megkaphatók. Érdeemes megfigyelni, hogy $f_i(x_i)$ nem más, mint $f(\mathbf{x})$ x_i -re vonatkozó feltételes várható értékének és f_0 -nak a különbsége, $f_{ij}(x_i, x_j)$ pedig az x_i, x_j -re vonatkozó feltételes várható érték, levonva x_i és x_j saját feltételes és f globális várható értékét. Tehát a rekurzív definíció következménye, hogy az új, magasabb dimenziójú tagok olyan hatásokat próbálnak leírni, amelyek kizárólag a bemeneti változók kölcsönhatásának következménye, és nem tartalmazza a kisebb elemszámú csoportjaik hatását. A függvények ortogonalitásából adódik, hogy az $f(\mathbf{x})$ függvény varianciája felbomlik a tagfüggvények varianciájának összegére:

$$D = \sum_{\mathbf{v} \subseteq \mathbf{x} \setminus \{0\}} D_{\mathbf{v}}, \quad (5.6)$$

ahol

$$D_{\mathbf{v}} = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{x}}} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - f_0^2 \quad (5.7)$$

az f teljes varianciája, $D_{\mathbf{v}}$ pedig annak a tagfüggvényé, amelyet a bemeneti változók egy $\mathbf{v} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}) \subseteq \mathbf{x}$ halmaza definiál.

A változók egy $\mathbf{v} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s})$ csoportjához tartozó *Sobol-index* mint érzékenységi faktor így a következőképpen definiálható:

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{D_{\mathbf{v}}}{D}. \quad (5.8)$$

Ennek értelmében az összes létező Sobol-index összege 1-et ad, ami könnyen értelmezhetővé teszi a mérőszámokat.

Kiemelt jelentősége van annak az esetnek, amikor a csoport egyetlen változóból áll, az így kapott indexeket *elsőrendű Sobol-indexeknek* nevezzük:

$$S_i = \frac{D_i}{D}. \quad (5.9)$$

A tagfüggvényekre tett korábbi megállapítás alapján az indexek értelmezése a következő:

1. Az S_i *elsőrendű indexek* jelölik azt a hatást, amit az x_i változó önmagában létrehoz.
2. Az S_{ij} *másodrendű indexek* olyan hatások leírásért felelnek, amelyek kizárólag x_i és x_j kölcsönhatásának az eredményei, azaz nem tartalmazzák azokat a hatásokat, amiket a változók már önmagukban is létrehoznak.
3. A *magasabb rendűek* analóg módon értelmezhetők.

A Sobol-indexek számítása hagyományosan Monte Carlo becslő formulák segítségével történik megfelelő számú véletlen be- és kimeneti minta felhasználásával:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (5.10a)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M f(\mathbf{x}^{(k)})^2 - \hat{f}_0^2, \quad (5.10b)$$

$$\hat{D}_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M f(x_i^{(k)}, \mathbf{x}_{\sim i}^{(k)}) f(x_i^{(k)}, \mathbf{x}'_{\sim i}^{(k)}) - \hat{f}_0^2. \quad (5.10c)$$

Az (5.10a) és az (5.10b) egyenletek a várható érték és variancia jól ismert becslői. (5.10c) egyenletben szereplő $\mathbf{x}^{(k)}$ jelöli a k -dik mintát az összesen M elemű mintahalmazból, $\mathbf{x}'_{\sim i}^{(k)}$ pedig egy olyan mintát jelöl, ami független $\mathbf{x}_{\sim i}^{(k)}$ -től. A Monte Carlo formulák konvergenciájának biztosítása rendszerint csak nagy mintaszámmal érhető el, azaz a vizsgált modellt a bemeneti változók sok értéke mellett kell kiértékelni. Ez adja a módszer fő nehézségét, hiszen pl. egy bonyolult elektromágneses modell kiértékelése számításigényes feladat, a mintaszám pedig elérheti a százezres vagy milliós nagyságrendet [18][19].

5.2.3. Polinomiális káosz sorfejtés

A polinomiális káosz sorfejtés (Polynomial Chaos Expansion – PCE) egy helyettesítő modell, mely a Sobol-indexeknek egy, a Monte Carlo-módszernél hatékonyabb, kevesebb bemeneti mintán alapuló számítására is használható [20]. Legnagyobb erőssége abban rejlik, hogy képes helyettesíteni a gyakran bonyolult *feketedoboz-modelleket* egy algebrai formulával, melynek kiértékelése lényegesen kevesebb számítást igényel. Ez elősegíti az erőforrások hatékonyabb kihasználását, továbbá jelentős futási idő takarítható meg vele.

