

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék

Elektromágneses szóródási modell gömbszimmetrikus problémák számításához

TDK DOLGOZAT

Hallgató
Csernyava Olivér

Konzulens
Dr. Bilicz Sándor
Dr. Badics Zsolt

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

Abstract	3
Kivonat	4
1. Bevezetés	5
1.1. Numerikus módszerek a szóródás vizsgálatára	5
1.2. Szóródás vizsgálata analitikus módon	6
2. Síkhullám szóródása tetszőleges anyagú rétegzett gömbről	8
2.1. Hullámegyenlet megoldása (Mie–Debye-formula)	9
2.2. Beeső, szórt, és belső tér meghatározása homogén gömb esetén	11
2.3. Szimmetrikusan rétegzett gömb esete	14
2.4. Az elektromos és mágneses tér felépítése	15
3. Szóródási együtthatók meghatározása	17
3.1. A függvények kiértékelése	18
3.2. Algoritmus	21
3.3. Határértékek meghatározása	25
3.4. Határérték argumentumának becslése iteratív módszerrel	28
4. A sor szükséges tagszámának adaptív becslése	30
4.1. Fél-analitikus módszer globális mennyiségek számolására	31
4.2. Veszteség a magban	31
4.3. Veszteség a héjban	33
4.4. Numerikus egyváltozós integrálás	35
4.5. Adaptív tagszámbecslés	36

5. Számítási példa	37
5.1. Elektromágneses tér vizsgálata	37
5.2. A Mie algoritmus pontossága	38
5.3. Eredmények	39
5.4. Veszteségi teljesítmény vizsgálata	40
Összefoglalás	44
Irodalomjegyzék	47

Abstract

The main objective of this work is the development of a model for electromagnetic wave propagation considering spherical problems. An analytical approach is used, which makes the calculation to be fast and precise for design and validation purposes. The main application field is the modelling of electrically large objects, thus for millimeter long waves, where, e.g., the human body cannot be described by full-wave electromagnetic models, hence an approximate model or analytical approach is used. Based on this problem, this work gives a tool for the design and validation of the developing field of millimeter wave applications, i.e., the automotive RADAR or the new generation of mobile communication systems (5G).

The Mie-Debye-theorem is used for calculating the electromagnetic scattering of a sphere, which is extended to the multilayer case. The evaluation of this analytical approach has several numerical instabilities, which makes the precise calculation to be a challenge, thus this field is still subject of numerous ongoing research. For materials described by lossless dielectric properties, there are already some stable implementations even for electrically large spheres, however for lossy materials these methods cannot be used for precise and stable calculations.

Accordingly, the theory requires further development for calculating the scattering of lossy dielectric layered spheres, to which two methods are introduced in this work. Both are made with the main objective to estimate the final precision of the result, which is an important aspect for potentially instable calculations, however the existing implementations does not include this feature so far.

This work includes the review of the required theory, which is then developed further for the precision estimation. The implementation is done in Matlab environment. The model is then validated through an application example with comparing the results of numerical calculations (Finite element method). The human head model is used with the approximation of a two-layer sphere, where the brain tissues and the cranial bones are represented by homogeneous materials. Similar models are frequently used both in RADAR technique (Radar Cross Section, RCS) and in telecommunication (Specific Absorption Rate, SAR) measurements.

Kivonat

A dolgozatom célja egy analitikus módszer kidolgozása, amely elektromágneses hullámok gömbszimmetrikus testekről való szóródásának leírására alkalmas. A fő célterület az elektromosan nagyméretű tárgyak modellezése és szimulációja. Milliméteres hullámhosszak esetén már például az emberi test sem írható le teljes hullámtani modellekkel, így valamilyen közelítő módszert, illetve analitikus megközelítést kell alkalmazni. Ezek alapján a dolgozat egy modellezési eszközt javasol a fejlődésben lévő milliméteres hullámhosszakot alkalmazó technológiákhoz, úgy mint az autóiipari RADAR vagy az újgenerációs mobil távközlő (5G) rendszerek.

A gömbről való szóródás meghatározására a Mie-Debye-elméletet használom, és annak egy kiterjesztését sugár irányban rétegezett gömbök esetére. Az ehhez szükséges számítások numerikus hibája és instabilitása miatt a probléma a mai napig kutatás része. Veszteségmentes dielektromos gömbök esetére léteznek stabil implementációk elektromosan nagyméretű gömbökre is, viszont veszteséges anyagok esetén nem alkalmazhatóak pontos számításokhoz.

Ezek alapján további megfontolások szükségesek a veszteséges dielektromos gömbök szóródásának pontos számításához, melyre a dolgozatban két módszert mutatok be. Ezen módszerek célja, hogy az eredmény pontosságát előre tudjuk becsülni, amely egy lényeges kérdés numerikusan instabil számítások esetén, viszont az eddigi implementációk nem rendelkeznek ezzel.

A dolgozatban bemutatom a szükséges elméleti háttérrel, majd továbbfejleszttem azt a pontosság meghatározásához. Az implementációt Matlab környezetben végzem.

Az így kapott modellt ellenőrzéséhez egy alkalmazási példán keresztül végzek összehasonlításokat numerikus számítások eredményeivel (végeelem módszer). Erre a célra az emberi fejet modellező kétrétegű gömböt használom, amely egy homogén reprezentációja az agynak és a koponya csontoknak. Az ehhez hasonló vizsgálatok gyakoriak mind a mobil távközlés területén (Fajlagosan elnyelt teljesítmény, Specific Absorption Rate, SAR), mind a radartechnikában (Radarkeresztmetszet, Radar Cross Section, RCS).

1.

Bevezetés

A mikrohullámú távérzékelés egyik célja az objektumok megkülönböztetése, illetve felismerése az adott céltárgy által visszaszórt elektromágneses hullám alapján. Ezt az elvet számos technológia alkalmazza, melyek közül a legkorábbi a légi járművekhez köthető, habár alkalmazzák földi és vízi járműveken, geológiában, meteorológiában, csillagászatban és így tovább. Ezek összefoglaló elnevezése RADAR, avagy „RADio Detecting And Ranging”, és nagyjából a 3 MHz-300 GHz frekvencia tartományt fedik le [1].

1.1. Numerikus módszerek a szóródás vizsgálatára

A radar mérésekhez és tervezésekhez gyakran alkalmazunk valamilyen numerikus térszámítási módszert, amelyet mindig az adott problémához választunk. A modelltartomány ekkor általában nem az adót, a vevőt és az objektumot lefedő térre terjed ki, hanem valamilyen egyszerűsítő megfontolással élünk. Abban az esetben, ha kellően távol vagyunk az adótól és a vevőtől és az objektum méretei a hullámhossz nagyságrendjébe esnek, akkor használhatunk teljes hullámtani modellt (végeselem módszer/FEM, véges differencia módszer/FDTD), ahol a gerjesztést síkhullámnak tekintjük. Ha a céltárgy méretei sokkal nagyobbak, mint a hullámhossz, akkor alkalmazhatunk optikai közelítést (Ray Tracing), ekkor jó közelítéssel a céltárgy felületén a törési törvény szerint viselkedik a beeső hullám. A köztes esetben, amikor az objektum mérete nagy, viszont még nem adna jó eredményt az optikai közelítés, akkor használhatjuk az integrálegyenletek módszerét, ahol csupán a közegetárokat vesszük figyelembe (tartományonként homogén közegek esetén), és ezekre számoljuk ki a töltéeloszlást és az áramsűrűséget, ami egy tetszőleges beeső hullám esetén alakul ki (momentum módszer/MoM).

Az adott numerikus módszer alkalmazhatóságát minden esetben ellenőrizni szükséges. Erre egy módszer a laboratóriumi mérés, amely során egy mintahalmazra megmérjük a szórt teret, és összehasonlítjuk a numerikus módszer eredményeivel. Ennek előnye, hogy tetszőleges minta objektumot validálhatunk a mérésekkel, viszont a hátránya, hogy megfelelő környezet szükséges a méréshez, amely garantálja, hogy a megvilágítás főleg a céltárgyról verődjön vissza, amit gyakran reflexiómentesített kamrában, vagy szabadtéri mérőhelyeken tudnak elérni. A másik módszer, ha a az összehasonlításához egy olyan testet használunk, melynek az elektromágneses szórása analitikusan meghatározható. Ennek előnye, hogy pontos és gyors, hátránya a kis számú mintahalmaz és általában síkhullám megvilágításra ismert. Továbbá előfordulhatnak esetek, amikor a numerikus módszerrel nem tudjuk meghatározni a megoldást, ekkor analitikus úton kell megközelítenünk a problémát. Az analitikus megoldások közül a dielektromos és fém gömb a legismertebb, illetve ezen kívül egyszerűbb fém kanonikus testekre (téglatest, ellipszoid) ismertek még a megoldások, valamint a megvilágító hullámhossztól függően ismertek közelítő megoldások is [2, 3]. Az analitikus megoldás a numerikus módszer kezdeti hitelesítésére szolgálhat, a további pontosításhoz laboratóriumi mérések szükségesek. A továbbiakban az analitikus módszerrel történő validálással foglalkozunk.