Legyen az $y = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ matematikai modell egy véges varianciájú leképezés oly módon, hogy

$$\mathbb{E}[y^2] = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{x}}} \mathcal{M}^2(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}} d\mathbf{x} < \infty. \quad (5.11)$$

teljesüljön, ahol $f_{\mathbf{x}}$ az $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ modell valószínűségi változónak tekintett bemeneteinek együttes sűrűségfüggvénye.. Ekkor az $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ leképezés *polinomiális káosz sorfejtésén* az alábbi végtelen összeget értjük:

$$y = \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} c_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}), \quad (5.12)$$

ahol $\Psi_{\alpha}(\mathbf{x})$ olyan többváltozós polinomfüggvényeket jelöl, amelyek ortogonálisak az $f_{\mathbf{x}}$ sűrűségfüggvényre nézve, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ egy ún. *multiindex*, mely lényegében egy N elemű vektor, c_{α} pedig a megfelelő polinom együtthatókat jelöli [21].

5.2.3.1. Polinomiális bázis felépítése

Mint ahogy 5.2.3. pontban is felvázolásra került, a polinomiális káosz sorfejtés alapvetően egy sztochasztikus megközelítést alkalmaz, és a bázisfüggvényeket úgy választja meg, hogy azok ortonormáltak legyenek a bemeneti változók együttes sűrűségfüggvényére nézve, a közelítő függvény pedig n -dimenziós ortogonális bázisfüggvények lineáris kombinációjaként áll elő. Esetünkben a bemeneti változók egyenletes eloszlásúak, ezért bázisfüggvényként *Legendre-polinomokat* kell használni [20].

A helyettesítő modell felállítása az alábbi négy lépésben foglalható össze:

1. Először létre kell hozni egy egydimenziós ortogonális bázisfüggvényekből álló halmazt:

$$\Psi(x) = \{\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_l(x)\} \quad (5.13)$$

2. A többdimenziós bázisfüggvények halmaza az egydimenziósak tenzor szorzataként áll elő, ez összesen l^n darab bázisfüggvényt jelent:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(x_1) \otimes \Psi(x_2) \otimes \dots \otimes \Psi(x_n). \quad (5.14)$$

3. Mivel az n -dimenziós bázisfüggvények száma n exponenciális függvénye, és a magasabb fokszámúaknak általában kevesebb szerepe van, ezért lehetőség van ennek a halmaznak egy kisebb számosságú halmazra való csonkítására valamilyen stratégia szerint. A bázisfüggvények csonkolásának legegyszerűbb módja, ha a felhasznált Legendre-polinomok fokszámát egy p értékben maximalizáljuk:

$$\alpha \in \mathcal{A} \iff \forall i \in 1, 2, \dots, n | \alpha_i \leq p \quad (5.15)$$

n dimenziós bementi tartomány esetén ez $(p + 1)^n$ darab bázisfüggvényt jelent (a nulladfokú polinomok a konstans 1 függvények).

4. Végül a megmaradt bázisfüggvények lineáris kombinációjaként előállítható az $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ matematikai modell mint függvény közelítése:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

ahol c_{α} polinomegyüttható, \mathcal{A} pedig egy indexhalmaz amiből α egyértelműen azonosít egy bázisfüggvényt.

Az egyedüli számításigényes művelet az együtthatók becslése, amihez természetesen ugyanúgy a modell mintavételezésére van szükség. Az ehhez szükséges minták száma azonban nagyságrendekkel kisebb, mint amennyi a Monte Carlo becsléshez szükséges, és a helyettesítő modell felépítését követően már tetszőleges számú új minta generálható.

Az egyváltozós bázisfüggvények tenzor szorzata úgy képződik, hogy mind az n darab változónál kiválasztunk egy bázispolinomot a lehetséges l darab közül, majd ezeket összeszorozva adódnak a többváltozós bázisfüggvények. Ezt a generálást szisztematikusan fel lehet építeni úgy, hogy az α indexvektor éppen a kiválasztott polinomok fokszámait tartalmazza, tehát pl. α_i azt mondja meg, hogy az x_i változó esetében melyik Legendre-polinomot használtuk fel a többváltozós függvény készítésekor [19][22].