1.2. Szóródás vizsgálata analitikus módon

A legjobban kidolgozott analitikus megoldás menete a gömb esetén ismert, tekintve, hogy a geometria egyszerűsége miatt egyszerűen tudjuk kezelni egy gömbszimmetrikus problémaként. A síkhullámmal megvilágított gömb elmélete 1862-re vezethető vissza Alfred Clebsch német matematikushoz, aki még a Maxwell-féle elektromágneses térelmélet elterjedése előtt adott megoldást a problémára, melyet a rugalmas terjedéshez használt hullámegyenletre vezetett vissza és fejtett ki, még a vektoranalízis elemeinek ismerete nélkül. Függetlenül hasonló eredményekre jutott 1871-ben Lord Rayleigh brit fizikus, illetve 1883-ban Ludvig Lorenz dán matematikus és fizikus. Viszont, az elméleti alapok eredete nem ezen szerzők nevéhez kötöten maradt fenn, ugyanis 1908-ban Gustav Mie német fizikus is publikálta az elméletet, amely az előzőekkel hasonló felépítést követett, viszont egy átfogó képet alkotott a problémáról, valamint számítási eredményeket is tartalmazott. Továbbá szintén 1908-ban Peter Debye holland fizikus publikált egy hasonlóan átfogó elméletet. Ezen kiegészítések miatt Mie és Debye nevéhez kötjük az elmélet megszületését [4, 5, 6]. Az analitikus módszer kiértékelése számítási problémákba ütközik, amelyet főleg elektromosan nagyméretű gömbök esetén tapasztalunk. Emiatt az utóbbi évszázadban számos publikáció született az algoritmus minél hatásosabb megoldhatóságáról, valamint a 21. század elejére már születtek olyan számítási módszerek, melyek az

elektromosan nagyméretű gömböket is kezelni tudják [7].

Az analitikus megoldások halmazának növelése érdekében, a homogén gömb modellje kiterjeszhető a Mie-Debye módszerrel, szimmetrikusan rétegzett esetre is. Az így kapott diszkrét rétegzett gömb analitikus megoldása 1951-ben merült fel Arthur L. Aden és Milton Kerker nevéhez köthetően. Az így kapott módszer ekkor még csak kisméretű gömbök esetén volt kiértékelhető, és csupán a távol-térre értelmezve, így a homogén gömbhöz hasonlóan ebben a témakörben is sorra jelentek meg az algoritmust pontosító publikációk, viszont az általános megoldási forma a mai napig a kutatás része [8]. A legfrissebb hozzájárulás egy Scattlnlay elnevezésű algoritmus, amelyet 2017-ben adtak közre a szerzők, és bevallásuk szerint egy általános megoldási forma, amely tetszőleges méretű rétegzett gömbre kiszámolja az elektromágneses közel-teret is [9]. Habár ezen analitikus megoldásokat is valahogyan hitelesíteni szükséges, kiváltképp amikor a számítás módjában felmerülhet a pontatlanság.

Ebben a munkában leszűkítjük a vizsgálatok körét a kétrétegű gömbre, és elektromosan nagyméretű gömbök esetén megvizsgáljuk az analitikus megoldás pontosságát, összehasonlítva az elérhető algoritmussal. Az ellenőrzésre egy módszer lehet valamilyen numerikus módszer eredményével való összevetés, amely első körben értelmetlennek tűnhet, ugyanis pont a numerikus módszert szeretnénk visszaellenőrizni, vagy esetleg kiváltani az analitikus megoldással. Ellenben vegyük észre, hogy az analitikus megoldás alkalmazhatóságáról csupán egyszer kell megbizonyosodnunk, amely ezután gyors eredményt szolgáltat. Ekkor, ha több módszer is hasonló eredményt ad, akkor helyesnek ítéelhetjük a megoldást.

Továbbá vannak esetek, amikor az elektromágneses közel-tér eloszlását nem tudjuk numerikus módszer segítségével ellenőrizni, ekkor valamilyen integrális mennyiséget érdemes vizsgálnunk. Erre lehet példa a gömb által elnyelt összteljesítmény vizsgálata, amely alapértelmezetten a tér ismeretében egy térfogati integrálással kapható meg. Viszont az analitikus megoldás ismeretében meg tudjuk kerülni a térfogati integrálást, és egy gyorsabban számolható alakot kapunk. Ez a forma homogén gömb esetén ismert [10], további célunk, hogy a kétrétegű gömbre is kifejezzük ezt az alakot.

Az így kapott analitikus megoldást a későbbiekben a radarkeresztmetszet fogalmának általánosításához használjuk, mint egy alap probléma, amelyen gyors számításokat lehet végezni.

* * *

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Bilicz Sándonak az útmutatásokért és a téma vezetéséért, valamint Dr. Badics Zsoltnak és Dr. Horváth Bálint Péternek a téma átlátásához nyújtott segítségükért és tanácsaikért.

2.

Síkhullám szóródása tetszőleges anyagú rétegzett gömbről

Az alábbiakban meghatározzuk egy tetszőleges anyagparaméterekkel jellemezhető sugár-irányban rétegzett gömb elektromágneses terét analitikus úton, síkhullám megvilágítás esetén. A feladat geometriájának jellegéből következően gömbi koordináta-rendszer szerint dolgozunk. A probléma során forrásmentes teret feltételezünk időben szinuszosan változó esetben, melyre a Maxwell-egyenletek következő formája írható fel:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.4)$$

amely differenciálegyenlet-rendszer lineáris, homogén, és izotrop anyagjellemzők esetén kifejezhető az elektromos és mágneses térre értelmezett hullámegyenletekkel:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0, \quad (2.5)$$

ahol a két térjellemző között a (2.1)–(2.4) által megadott tulajdonságok teremtenek kapcsolatot.

2.1. Hullámegyenlet megoldása (Mie–Debye-formula)

A (2.5) összefüggések három-három egyenletet definiálnak térkomponensekként, melyeket külön-külön lenne szükséges megoldani. Erre létezik egyszerűbb módszer is, melyben bevezetünk egy skalárpotenciált, így csökkentve a probléma számításigényét [5, 6, 11, 2]. Ehhez felírjuk a hullámegyenlet általános alakját, forrásmentes esetre:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0, \quad (2.6)$$

ekkor, alkothatunk egy $\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a}\psi)$ vektorteret, amelyet behelyettesítve a (2.6) hullámegyenletbe kapjuk:

$$\nabla \times [\mathbf{a}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)] = 0, \quad (2.7)$$

ahol ψ az úgynevezett Debye-potenciál és \mathbf{a} egy tetszőleges konstans egységvektor. Ebből látszik, ha a megjelenő skaláris hullámegyenlet nullával egyenlő, akkor az eredeti vektoriális hullámegyenlet is teljesül. Továbbá egy másik megoldást ad a $\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}$ vektortér, melyet behelyettesítve a (2.6) hullámegyenletbe szintén az előző formához hasonló alakot kapunk:

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}) = 0, \quad (2.8)$$

amelyből látjuk, hogy a vektoriális hullámegyenlet csak akkor teljesül, ha a skaláris is. Tehát kaptunk két megoldást, melyeket skalárpotenciál segítségével számolhatunk.

Továbbá látjuk, hogy \mathbf{M} és \mathbf{N} forrásmentes, valamint \mathbf{N} rotációjának képzésével kapjuk a két vektortér közötti másik kapcsolatot $\mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}$. Tehát a két vektortér megoldása a Maxwell-egyenleteknek, így ezek segítségével leírhatjuk az elektromos és mágneses teret, amihez definiálunk egy skalár-potenciálteret és egy konstans egységvektort, melyet az adott feladatban lévő szimmetriákhoz választunk.

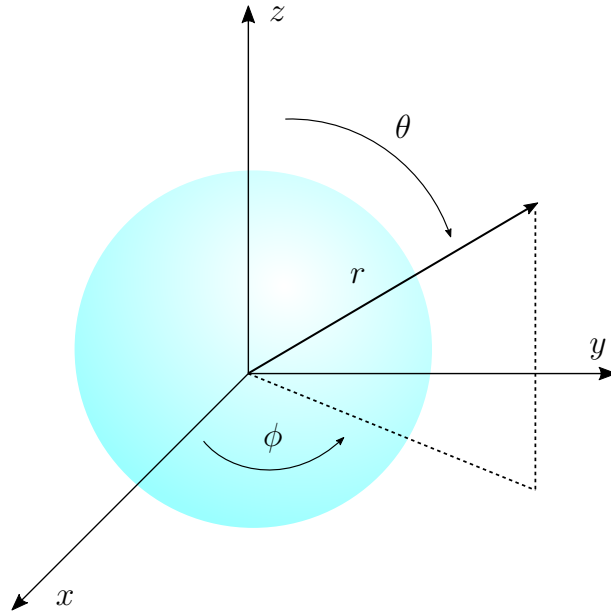
Tehát első lépésként a meghatározzuk a számunkra megfelelő potenciálteret (ezen okból kifolyólag ψ -t generátorfüggvénynek is nevezik), amihez a skaláris hullámegyenletet használjuk:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (2.9)$$

melyet gömbi koordináta-rendszerben (2.1) kifejtve a következő alakot kapjuk:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0, \quad (2.10)$$

ahol a megoldást koordináták szerint függvények szorzataként feltételezzük:



2.1. ábra. Gömbi koordináta-rendszer

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.11)$$

így változók szerint szeparálva a differenciálegyenletet a következő három egyenletre jutunk:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] f = 0, \quad (2.12a)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \left[n(n+1) - \left(\frac{m}{\sin \theta} \right)^2 \right] g = 0, \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} + m^2 h = 0, \quad (2.12c)$$

ahol a (2.12a) alakja a Bessel-féle differenciálegyenlethez hasonlítható, a (2.12b) alakja a Legendre-féle differenciálegyenlethez, illetve a (2.12c) egy másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet. Továbbá az n és m paraméterek a szeparálásból származó konstansok.

A Bessel-féle differenciálegyenlet (2.12a) megoldásai a gömbi Bessel-függvényekkel írhatóak le, melyek az n -től függően végtelen sok lineárisan független megoldást adnak, illetve ezek közül megkülönböztetjük a j_n első-, és az y_n másodrendű Bessel-függvényeket, melyek kiválasztása az adott feladat geometriájától és paramétereitől függ. Ezen függvények a sugárirányú leírását adják a térnek. Ezeket általánosan $z_n(kr)$ formával jelöljük.

Hasonló módon a Legendre-féle differenciálegyenlet megoldásai Legendre-függvények, me-

lyek szintén n és m függvényében lineárisan független megoldásokat szolgáltatnak, ahol $m = 0, 1, 2, \dots$, valamint $n = m, m + 1, \dots$, jelölése $P_n^m(\cos \theta)$.

Továbbá a másodrendű differenciálegyenlet a (2.12c) megoldásai $\sin(m\phi)$ (páratlan) és $\cos(m\phi)$ (páros) függvények, melyek argumentumukban függenek m -től.

Tehát a skaláris hullámeqyenlet (2.10) megoldása gömbi koordináták esetén a következő formában áll elő:

$$\psi_{emn} = \cos(m\phi)P_n^m(\cos \theta)z_n(kr), \quad (2.13a)$$

$$\psi_{omn} = \sin(m\phi)P_n^m(\cos \theta)z_n(kr), \quad (2.13b)$$

ahol az e jelöli a páros (even) és o a páratlan (odd) megoldásokat, továbbá értelem szerűen m és n pozitív egész számok. Ezen alak ismeretében ki tudjuk fejezni az \mathbf{M} és \mathbf{N} vektoriális függvényeket:

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a}\psi), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times (\mathbf{M}), \quad (2.14)$$

ahol a konstans vektor tetszőlegesen megválasztható. Ehhez gömbi koordináta-rendszerben élhetünk az $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ választással, habár a radiális egységvektor nem konstans, de a probléma szimmetriája miatt (gömb esetén) helyes megoldáshoz juttat. Ezen a formában partikuláris megoldásokhoz jutunk, melyek lineárisan függetlenek, így a teljes tér ezen független megoldások lineáris kombinációjaként írható le:

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{emn} \mathbf{M}_{emn} + B_{omn} \mathbf{M}_{omn} + A_{emn} \mathbf{N}_{emn} + A_{omn} \mathbf{N}_{omn}), \quad (2.15)$$

ahol az A és B együtthatókat az adott feladat paraméterei és peremfeltételei alapján határozzuk meg. A továbbiakban a két bevezetett vektorteret vektoriális gömbi harmonikusoknak nevezük, vagy az angolszász elnevezés szerinti Vector Spherical Harmonics (VSH) elnevezéssel élünk.

2.2. Beeső, szórt, és belső tér meghatározása homogén gömb esetén

A vizsgált probléma egy gömbről való szóródás vizsgálata síkhullám megvilágítás esetén, ahol egy z irányban terjedő beeső hullámot feltételezünk, amely x irányban polarizált:

$$\mathbf{E}^i = E_0 e^{-jkz} \hat{\mathbf{e}}_x = E_0 e^{-jkr \cos \theta} (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi), \quad (2.16)$$

amely kifejezhető (2.15) felbontás használatával. Ehhez (2.14) alapján meghatározhatjuk az egyes vektoriális harmonikusok koordináták szerinti komponenseit:

$$\mathbf{M}_{emn} = \frac{-m}{\sin \theta} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} z_n(kr) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{M}_{omn} = \frac{m}{\sin \theta} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \frac{z_n(kr)}{kr} \hat{\mathbf{e}}_r - \sin(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} z_n(kr) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.16b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{emn} &= \cos(m\phi) n(n+1) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \hat{\mathbf{e}}_r \\ &+ \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [kr z_n(kr)] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &- m \sin(m\phi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [kr z_n(kr)] \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned} \quad (2.16c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{omn} &= \sin(m\phi) n(n+1) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr) \hat{\mathbf{e}}_r \\ &+ \sin(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [kr z_n(kr)] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &- m \cos(m\phi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [kr z_n(kr)] \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (2.16d)$$

amiből látható, hogy az \mathbf{M}_{emn} és az \mathbf{N}_{omn} kifejezésében a ϕ változó koszinusz függvényeként szerepel, amíg (2.16) definíciója szerint szinusz alakban várnánk. Tehát az említett két vektoriális harmonikus függvénycsalád nem szerepelhet a beeső síkhullám kifejezésében. Hasonló okból csupán az $m = 1$ rendű Legendre-függvények felelnek meg a (2.16) alakhoz, így a következő egyszerűsített alakhoz jutunk:

$$\mathbf{E}_{inc} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_{o1n} \mathbf{M}_{o1n} + A_{e1n} \mathbf{N}_{e1n}). \quad (2.17)$$

Az együtthatók meghatározásához kihasználjuk, hogy a vektoriális harmonikusok egymásra és különböző n értékek és paritás esetén önmagukra is ortogonálisak. Tehát, a B együttható számításához képezzük a következő szorzat integrálját:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_{inc} \mathbf{M}_{o1j} d\theta d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (B_{o1n} \mathbf{M}_{o1n} \mathbf{M}_{o1j} + A_{e1n} \mathbf{N}_{e1n} \mathbf{M}_{o1j}) d\theta d\phi, \quad (2.18)$$

amiből láthatjuk, hogy csak a $n = j$ esetén a \mathbf{M}_{o1n} tag marad meg, így a következő kifejezést kapjuk:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_{inc} \mathbf{M}_{o1j} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_{o1j} |\mathbf{M}_{o1j}|^2 d\theta d\phi, \quad (2.19)$$

ahol a B_{o1j} egy konstans, így kifejezhető a két integrál hányadosaként. Továbbá, hasonló módon járunk el A_{e1j} esetén is. Így a következő együtthatókat kapjuk:

$$A_{e1n} = -iB_{o1n} = -iE_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (2.20)$$

A Bessel-függvény definiálása szükséges még a $z_n(kr)$ általános alakhoz, melyhez az elsőrendű Bessel-függvényt (y_n) tudjuk alkalmazni, ugyanis csak ennél a rangnál vesz fel véges értéket a függvény az origóban, amely szükséges az adott problémához, ahol egy síkhullámot tárgyalunk. Tehát kifejezve a beeső síkhullám elektromos tere:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}), \quad (2.21)$$

ahol a (1) jelölés az alkalmazott Bessel-függvény rangjára utal. A mágneses térvektor kifejezéséhez a (2.1) Faraday-törvényt használjuk:

$$\mathbf{H}_{inc} = -\frac{k}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + i\mathbf{N}_{o1n}^{(1)}), \quad (2.22)$$

ahol a rotáció művelet hatására a vektoriális harmonikusok is változnak (2.14) szerint, továbbá μ a gömböt körbevevő közeg permeabilitása. A továbbiakban a következő rövidítéssel élünk:

$$E_n = E_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (2.23)$$

A beeső síkhullám ismeretében meg tudjuk határozni a létrejövő teret a gömb belsejében, illetve a szórt teret. Ehhez a folytonossági feltételeket használjuk az anyaghatárokon:

$$[\underbrace{(\mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{scatt})}_{ext} - \mathbf{E}_{int}] \times \hat{\mathbf{e}}_r = [\underbrace{(\mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{scatt})}_{ext} - \mathbf{H}_{int}] \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0, \quad (2.24)$$

tehát a tangenciális komponensei a térnek folytonosak a közeghatáron. A szórt és belső tér alakjának meghatározásához felhasználjuk, hogy a vektoriális harmonikusok egymásra és önmaguk különböző rangjaira ortogonálisak, így, ha lineáris közeget feltételezünk, akkor a belső és szórt teret is a gerjesztő tér formájában keressük. Másképp megfogalmazva, a belső és szórt teret fel tudjuk írni a gerjesztő teret leíró vektoriális harmonikusok által alkotott bázis lineáris kombinációjaként. Illetve ehhez figyelembe vesszük a folytonossági feltételt (2.24) is. Továbbá, hasonló módon, mint a síkhullám tárgyalásánál, a belső térnél feltételezzük, hogy az origóban véges értéket vesz fel, így hasonló módon az elsőrendű Bessel-függvényeket alkalmazzuk.