5.2.3.2. Polinom együtthatók meghatározása

Az együtthatók becslése a függvény véletlen mintái alapján a legkisebb négyzetek módszerével elvégezhető:

$$\hat{\mathbf{c}} \approx \arg \min \mathbb{E} \left[\left(f(\mathbf{x}) - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \right)^2 \right]. \quad (5.17)$$

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll M darab bemeneti minta, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(M)})$, és a hozzájuk tartozó $y^{(i)} = f(\mathbf{x}^{(i)})$ kimeneti minták, $Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(M)})$. Ekkor a legkisebb négyzetek problémájára adható zárt alakban optimális becslés:

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} Y^T, \quad (5.18)$$

ahol

$$\mathbf{A}_{i,j} = \Phi_j(\mathbf{x}^{(i)}), \quad j = 0, 1, \dots, P \equiv |\mathcal{A}|. \quad (5.19)$$

5.2.4. Eredmények

Az érzékenységvizsgálat tetraéder hálózásnál 50, hexaédes esetben 200 elemből álló mintahalmazra történt, MATLAB UQLab Toolbox használatával [11]. Az alkalmazott PCE metamodell legfeljebb harmadfokú bázisfüggvényeket tartalmaz. Az együttthatók számítása a legkisebb négyzetek módszerével történt.

A szórásértékek a megfelelő paramétertengelyekre vetítve az 5.5. ábrán láthatóak, ahol q az alkalmazott elemmérethez tartozó szorzótényezőt jelöli. Egyből szembetűnik, hogy a menetszám növelésével lehet a legjobban hatni a kimenet bizonytalanságára. Lineáris formafüggvények alkalmazásakor a tetraédes hálózásnál tapasztalható kisebb szórásérték, míg kvadratikus formafüggvények használatakor a várakozásainknak megfelelő módon a hexaéder elemes megoldás mutatkozott hatékonyabbnak, bár a különbség talán a vártnál kevésbé mondható szignifikánsnak. Összességében a kvadratikus formafüggvényeknél tetraéder hálóval kb. 0,5 – 4%, a hexaédes esetben 0,2 – 3,1%-os eltérések tapasztalhatóak, azaz az árameloszlás igen homogén. Lineáris formafüggvények alkalmazása továbbra is elég rossz szórásértékekhez vezet a jelenleg alkalmazott nagyságú hálóelemek mellett, ez tetraéder hálózásnál kb. 52 – 55%, hexaéder elemeknél 60 – 90% értéktartományt jelent. Mint ahogy azt az előző fejezetben is láthattuk, a $\frac{w_t}{2}$ nagyságrendben, $N_t = 8$ menetnél tapasztalt 1% körüli a szórásérték már elfogadható, mindazonáltal azt sem szabad elfelejteni, hogy a homogenizált modell felállítása mögött rejlő motiváció éppen a szalagszintű diszkrétizálás elkerülése volt, így ennek használata a későbbiekben elvetendő. Kőbös formafüggvényeket alkalmazva, meglepő módon tetraédes hálózásnál nem feltétlenül tapasztalunk jobb szórásértékeket. Sőt, némely esetben az eredmény rosszabb is, összességében kb. 0,1 – 5% között mozog. Ugyanakkor hexaéder háló esetén a szórás figyelemremélően csekély értékű, kb. 0,02 – 0,66% intervallumban helyezkedik el.

Érdeemes még a futási időkre is vetni egy pillantást. Számítási kapacitás tekintetében i7-es processzorral és 64 GB RAM-mal ellátott PC állt rendelkezésre. Az eredmények összehasonlításánál nem szabad megfeledkezni arról, hogy tetraédes esetben 50, hexaéder elemeknél 200 db számítás került elvégzésre. Azaz a futási idő még a „túlhálózás” ellenére is számottevően gyorsabbnak mondható, még a kvadratikus és a kőbös esetén sem érződött a lokálisan több szabadsági fok hatása.

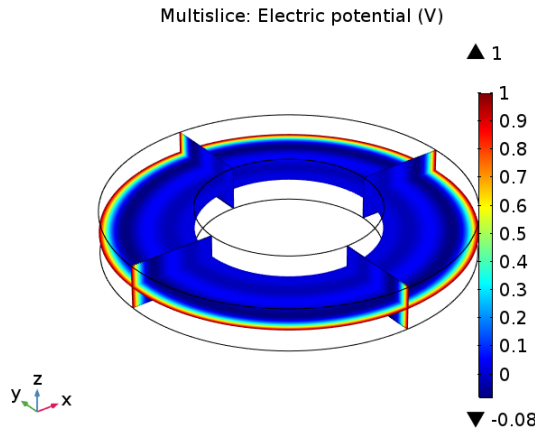
Hálóelemek típusa	Formafüggvények fokszáma	Futási idő
Tetraéder	lineáris	9 perc 28 másodperc
	kvadratikus	1 óra 8 perc 11 másodperc
	kőbös	14 óra 15 perc 12 másodperc
Hexaéder	lineáris	7 perc 28 másodperc
	kvadratikus	2 óra 53 perc 25 másodperc
	kőbös	11 óra 0 perc 6 másodperc

5.2. táblázat. A homogenizált modell bemeneti paraméterei

A Sobol-indexekre kapott eredmények az 5.6. ábrán tekinthetőek meg. Ahogy az az 5.2.2. pontban is említésre került, az elsőrendű Sobol-indexek számot adnak a leglényegesebb jelenségekről: egy adott változó esetében minél magasabb az értéke, annál nagyobb súllyal vesz részt a kimeneti bizonytalanság létrehozásában. A négy érzékenységvizsgálatot tekintve szintén egyből szembetűnik a menetszám hatása.