A szórt tér esetén nincs ilyen megkötés a függvények korlátosságára, így tetszőleges formát használunk, amely az első és másodrendű Bessel-függvényeket is tartalmaz, csupán annyi megkötéssel, hogy nagy távolságban a gömbtől terjedő hullámként viselkedjen a szórt tér, mely egy speciális eset, így Hankel-függvényként ($j_n + iy_n$) hivatkozunk rá, illetve harmadrendű Bessel-függvénynek is nevezik. Ekkor a következő alakban írhatjuk fel a teret:

$$\mathbf{E}_{int} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (c_n \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - id_n \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}), \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{H}_{int} = -\frac{k_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ic_n \mathbf{N}_{o1n}^{(1)} + d_n \mathbf{M}_{e1n}^{(1)}), \quad (2.25b)$$

$$\mathbf{E}_{scatt} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)}), \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{H}_{scatt} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (a_n \mathbf{M}_{e1n}^{(3)} + ib_n \mathbf{N}_{o1n}^{(3)}), \quad (2.26b)$$

ahol a mágneses tér szintén a (2.1) a Faraday-törvény segítségével számolható. A következő feladat az együtthatók meghatározása a folytonossági egyenletek segítségével alkotott egyenletrendszer segítségével.

2.3. Szimmetrikusan rétegzett gömb esete

Az első elmélet, amely a Mie–Debye-formula több közeghatárra való kibővítésével foglalkozik Aden és Kerker nevéhez köthető [12]. A (2.25) és a (2.26) belső és szórt tér formájának meghatározásához hasonlóan itt is megsejtjük a tér viselkedését a köztes közegben. Mivel a gömb köpenyében a tér véges értéket vesz fel, de itt már nem kell feltenni, hogy a végtelen távolban haladó hullámként viselkedik, így csupán egy általános formát adhatunk, melyben mind az első és másodfajú Bessel-függvény szerepel, viszont nincs köztük a fentebb említett speciális kapcsolat, így nem a Hankel-függvényen belül kezeljük őket, hanem függetlenül. Ez azt jelenti, hogy a tér kifejezésénél szerepeltetni kellene az elsőfajú (j_n) Bessel-függvényeket tartalmazó vektoriális harmonikusokat ($\mathbf{M}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(1)}$), illetve a másodfajúakat (y_n), ($\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(2)}$) is, így alkotva egy megfelelő bázist. Létezik olyan megközelítés, amely ezen logika szerint halad [13], viszont most az eredeti elméletre alapozunk [12]. Célszerűbbnek tűnik az a megoldás, hogy ne vezessünk be egy újabb típusú vektoriális harmonikust ($\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(2)}$), ugyanis a

Hankel-függvény ($j_n + iy_n$) természetesen tartalmazza a másodrendű Bessel-függvényt is, így ennek segítségével is felépíthetjük a teret, csupán a tag együtthatójában lesz különbség. Így a köztes rétegben létrejövő elektromos és mágneses teret a következő formában feltételezzük:

$$\mathbf{E}_{shell} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(a_n^{(1)} \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - ib_n^{(1)} \mathbf{N}_{e1n}^{(1)} + a_n^{(3)} \mathbf{M}_{o1n}^{(3)} - ib_n^{(3)} \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} \right), \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{H}_{shell} = -\frac{k_2}{\omega\mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(ia_n^{(1)} \mathbf{N}_{o1n}^{(1)} + b_n^{(1)} \mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + ia_n^{(3)} \mathbf{N}_{o1n}^{(3)} + b_n^{(3)} \mathbf{M}_{e1n}^{(3)} \right). \quad (2.27b)$$

2.4. Az elektromos és mágneses tér felépítése

Az együtthatók ismeretében a (2.17) vektoriális harmonikusok és a (2.25), (2.26) és (2.27) összefüggések alapján össze tudjuk állítani az elektromos és a mágneses teret.

A (2.17) összefüggésekben szerepel a Legendre-függvény is, melynek $m = 1$ fajtához szükségünk van az egész rendszámú tagjaira ($n = 1 \dots n_{max}$). Ennek számolásához kihasználhatjuk a Legendre-függvények rekurzív előállíthatóságát a nála kisebb rendszámú tagok ismeretében [14]. Továbbá érdemes a θ szögtől függő tagokat összevonni az egyszerűség kedvéért, így a következő függvényeket kapjuk [2]:

$$\pi_n = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad \tau_n = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (2.28)$$

melyekre a következő rekurzív összefüggés igaz:

$$\pi_n = \frac{2n-1}{n-1} \cos \theta \pi_{n-1} - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2}, \quad (2.29)$$

$$\tau_n = n \cos \theta \pi_n - (n+1) \pi_{n-1}, \quad (2.30)$$

$$\pi_0 = 0, \quad \pi_1 = 1. \quad (2.31)$$

Az így meghatározott térkomponenseket érdemes visszaalakítani Descartes-féle koordináta-rendszerbe az ábrázolhatóság kedvéért.

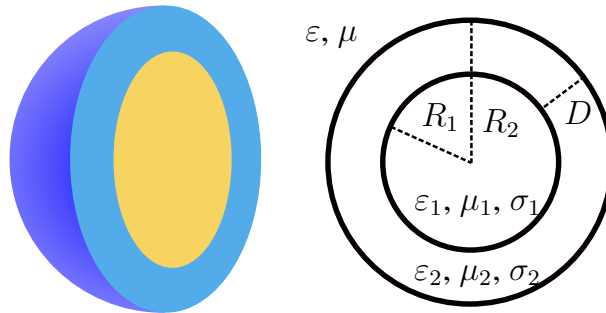
A gömb belsejében lévő téreloszlás ellenőrzése történhet valamilyen teljes hullámtani numerikus módszer segítségével, viszont nagy méretű vagy nagy permittivitású gömbök esetén ezek a numerikus módszerek sajnos nem alkalmazhatóak. Az ellenőrzéshez egy másik módszer lehet, ha egy eltérő elven működő analitikus megoldással hasonlítjuk össze, viszont sajnos jelenleg csak az említett Scattnlay nevű program elérhető, amely ugyanezen elméleti megfontolásokra alapoz.

Az algoritmus implementálásához felhasználtam a tanszéken elérhető MATLAB algoritmust [15], amely homogén gömb esetén számolja ki az elektromágneses térkomponenseket. Az említett algoritmus keretébe építettem be az új térkomponensek számítását, amely felhasználja a saját együttható számító algoritmusomat.

3.

Szóródási együtthatók meghatározása

A folytonossági feltételek (2.24) segítségével alkothatunk egy egyenletrendszer, amiből az együtthatók meghatározhatóak. A továbbiakban egy olyan rétegzett gömböt tekintünk, amely egy magból és egy gömbhéjból áll (3.1 ábra).



3.1. ábra. Rétegzett gömb szerkezete

Így koordinátánként felírjuk az egyenleteket a (2.21), (2.25), (2.26) teret leíró összefüggések alapján, illetve a (2.13) kifejezések segítségével. Továbbá figyelembe vesszük, hogy a teret végtelen sok vektoriális harmonikusból állítjuk elő, melyek a fenti elmélet alapján önmagukban is megoldásai a Maxwell-egyenleteknek, így külön módusonként tekinthetünk rájuk, tehát a folytonossági egyenletet minden n értékre és vektoriális harmonikus alakra (\mathbf{M} , \mathbf{N}) felírhatjuk. A mag és a gömbhéj közti határra a következő összefüggéseket kapjuk:

$$c_n j_n(k_1 R_1) = a_n^{(1)} j_n(k_2 R_1) + a_n^{(3)} h_n(k_2 R_1), \quad (3.1a)$$

$$d_n \frac{1}{k_1 R_1} \frac{d}{dr} [r j_n(k_1 r)]_{r=R_1} = b_n^{(1)} \frac{1}{k_2 R_1} \frac{d}{dr} [r j_n(k_2 r)]_{r=R_1} + b_n^{(3)} \frac{1}{k_2 R_1} \frac{d}{dr} [r h_n(k_2 r)]_{r=R_1}, \quad (3.1b)$$

$$\frac{k_1}{\mu_1} d_n j_n(k_1 R_1) = \frac{k_2}{\mu_2} b_n^{(1)} j_n(k_2 R_1) + \frac{k_2}{\mu_2} b_n^{(3)} h_n(k_2 R_1), \quad (3.1c)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{\mu_1} c_n \frac{1}{k_1 R_1} \frac{d}{dr} [r j_n(k_1 r)]_{r=R_1} &= \frac{k_2}{\mu_2} a_n^{(1)} \frac{1}{k_2 R_1} \frac{d}{dr} [r j_n(k_2 r)]_{r=R_1} + \\ &+ \frac{k_2}{\mu_2} a_n^{(3)} \frac{1}{k_2 R_1} \frac{d}{dr} [r h_n(k_2 r)]_{r=R_1}, \end{aligned} \quad (3.1d)$$

ahol (3.1a) az elektromos tér \mathbf{M} komponenseiből áll (a θ és ϕ szerinti tagok ugyanazt az összefüggést adják), továbbá a (3.1b) az elektromos tér \mathbf{N} komponenseiből, valamint a mágneses tér esetén a (3.1c) tartozik \mathbf{M} -hoz, és a (3.1d) az \mathbf{N} -hez.

A gömbhéj és a külső közeg által alkotott határra hasonló módon a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$a_n^{(1)} j_n(k_2 R_2) + a_n^{(3)} h_n(k_2 R_2) = j_n(k R_2) - b_n h_n(k R_2), \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} b_n^{(1)} \frac{1}{k_2 R_2} \frac{d}{dr} [r j_n(k_2 r)]_{r=R_2} + b_n^{(3)} \frac{1}{k_2 R_2} \frac{d}{dr} [r h_n(k_2 r)]_{r=R_2} &= \\ = \frac{1}{k R_2} \frac{d}{dr} [r j_n(k r)]_{r=R_2} - a_n \frac{1}{k R_2} \frac{d}{dr} [r h_n(k r)]_{r=R_2}, \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\frac{k_2}{\mu_2} b_n^{(1)} j_n(k_2 R_2) + \frac{k_2}{\mu_2} b_n^{(3)} h_n(k_2 R_2) = \frac{k}{\mu} j_n(k R_2) - \frac{k}{\mu} a_n h_n(k R_2), \quad (3.2c)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{\mu_2} a_n^{(1)} \frac{1}{k_2 R_2} \frac{d}{dr} [r j_n(k_2 r)]_{r=R_2} + \frac{k_2}{\mu_2} a_n^{(3)} \frac{1}{k_2 R_2} \frac{d}{dr} [r h_n(k_2 r)]_{r=R_2} &= \\ = \frac{k}{\mu} \frac{1}{k R_2} \frac{d}{dr} [r j_n(k r)]_{r=R_2} - \frac{k}{\mu} b_n \frac{1}{k R_2} \frac{d}{dr} [r h_n(k r)]_{r=R_2}, \end{aligned} \quad (3.2d)$$

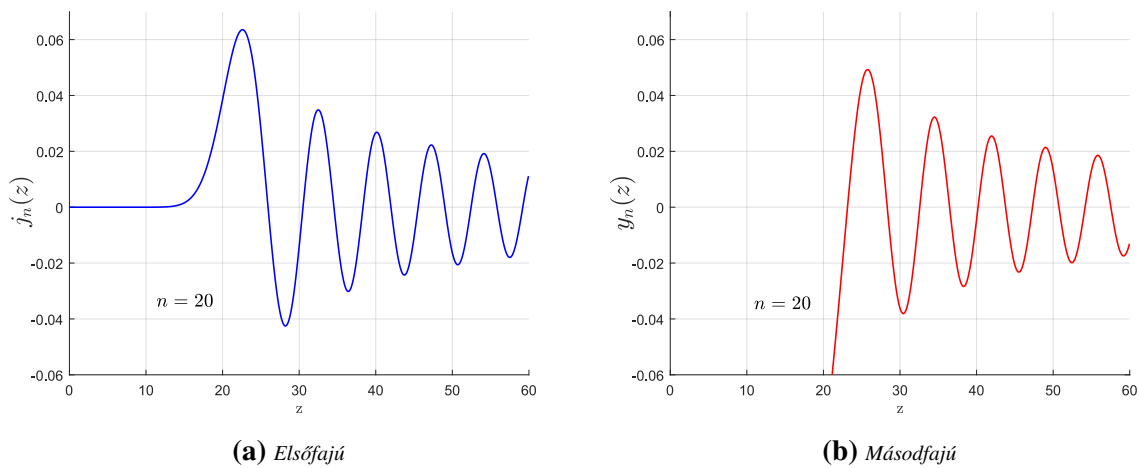
melyeket az előzőhöz hasonló módon alkottunk. Így kapunk egy nyolc egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, nyolc ismeretlennel.

Célszerűnek tűnhet a megoldás, hogy a fenti egyenletrendszert a 8 ismeretlenre megoldjuk, valamilyen ismert módszer segítségével. Viszont, ha ezen a módon próbálkozunk, akkor hamar belátjuk, hogy ez a módszer nem használható, ugyanis a fenti egyenletet leíró rendszermátrix kondíciószáma nagy értékeket vesz fel, így pontatlan vagy éppen szinguláris eredményt kapunk. Ezen okból más megközelítést kell alkalmaznunk.

3.1. A függvények kiértékelése

A fenti egyenletrendszer nehézkes kiértékelésének megértéséhez érdemes áttekinteni a felhasznált Bessel-függvények viselkedését. Az előzőekben említettek szerint, a jelen problémát részben egy Bessel-féle differenciálegyenlettel tudjuk jellemezni, amely megoldásai a göm-

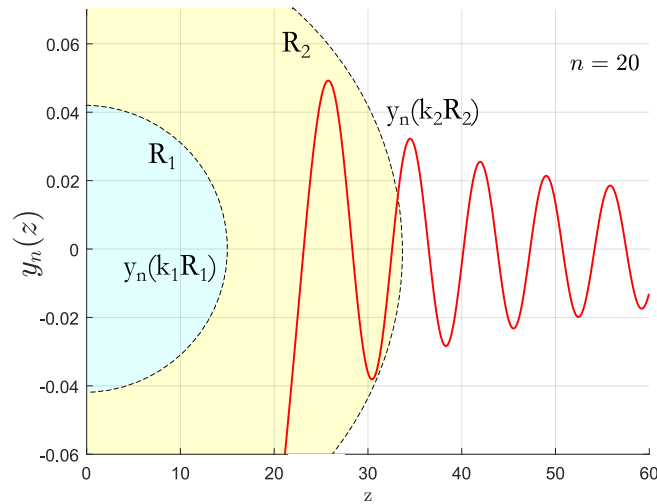
bi Bessel-függvények, az adott problémánál. Ezek közül megkülönböztetünk elsőfajú ($j_n(z)$) és másodfajú ($y_n(z)$) típusokat, továbbá az ezekből konstruált Hankel-függvényt ($h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z)$), mely valósrésze az elsőfajú, illetve a képzetes része a másodfajú Bessel-függvény. A 3.2 ábra szemlélteti ezen függvények viselkedését. Abban az esetben, ha a függvény z argumentuma kisebb az n rendfokozatnál, akkor az elsőfajú esetben közel nulla értéket kapunk, viszont a másodfajúnál ez az érték nem véges, ezért az úgynevezett „kis argumentumú” viselkedésnél jellemzően fellépnek számolási problémák. Többek között az fentebb megemlített lineáris egyenletrendszer is ezen okokból nem tudjuk megoldani. Ez a problémás viselkedés, ugyanúgy igaz a Bessel-függvények deriváltjaira is, melyek szintén hasonló alakot vesznek fel, megegyező kis argumentumú viselkedéssel.



3.2. ábra. Bessel-függvények alakja $n = 20$ rendű esetben

A probléma ott merül fel a rétegzett gömb terének leírásában, hogy a kapott egyenletrendszerben ugyanazon rendű Bessel-függvényeket más-más argumentumra is ki kell fejezni, így előfordul az eset, hogy az egyik egyenletben szereplő függvények nagy-argumentummal szerepelnek, és véges értéket adnak, a másikban pedig kis-argumentummal és nagy értéket vesznek fel ($h_n(z)$). Ennek oka, hogy több közegetárra (sugárra) értelmezzük az egyenleteket, ahol az argumentumban lévő kR úgynevezett „méret paraméter” más értékeket vesz fel (3.3 ábra).

A probléma feloldásához egy jó megközelítés, ha a fenti egyenletrendszer átrendezzük egy olyan alakra, ahol a különféle Bessel-függvények és deriváltjaik hányadosa is szerepel, ugyanis ezek már jobban kezelhetők. Ez látszódhat abból is, hogy ha vesszük az elsőfajú és másodfajú függvények hányadosát, akkor kis argumentumok esetén is véges, nulla értéket kapunk. Ezen megközelítést alkalmazzák már a legelső többrétegű Mie-formula elméleteknél [16, 17], ahol az együtthatók kifejezése után az előbb említett függvény-hányados alakokat kapjuk. Habár ez a



3.3. ábra. Számítási nehézségek többrétegű gömb esetén

megoldási forma nem minden esetben stabil, illetve csupán távolteri számolásokhoz alkalmazták, kisméretű részecskék esetén. Közben születtek olyan implementációk, melyek a rétegek közötti terjedést átviteli-mátrixok segítségével oldják meg [18, 19], viszont ezen megoldások is csupán távolteri tulajdonságok meghatározásához megfelelőek, nagyméretű gömbök esetén már nem alkalmazhatóak. A szórt tér stabil meghatározásához ad megközelítést Wu és Wang 1991-es cikke [13], melyben több lépésben, rekurzív úton meghatározzák a szórt tér együtthatóit, különválasztva az egyes közegek közötti rétegekre leírt Bessel-függvényeket, így már a hullámhosszhoz képest nagyobb gömböket is tudja kezelni az algoritmus, habár még mindig csak távolteri tulajdonságokat definiálnak az elért eredményekből. Ennek a szemléletnek a kibővítésére születtek további cikkek [20, 21, 22], melyekben a belső tér együtthatói is kifejezésre kerülnek, valamint további számítási pontatlanságokat küszöbölnék ki, de csak a távolteri tulajdonságokkal foglalkoznak.

Az utóbbiak alapján megfigyelhető, hogy a több mint egy évszázada született elmélet implementálására számos tudományos munka született, melyek közül csak a kiemelkedőbbeket említettem. Ezek az implementációk mindegyike hivatkozik valamilyen számításbeli előrelépésre, viszont a számítási kapacitás és az elmélet fejlettsége a 2000-es évek elején érkezett a kellő szintre ahhoz, hogy általánosan tetszőleges gömb sugárja és anyagparaméterre meg tudjuk határozni az elektromágneses közteret is. Ezzel kapcsolatban Shore készített egy kiváló összefoglalót a rekurzív algoritmus tárgyalásával [8], valamint Ericsson a lehetséges alkalmazásokat is áttekinti [23]. A rekurzív megközelítéssel Ladutenko és társai közreadtak egy implementációt 2017-ben, amely képes a rétegzett gömb külső és belső terének együtthatóink meghatározásá-

ra, majd ebből a köztér és távolterti tulajdonságok meghatározására. A szerzők szerint az implementáció a köztérre is stabil és pontos eredményt szolgáltat, melyet pár összehasonlító számolással ellenőriztek. Az implementáció szabadon hozzáférhető online, illetve C++ nyelven íródott és Phyton környezetben használható (Scattnlay V2.0.1 [24]).