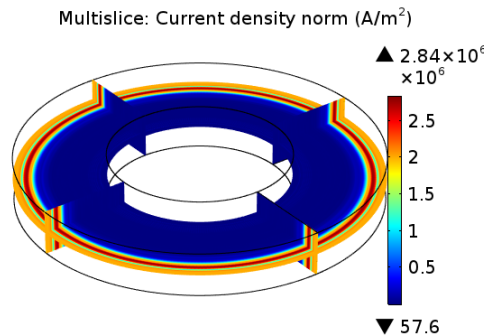
A fentiekből arra lehet következtetni, hogy bizonyos mérettartományokon már nem lesz

alkalmazható a modell. Ennek korlátja abban rejlik, hogy a „spirális” homogenizáláskor felállított koordináta-rendszert jellemző elforgatás α szöge a menetszám növelésével nullához tart (4.45), mely aszimptotikusan a hengerszimmetrikus esethez vezet, mikor az egyes menetek között nincs átjárhatóság (4.36). Kellően sűrű hálózás vagy magasabb fokszámú formafüggvényekkel a forgatás numerikusan kézben tartható, viszont ebből az is következik, hogy a menetszám növelésével, a szalagvastagsághoz viszonyítva változatlan elemméret esetén az áramsűrűség szórása folyamatosan romlik. A jelenség érzékeltetéséhez tekintsünk egy $N_t = 800$ menetes tekercs homogenizált modelljét $20w_t$ nagyságú hálóelemekre, kvadrátikus formafüggvények alkalmazásával. A potenciáeloszlás mindkét fajta hálóelemre elvégzett szimuláció esetén ugyanúgy ellentmond a fizikai képnek (5.3. ábra), a szórásérték kiemelkedően magas, mindkét esetben 90%-os nagyságrendű.



5.3. ábra. Az elektromos potenciáltér ($N = 800$)

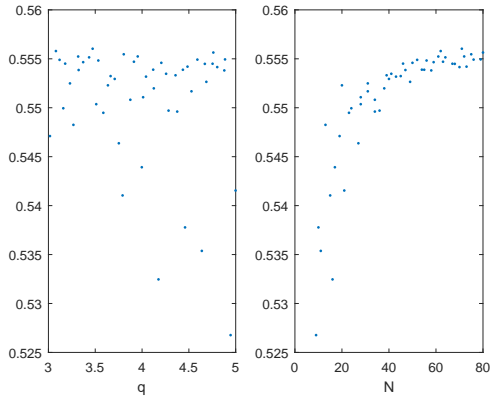
Ennek oka, hogy a gerjesztés irányának megfelelően az áram a belső menetek fele haladva kiszorul (5.4. ábra). Kőbös formafüggvényekre végezve a vizsgálatot, újra helyes a potenciáeloszlást kapjuk, ennek ellenére az áramsűrűség szórása még így is jelentős, 25% körüli.



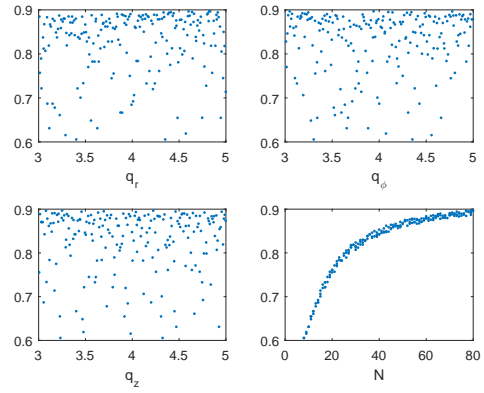
5.4. ábra. Az elektromos potenciáltér ($N = 800$)

Azt is érdemes megjegyezni, hogy a jelenség a menetszám növelésével fokozatosan alakul ki, ezzel a hálómérettel kb. $N_t = 500$ -tól mondható jelentősnek, ekkor a közepes sugarat tekintve $\frac{\Delta r}{r} \cong 1,33 \cdot 10^{-3}$.