Az előbb említett implementációban az együtthatók meghatározásához való kifejezések ugyanúgy tartalmazznak szinguláris helyeket, annak ellenére, hogy a szerzők próbálnak függvényhányados alakkal dolgozni, illetve rekurzív módszert alkalmaznak. A probléma akkor jelentkezik, ha a rétegek anyaga veszteséges dielektrikum, ugyanis ekkor az anyagparaméterek képzetes része összehasonlíthatóvá válik a valós résszel, vagy épp meghaladja azt. A programban ezt egy kibővített matematikai eszköztárral próbálják megoldani, amely kellő pontosságot ad ezen szinguláris értékek környékén való számoláshoz is.

A jelen munkában két rétegű gömb esetén határozzuk meg a teret, melyhez az utóbb említett rekurzív megközelítést használjuk, majd az így kapott összefüggéseknek megkeressük a szinguláris helyeken felvett határértékét, és ezeket kivételek formájában implementáljuk. Ez a megközelítés, bonyolultabb algoritmust eredményez, viszont kisebb számítási pontosság felhasználásával is pontos eredményt szolgáltat.

3.2. Algoritmus

A következőekben a (3.1) és a (3.2) egyenletrendszereket alakítjuk át. Ehhez bevezetjük a következő egyszerűsítő szimbólumokat:

$$j_{ij} = j_n(k_i R_j), \quad h_{ij} = h_n(k_i R_j), \quad (3.3)$$

$$J_{ij} = \frac{1}{k_i R_j} \frac{d}{dr} [r j_n(k_i r)]_{r=R_j}, \quad H_{ij} = \frac{1}{k_i R_j} \frac{d}{dr} [r h_n(k_i r)]_{r=R_j}, \quad (3.4)$$

$$K_i = \frac{k_i}{\mu_i} \quad (3.5)$$

továbbá az n függést az egyszerűség kedvéért elrejtjük, mivel az egyenletrendszert mindig egy adott n értékre számoljuk. Ekkor, ha a (3.1d) és a (3.1a) egyenletek hányadosát vesszük, akkor a c együttható kiesik, és az $a^{(1)}$, $a^{(3)}$ köztes réteget jellemző együtthatók maradnak, melyet átrendezhetünk a következő formára:

$$K_1 \frac{J_{11}}{j_{11}} = K_2 \frac{J_{21} + \frac{a^{(3)}}{a^{(1)}} H_{21}}{j_{21} + \frac{a^{(3)}}{a^{(1)}} h_{21}}. \quad (3.6)$$

Hasonló módon járunk el a másik közegetháron az $a^{(1)}$ és $a^{(3)}$ tartalmazó egyenletekkel ((3.2d), (3.2a)), amiből a következő összefüggést kapjuk:

$$K_2 \frac{J_{22} + \frac{a^{(3)}}{a^{(1)}} H_{22}}{j_{22} + \frac{a^{(3)}}{a^{(1)}} h_{22}} = K_0 \frac{J_{02} + b H_{02}}{j_{02} + b h_{02}}, \quad (3.7)$$

amiből látható, hogy az $\frac{a^{(3)}}{a^{(1)}}$ bevezetésével meg tudjuk határozni b -t, vagyis a szórt tér egyik együttthatóját, amihez nem volt szükségünk a többi együtttható ismeretére. Ekkor, ha bevezetjük az $A = \frac{a^{(3)}}{a^{(1)}}$ szimbólumot, akkor a (3.6) és a (3.7) átalakítva:

$$A = \frac{j_{21} \frac{J_{21}}{j_{21}} - \frac{K_1}{K_2} \frac{J_{11}}{j_{11}}}{h_{21} \frac{K_1}{K_2} \frac{J_{11}}{j_{11}} - \frac{H_{21}}{h_{21}}}, \quad (3.8)$$

$$G = \frac{J_{22} + H_{22} A}{j_{22} + h_{22} A}, \quad (3.9)$$

$$b = \frac{j_{02} \frac{K_2}{K_0} G - \frac{J_{02}}{j_{02}}}{h_{02} \frac{K_2}{K_0} G - \frac{H_{02}}{h_{02}}}, \quad (3.10)$$

melyekben szerepelnek a Bessel-függvény hatványok: $\frac{J}{j}$ és $\frac{H}{h}$, vagyis a derivált és a függvény hányadosa, más néven a logaritmikus derivált. Továbbá a $\frac{j}{h}$ és $\frac{J}{H}$ alakok, melyek különböző Bessel-függvények és deriváltjaik hányadosa. Ezen függvények viselkedése a 3.4 ábrán látható, ahol észrevesszük, hogy a logaritmikus derivált alakú hányadosok még mindig tartalmaznak szinguláris helyeket (sőt a $\frac{J}{j}$ alaknál, valóban rosszabb helyzetet feltételezünk), viszont ezen szinguláris értékek közelében nem változik olyan mértékben a függvény, mint az eredeti másodfajú Bessel-függvény esetében (Hankel-függvény képzetes része), ahol az n rendfoknál kisebb argumentumok már kiértékelhetetlen méretet vesznek fel. Az új függvénycsaládban megjelent szinguláris értékeket le tudjuk kezelni kivételekként, ahol megkeressük a határértéket.

A logaritmikus deriváltak esetén a kis argumentumú viselkedést ($z \ll n$) a következő módon határozhatjuk meg:

$$\frac{J_n(z)}{j_n(z)} = \frac{\frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z j_n(z)]}{j_n(z)} = \frac{1}{z} + \frac{d j_n(z)}{dz} \frac{1}{j_n(z)}, \quad (3.11)$$

valamint kihasználva a gömbi Bessel-függvényekre használt derivált összefüggést [14]:

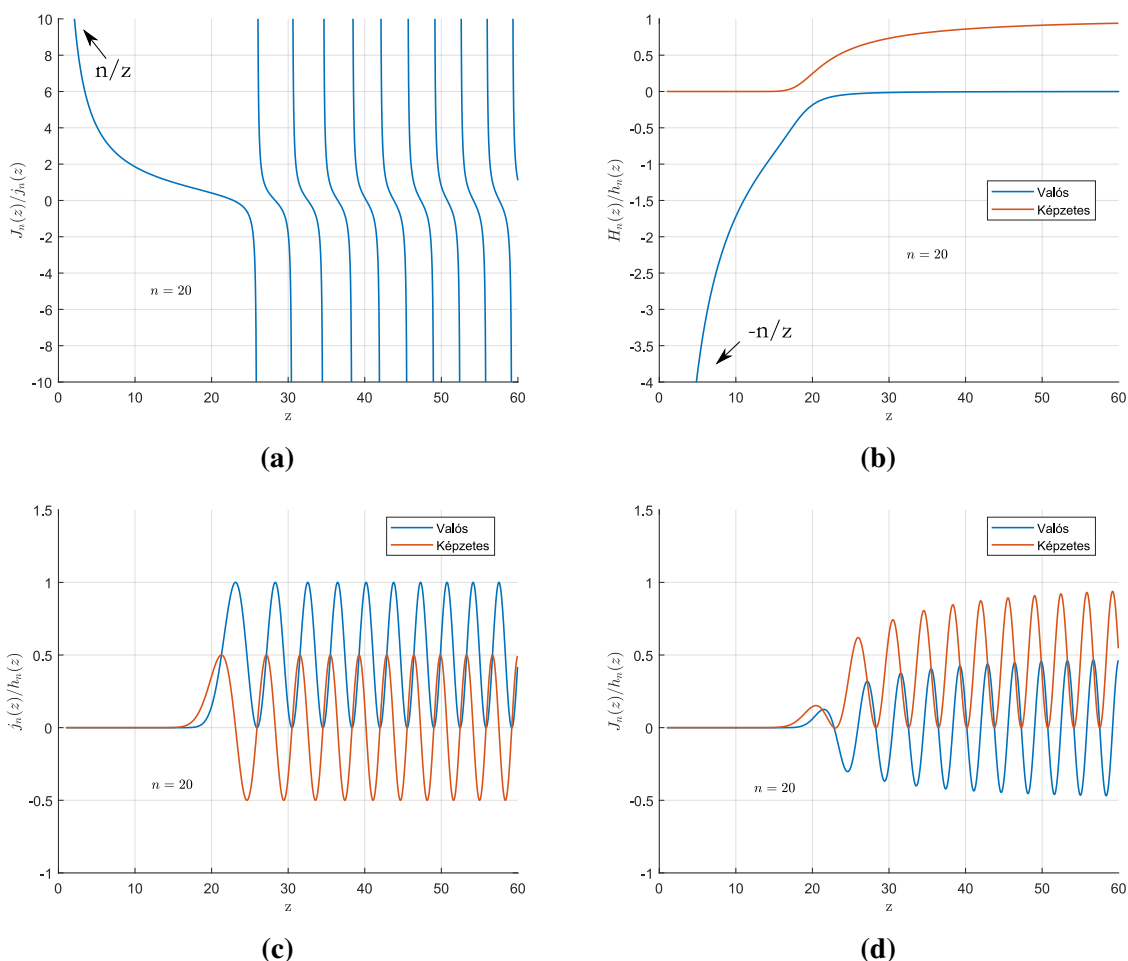
$$\frac{d j_n(z)}{dz} = j_{n-1}(z) - \frac{n+1}{z} j_n(z), \quad (3.12)$$