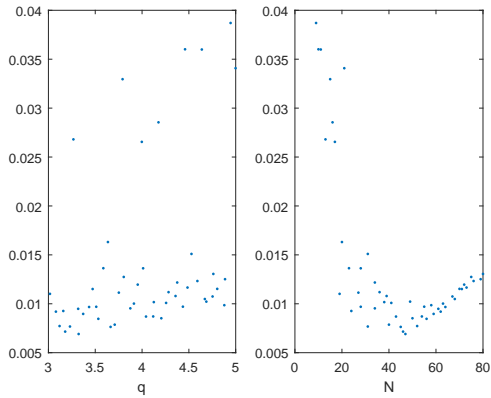
Mindezek következtében általánosságban elmondható, hogy a modell ésszerű keretek között a $\frac{\Delta r}{r} \sim 10^{-3}$ nagyságrendet meghatározó intervallum nagy részében alkalmazható.



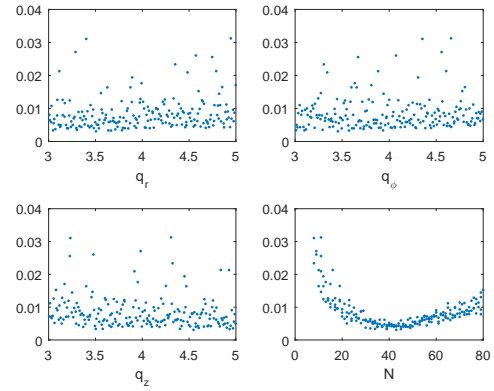
(a) Tetraéder háló, lineáris formafüggvények



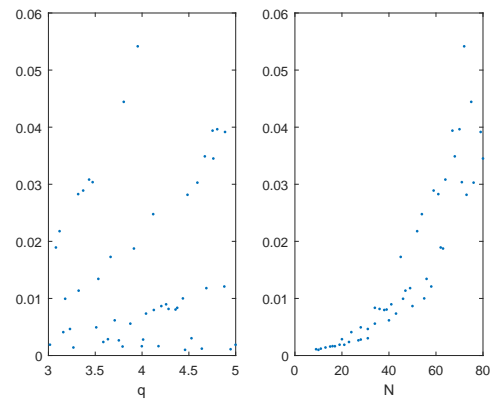
(b) Hexaéder háló, lineáris formafüggvények



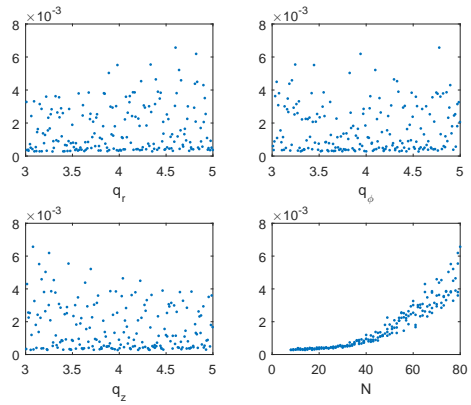
(c) Tetraéder háló, kvadratus formafüggvények



(d) Hexaéder háló, kvadratus formafüggvények

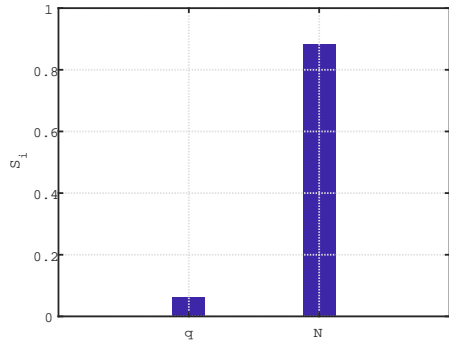


(e) Tetraéder háló, köbös formafüggvények

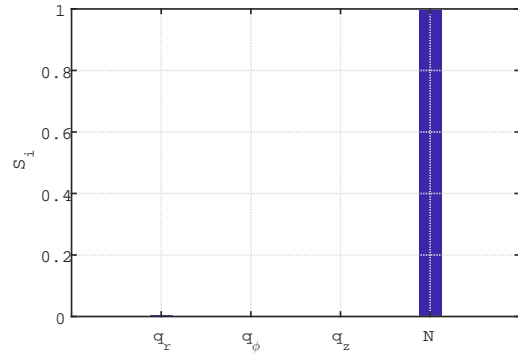


(f) Hexaéder háló, köbös formafüggvények

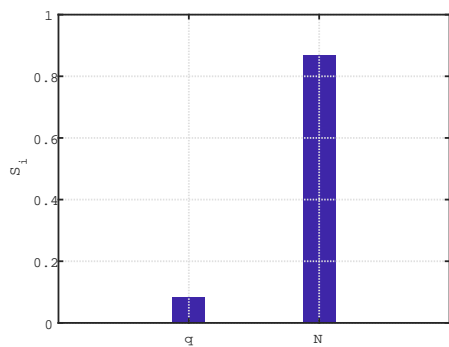
5.5. ábra. A szórásértékek a bemeneti paramétertengelyekre vetítve



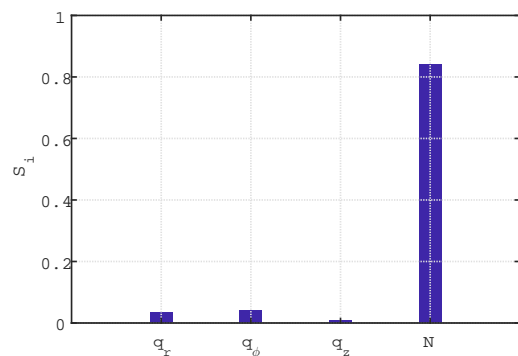
(a) Tetraéder háló, lineáris formafüggvények



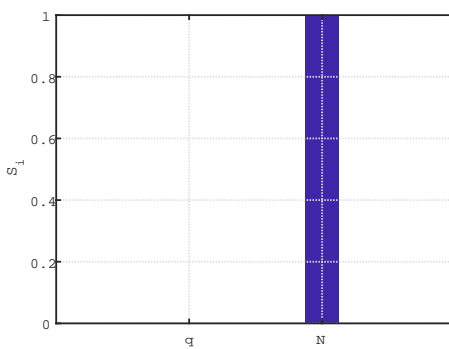
(b) Hexaéder háló, lineáris formafüggvények



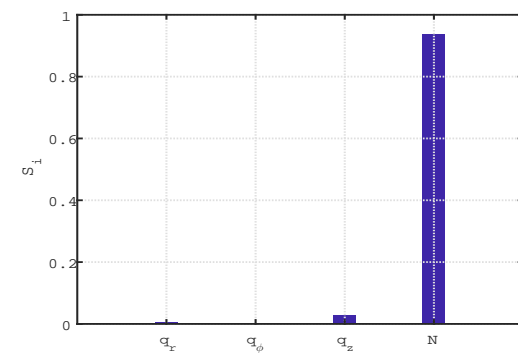
(c) Tetraéder háló, kvadratikus formafüggvények



(d) Hexaéder háló, kvadratikus formafüggvények



(e) Tetraéder háló, köbös formafüggvények



(f) Hexaéder háló, köbös formafüggvények

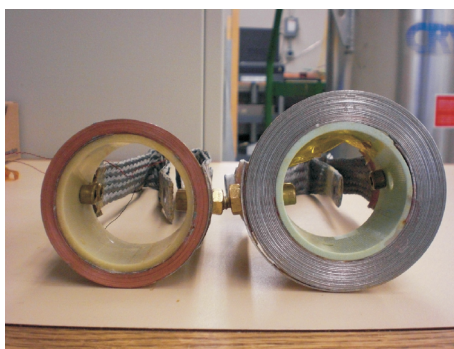
5.6. ábra. A bemeneti paraméterekhez tartozó elsőrendű Sobol'-indexek

6. fejezet

Egy gyakorlati példa

Miután megvizsgáltuk a homogenizált modell hatékonyságát, továbbá rámutattunk annak korlátaira, tekintsünk egy gyakorlatban is alkalmazott, valós paraméterekkel rendelkező szalagtekercset, azzal a módosítással, hogy jelenleg nem a többrétegű struktúrát vizsgáljuk, hanem egy tisztán részből készült, azonos méretekkkel rendelkező tekercset.

A szimulációhoz használt paraméterek a 6.1. táblázatban szerepelnek. Innen leolvasható, hogy $\frac{\Delta r}{r} \cong 2,6 \cdot 10^{-3}$ és a választott elemméret kb. $16w_t$. A 6.1. ábrán pedig két, azonos belső sugárral, de eltérő szalagvastagsággal rendelkező tekercs látható.

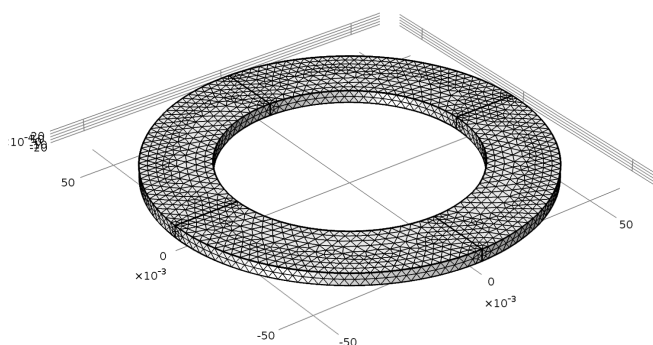


6.1. ábra. Két gyakorlatban is alkalmazott szupravezető szalagtekercs [4]