így kapjuk, hogy

$$\frac{J_n(z)}{j_n(z)} = \frac{j_{n-1}(z)}{j_n(z)} - \frac{n}{z} \approx \frac{2n}{z} - \frac{n}{z} = \frac{n}{z} \quad z \ll n, \quad (3.13)$$

ahol felhasználtuk a [25]-ben tárgyalt kis argumentumú közelítést. A Hankel-függvények hányadosát hasonló módon határozhatjuk meg:

$$\Re \frac{H_n(z)}{h_n(z)} = \Re \frac{\frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z h_n(z)]}{h_n(z)} = -\frac{n}{z} \quad z \ll n. \quad (3.14)$$



3.4. ábra. Bessel-függvények hányados alakjai $n = 20$ rendű esetben

A határértékek meghatározás előtt fejezzük ki a Mie–Debye-formula további együtthatóit. A szórt tér másik együtthatójának meghatározásához az előzőek szerint járunk el, csupán azokkal az egyenletpárokkal dolgozunk, melyek a $b^{(1)}$ és $b^{(3)}$ együtthatókat tartalmazzák. Így a követ-

kező (az előzőhöz nagyon hasonló) összefüggéseket kapjuk:

$$B = \frac{j_{21} \frac{J_{21}}{j_{21}} - \frac{K_2}{K_1} \frac{J_{11}}{j_{11}}}{h_{21} \frac{K_2}{K_1} \frac{J_{11}}{j_{11}} - \frac{H_{21}}{h_{21}}}, \quad (3.15)$$

$$F = \frac{J_{22} + H_{22}B}{j_{22} + h_{22}B}, \quad (3.16)$$

$$a = \frac{j_{02} \frac{K_0}{K_2} F - \frac{J_{02}}{j_{02}}}{h_{02} \frac{K_0}{K_2} F - \frac{H_{02}}{h_{02}}}, \quad (3.17)$$

ahol szintén a $B = \frac{b^{(3)}}{b^{(1)}}$ szimbólumot alkalmazzuk. A köztes tér együtthatóit ezután a és b ismeretében ki tudjuk fejezni a megfelelő egyenletpárokkal:

$$b^{(3)} = \frac{J_{02} - H_{02}a}{J_{22}/B + H_{22}}, \quad (3.18)$$

$$b^{(1)} = \frac{K_0 j_{02} - K_0 h_{02}a - K_2 b^{(3)} h_{22}}{K_2 j_{22}}, \quad (3.19)$$

$$a^{(3)} = \frac{j_{02} - h_{02}b}{j_{22}/A + h_{22}}, \quad (3.20)$$

$$a^{(1)} = \frac{j_{02} - h_{02}b - a^{(3)} h_{22}}{j_{22}}. \quad (3.21)$$

Végül pedig a belső tér együtthatóit kifejezhetjük a (3.1a) és a (3.1b) egyenletek segítségével:

$$c = \frac{a^{(1)} j_{21} + a^{(3)} h_{21}}{j_{11}}, \quad (3.22)$$

$$d = \frac{b^{(1)} J_{21} + b^{(3)} H_{21}}{J_{11}}. \quad (3.23)$$

Látszik, hogy nem mindenhol használhatjuk a hányados alakot, amely kényelmesebb függvényeket eredményezne, viszont beláthatjuk, hogy erre nem is feltétlen van szükség.

A legnagyobb szükséges rendszámot (n) becsülnünk szükséges. Jó megközelítés lehet, ha azt feltételezzük, hogy a Bessel-függvények kis argumentum esetén nem az adott rendben nem befolyásolják a teret. Ez belátható úgy, hogy az elsőfajú Bessel-függvény kis argumentumokra nullához tart, így valóban nincs kontribúciója. Továbbá a másodfajú Bessel-függvény kis argumentumokra nem véges értéket vesz fel, habár a teret végesnek feltételezzük. Mindkét megközelítés azt sugallja, hogy a nagy rendszámú Bessel-függvényeket (az adott gömbsugarakhoz és anyagparaméterekhez képest) már nem érdemes belevenni a teret leíró függvények halmazába. Így meg tudunk határozni egy határt, amittől azt mondjuk, hogy például az elsőfajú Bessel-függvény nullának számít, és eddig határozzuk meg az n értékeket. A pontos tagszám

becsléssel a 4. fejezetben foglalkozunk.

3.3. Határértékek meghatározása

A továbbiakban meghatározzuk az A , G , b , $a^{(1)}$, $a^{(3)}$ és c együttható csoportot. A másik csoportra ugyanezen megállapítások fognak vonatkozni, ugyanis azok hasonló alakúak.

A szükséges határértékek megtalálásához azokat az eseteket vesszük sorra, ahol a kifejezésekben előfordul valamilyen számábrázolási nehézség, pl. nagy számok kivonása. Ezen problémák felismeréséhez az egyes tört-függvények (pl. J/j) formájának ismerete szükséges, így a 3.4 ábrákhoz hasonlóan vizsgáljuk ezen függvényeket komplex argumentumok esetén. Ehhez minden lehetséges zérushelyet, illetve szingularitást figyelembe veszünk. A következőekben az ezen megfigyelések után kapott és összevont, valamint egyszerűsített határértékeket sorolom fel.

Az A együttható határértékei

A nagy és kis argumentumú viselkedést külön vizsgáljuk.

Nagy argumentum esetén ($kR \gg n$)

Itt a $\frac{J_{21}}{j_{21}}$ és a $\frac{J_{11}}{j_{11}}$ függvényeket érdemes vizsgálni, ugyanis ezeknek zérushelye és szingularitása is van a tartományon. Könnyen belátható, hogy a szinguláris helyeken ∞/∞ alakot kapunk, a zérushelyeken pedig $0/0$ alakot. A $\frac{J_{11}}{j_{11}} = 0$ zérushelyet azért szükséges külön kezelni, mivel a nevezőben két nagyon kicsi számot vonnánk ki egymásból, amely kerekítési hibához vezetne.

$$A \approx -\frac{j_{21}}{h_{21}}, \quad \text{ha } \frac{J_{11}}{j_{11}} \rightarrow \infty \text{ és } \frac{J_{21}}{j_{21}} \text{ tetszőleges} \quad (3.24)$$

$$A \approx -\frac{J_{21}}{H_{21}}, \quad \text{ha } \frac{J_{21}}{j_{21}} \rightarrow \infty \text{ vagy } \frac{J_{11}}{j_{11}} = 0 \quad (3.25)$$

$$A \approx 0, \quad \text{ha } \frac{J_{11}}{j_{11}} = 0 \text{ és } \frac{J_{21}}{j_{21}} = 0 \quad (3.26)$$

Kis argumentum esetén ($kR \ll n$)

Kis argumentumok esetén a MATLAB beépített Bessel-függvényei pontatlanul működnek, illetve nagy értéket vennének fel a függvények.

$$A \approx 0 \quad , \text{ ha } |k_2 R_1| \ll n \text{ és } k_1 R_1 \text{ tetszőleges} \quad (3.27)$$

$$\frac{J_{11}}{j_{11}} \approx \frac{n}{k_1 R_1} \quad , \text{ ha } |k_1 R_1| \ll n \quad (3.28)$$

Az így kapott feltételeket a MATLAB számábrázolásához szükséges beállítani. Így érdemes a kis argumentumot úgy definiálni, ahol a Hankel-függvény már nagyon nagy értékű, vagy a Bessel-függvény nagyon kicsi. A MATLAB *double* típusú lebegőpontos számábrázolása 64 bites pontosságot, vagyis nagyjából 10^{19} nagyságú tartomány képes átfogni, így érdemes a legnagyobb függvényértéket 10^8 -ban, illetve a legkisebbet 10^{-8} -ban meghatározni. Habár az esetek többségében nem lehetséges előre megbecsülni a határt, amelytől végtelennek vagy épp nullának tekinthetjük az argumentumot, így a kellő pontosság eléréséhez egy iteratív módszert alkalmazunk. Ezt a módszert a 3.4 szakaszban részletezzük.

A G együttható stabilan kiértékelhető, ugyanis csak azonos argumentumú függvényekből épül fel, így nem fordul elő számábrázolási nehézség.