Jelölés	Érték	Leírás
r_1	40 mm	belső sugár
r_2	61,6 mm	külső sugár
N	93	menetszám
w	186 μm	szalagvastagság
h	4 mm	szalagszélesség
Δr	132 μm	a spirál menetemelkedése
f	0,8	kitöltési tényező
σ_0	$5,7 \cdot 10^7$ S/m	vezetőképesség
R	0,15 m	levegő gömb sugara
D	0,06 m	végtelen perem vastagsága
h	3 mm	az alkalmazott végeelem-háló elemmérete

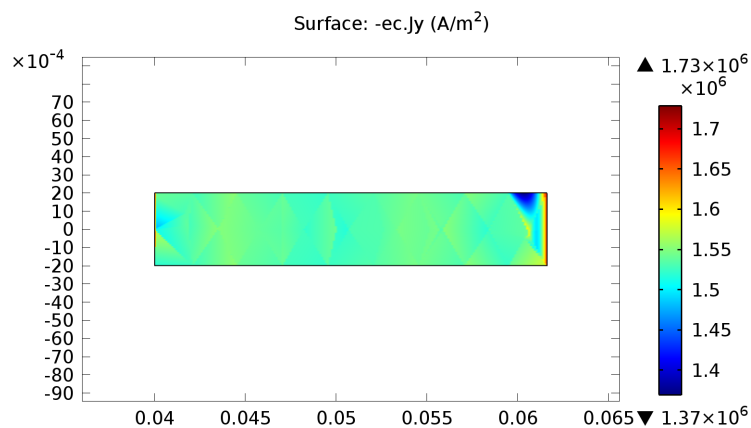
6.1. táblázat. A realiztikusabb paraméterekkel rendelkező tekercs konkrét értékei

Vizsgáljuk a stacionárius teret a szalagvastagsághoz viszonyítva igen ritka, 13 710 elemből álló végelem-háló alkalmazásával, mely a 6.2. ábrán tekinthető meg.



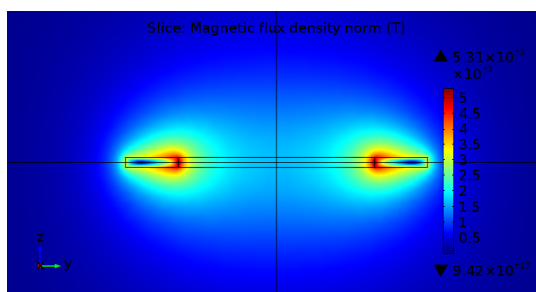
6.2. ábra. A realiztikusabb paraméterekkel rendelkező tekercs végelem-hálója

A keresztmetszetben az áramsűrűség eloszlása (6.3. ábra) még így is kimondottan homogénnek mondható, leszámítva a tekercs széléit. A szórásérték is csekély, kb. 3,7%.



6.3. ábra. A realiztikusabb paraméterekkel rendelkező tekercs keresztmetszeti áramsűrűség

Tekintve a mágneses teret, az eltérés a széleken nem okoz fizikai képpel ellentmondó lokális maximumhelyet (6.4. ábra).



6.4. ábra. A homogenizált, realiztikusabb paraméterekkel rendelkező tekercs mágneses indukciójának eloszlása a keresztmetszetben

7. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban bemutatásra került egy újszerű homogenizálási eljárás, mely kimondottan lapos szalagtekercseket hivatott modellezni, homogén, anizotrop közeggel történő helyettesítéssel. A *quench-jelenség* természetéből adódóan elektromágneses szempontból stacionárius közelítés alkalmazható, ennek megfelelően a Comsol Multiphysics szoftverrel készült végeelem-számításokkal stacionárius áramlási és mágneses teret modelleztünk, melynek során bizonyítottuk a homogenizálás hatékonyságát, modern statisztikai módszerekkel pedig rámutattunk az alkalmazhatóság korlátaira is, majd számot adtunk ennek okáról. Végül egy valós méretekkel rendelkező, gyakorlatban is alkalmazott lapos szalagtekercs szimulációjának útján szemléltettük a modell fő előnyét, mely abban rejlik, hogy a szalagvastagsághoz viszonyítva igen nagy hálóelemekkel is kellően homogén árameloszlást kaphatunk, ezáltal jelentősen lecsökkentve a számítási kapacitás igényt részletes geometriájú tekercsmodellhez viszonyítva.

A fő távlati terv természetesen a *quench-jelenség* vizsgálata. Ennek megfelelően a Comsol-szimulációhoz a jövőben hozzáadjuk a *Heat Transfer* modulban megtalálható *Heat Transfer in Solids* almodult, ezáltal figyelembe tudjuk venni a lejátszódó hőtani folyamatokat a tekercsen belül. Egy fiktív hőforrással kívánjuk elérni, hogy a spontán kialakuló hőmérsékleti maximumhely előálljon. A mágneses tér vizsgálatához a nemlineáritás kezelésére kifejlesztett *Magnetic Field Formulation*-t fogjuk a továbbiakban alkalmazni a *Magnetic Fields* helyett. Az így létrehozott modell várhatóan jóval hatékonyabbá teszi a számításokat, mely a stacionárius esetben tanúsított igen homogén árameloszlásnak köszönhetően képes lehet a *quench* során kialakuló legkisebb detektálható normál zóna vizsgálatára is.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Zhang, K. Matsuda, and T. A. Coombs, „New application of temperature-dependent modelling of high temperature superconductors: Quench propagation and pulse magnetization,” *Journal of Applied Physics*, vol. 112, no. 4, p. 043912, 2012.
- [2] J. Gyselinck and P. Dular, “Frequency-domain homogenization of bundles of wires in 2-D magnetodynamic FE calculations,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, no. 5, pp. 1416–1419, 2005.
- [3] Sz. Gyimóthy, A. Kenderes, „Homogenized FEM model for pancake coils spiral-wound from a coated tape,” *18th International IGTE Symposium*, Graz, Austria, Sept 17-19, 2018.
- [4] M. Zhang, J-H. Kim, S. Pamidi, M. Chudy, W. Yuan, et al., „Study of second generation, hightemperature superconducting coils: Determination of critical current”, *Journal of Applied Physics*, 111 (2012) pp.083902.
- [5] W. Chan, P. Masson, C. Luongo, and J. Schwartz, “The 3D mixed dimensional quench model of a high aspect ratio high temperature superconducting coated conductor tape,” in *Proceedings of the COMSOL Conference*, Boston, 2010.
- [6] P. J. Masson, V. R. Rouault, G. Hoffmann, and C. A. Luongo, “Development of quench propagation models for coated conductors,” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 18, no. 2, pp. 1321–1324, 2008.
- [7] G. Escamez, C. Lorin, T. Wu, and P. Masson, “Quench propagation in YBCO racetrack of a rotor winding,” in *Proceedings of the COMSOL Conference*, Boston, 2013.
- [8] Vajda István: Szupravezetők alkalmazásai című tárgy segédanyagai, 2013. (BME-VET)
<https://vet.bme.hu/?q=tantargyak/szupravezetok-alkalmazasai>
- [9] Introduction to COMSOL Multiphysics 5.2a, 2016.
<http://cdn.comsol.com/documentation/5.2.1.152/IntroductionToCOMSOLMultiphysics.pdf>
- [10] The AC/DC Module User’s Guide (COMSOL Multiphysics 5.2), 2015.
- [11] UQLab – The framework for uncertainty quantification <https://www.uqlab.com/>
- [12] Reed-Simon, *Methods of modern mathematical physics, 1. volume: Functional Analysis*, Academic Press, INC., 1980.
- [13] An Introduction to the Finite Element Method, COMSOL Multiphysics Cyclopedia
<https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>

- [14] Walter Frei, Keeping Track of Element Order in Multiphysics Models, COMSOL Blog
<https://www.comsol.com/blogs/keeping-track-of-element-order-in-multiphysics-models>
- [15] Walter Frei, How to Choose Between Boundary Conditions for Coil Modeling, COMSOL Blog
<https://www.comsol.com/blogs/how-to-choose-between-boundary-conditions-for-coil-modeling/>
- [16] Bilicz Sándor, *Elektromágneses terek példatár*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010. (egyetemi jegyzet)
- [17] A. Bingler, S. Bilicz, „Sensitivity analysis using a sparse grid surrogate model in electromagnetic NDE,” in *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, ser. Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics. IOS Press, 2018, vol. XXI, pp. 1–8. 37
- [18] UQLab User Manual Polynomial Chaos Expansions
<https://www.uqlab.com/userguidepce>
- [19] Bingler Arnold, *Érzékenységvizsgálat az elektromágneses roncsolásmentes anyagvizsgálatban modern statisztikai módszerekkel*, BME-VIK, TDK dolgozat, 2017.
- [20] B. Sudret, „Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions” *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 93, no. 7, pp. 964–979, 2008.
- [21] UQLab User Sensitivity Analysis
<https://www.uqlab.com/userguidesensitivity>
- [22] Bingler Arnold, *Mágneses mérésen alapuló anyagvizsgálati eljárás érzékenységi vizsgálata modern statisztikai módszerekkel*, BME-VIK, BSc szakdolgozat, 2016.