Az b együttható határértékei

Az előző esettel ellentétben itt már nem tudjuk tisztán megkülönböztetni a nagy és kis argumentumú viselkedést, ugyanis ezek keverten is tudnak ennél az együtthatónál problémát okozni. Itt csupán egy J/j alak szerepel, így bár bonyolultabb az összefüggés, kevesebb megkötéssel élhetünk.

$$b \approx 0 \quad , \text{ ha } k_0 R_2 \ll n \text{ és } k_2 R_2 \text{ tetszőleges} \quad (3.29)$$

$$b \approx 0 \quad , \text{ ha } |G| \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

$$b \approx \frac{J_{02}}{H_{02}} \quad , \text{ ha } k_2 R_2 \ll n \text{ és } k_0 R_2 > n \quad (3.31)$$

$$b \approx \frac{J_{02}}{H_{02}} \quad , \text{ ha } \frac{J_{02}}{j_{02}} \rightarrow \infty \quad (3.32)$$

Az $a^{(3)}$ együttható határértékei

Ebben az esetben is csak egy J/j alakkal kell foglalkoznunk. Fontos megjegyezni, hogy a határérték számolásakor feltételezzük, hogy az együttható értéke véges, mivel a tér értékét is véges értékben várjuk.

$$a^{(3)} \approx 0 \quad , \text{ ha } k_2 R_2 \ll n \text{ vagy } k_0 R_2 \ll n \quad (3.33)$$

Az $a^{(1)}$ együttható határértékei

Sajnálatos módon, ahogy haladunk beljebb a gömb belsejében, az egyes közegekre érvényes együtthatók stabilitása úgy romlik le. Az $a^{(1)}$ értékhez csak kevés megkötést tudunk tenni, és így is előfordulhat, hogy számítási nehézségbe ütközünk. Ebben az esetben, ha a $k_2 R_2 \ll n$ és $k_0 R_2 > n$ elrendezést vizsgálánk, vagyis a külső közeg sűrűbb, mint a köpeny anyaga, akkor csak nehezen tudnánk egy határértéket meghatározni, habár a gyakorlatban ez az eset ritkán fordul elő, így feltételezzük, hogy a külső közeg törésmutatója kisebb, mint a belső közegeké. Továbbá, amikor mindkét kR kicsi, akkor csak megsejteni tudjuk, hogy az $a^{(1)}$ együtthatónak nullának kell lennie, ugyanis ezen esetben úgymond a Bessel-függvények „érdemi része már kilóg a gömb anyagából”, vagyis ha a teret véges értékekkel jellemezzük, viszont nagyon nagy értéket is felvevő függvényekkel írjuk le (Hankel-függvény), akkor azon a helyen az együttható zérus.

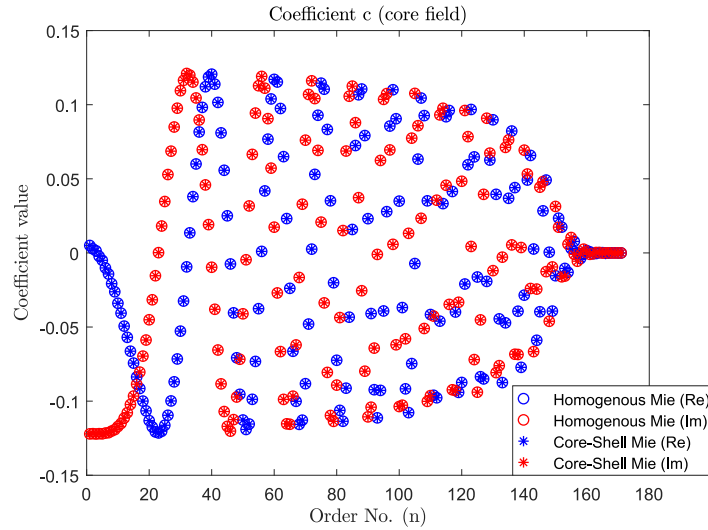
$$a^{(1)} \approx 0 \quad , \text{ ha } k_0 R_2 \ll n \text{ és } k_0 < k_2 \quad (3.34)$$

Az c együttható határértékei

Ebben az esetben már az előzőekben tett megkötések megoldják az együttható stabilitását, ugyanis mind $a^{(1)}$ -re és $a^{(3)}$ -ra tettünk már kikötéseket a határértékre, így ha a kR értékek kicsivé válnak akkor az $a^{(1)}$ és $a^{(3)}$ -hoz hasonlóan a c együttható is nulla értéket vesz fel.

Az így meghatározott együtthatókat összehasonlítottam az [2] könyvben meghatározott homogén gömbre adott összefüggésekkel, különböző n értékekre, és változatos elrendezésekre és anyagparaméterekre egyeztek az eredmények (3.5 ábra).

Fontos megemlíteni, hogy ezzel a módszerrel lehetséges komplex anyagparamétereket is megadni, így például vezető anyagokat is vizsgálhatunk.



3.5. ábra. Az algoritmus összehasonlítása a homogén gömb Mie formulájával ($f = 70$ GHz, $R = 10$ cm, $\varepsilon_r = 50$, $\sigma = 1$ S/m)

3.4. Határérték argumentumának becslése iteratív módszerrel

A határérték módszer használatához ismernünk kell előre, hogy mikor számíthatunk instabil számolásra. Ennek meghatározásához az egyes részfüggvények viselkedését vizsgáljuk, és pl. azt mondhatjuk, hogy ha egy részfüggvény végtelenhez tart, akkor az együttható számolása instabil, tehát nagy számábrázolási hibát kapunk. Ehhez meg kell becsülnünk, hogy milyen érték felett tekinthetjük a részfüggvény értékét „közel végtelennek”. Sajnos ezt előre nem lehet megmondani, így egy iteratív módszert kell alkalmaznunk, amely valamilyen hiba alapján dolgozik.

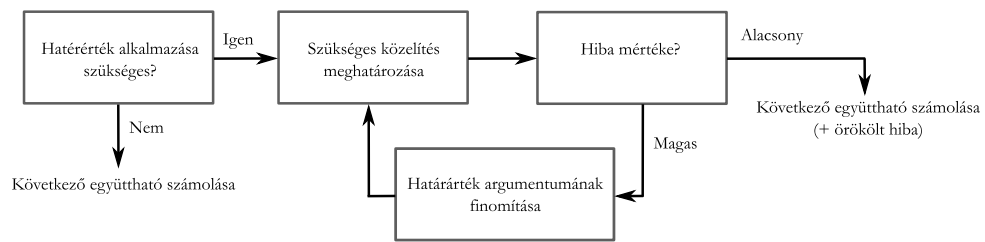
A hiba becsléséhez a kiszámolt határértéket hasonlítjuk össze egy legrosszabb eset belüli értékkel (worst-case, w.c.). Ehhez az adott együttható eredeti kifejezésébe helyettesítjük be a felhasznált határérték argumentumot (x_{th}):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{és} \quad f(x_{th}) = A_{th} \quad (3.35)$$

$$||A| - |A_{th}|| = \text{w.c. hiba} \quad (3.36)$$

tehát pl. ha az eredeti argumentum a végtelenhez tart, akkor a határt először 10^6 értéknél szabjuk meg, és ezt helyettesítjük az eredeti kifejezésbe. Abban az esetben, ha ez a hiba nagy, akkor a határérték argumentumot tovább kell finomítani, tehát a példánál maradva, megnöveljük 10^7 -re, majd újra kiszámoljuk a hibát. Ezt a folyamatot írja le a 3.6 ábra. Az elfogadott hiba nagyságát előre meg kell határoznunk, amelyhez felhasználjuk, hogy a számolt együtthatók

hibája közvetlen megjelenik a később számolt elektromos tér hibájában (2.25).



3.6. ábra. Az iteratív határérték számolás folyamatábrája

4.

A sor szükséges tagszámának adaptív becslése

Elméletileg az elektromágneses teret végtelen sok harmonikus függvényből kellene felépítenünk, viszont az implementációban a tagok számát korlátoznunk kell. Erre az irodalomban található becsléseket, melyek megfigyeléseken alapulnak. Egy lehetséges megközelítés lehet a következő [20]:

$$n = x + c(x)^{1/3} + d, \quad (4.1)$$

ahol $x = kR$ a méret paraméter, illetve c és d konstansok a sor konvergencia tulajdonságait befolyásolják.

A (4.1) összefüggés szerinti becslést használja az összes elérhető implementáció, habár ennek a hiányossága, hogy nem tudjuk előre a Mie számolás eredményének pontosságát. Emiatt megeshet, hogy túl sok vagy túl kevés tagot veszünk figyelembe. Az első esetben a számítási idő megnő, a másodikban az eredmény pontatlan lesz. Ennek kiküszöbölésére egy adaptív módszer mutat be a tagszámbecslésre, amely előre tudja becsülni a Mie számítás eredményének pontosságát. Ehhez szükséges egy hiba mennyiséget számolni minden tagszám esetén, amely célszerűen egy globális érték. Erre a célra megfelel az elektromos vagy mágneses összenergia a gömb térfogatában, vagy veszteséges anyagok esetén a veszteségi teljesítmény, illetve általában az elektromos vagy mágneses tér négyzetes középértéke (RMS). Ezen mennyiségek számításához egy térfogati integrálást kell elvégeznünk az elektromágneses tér meghatározása után, amely egy időigényes feladat, így ez önmagában nem lenne alkalmazható az adaptív módszer hibájára, ugyanis lassúvá és pontatlanná tenné a számolást. Ennek kiküszöbölésére egy fél-analitikus módszert alkalmazok, aminek segítségével a globális mennyiségek gyorsan

és pontosan számolhatóak.

4.1. Fél-analitikus módszer globális mennyiségek számolására

Az elektromágneses tér pontonként való összehasonlítása gyakran nem megoldható a számítási módszerek és a mérési lehetőségek korlátai miatt. Sokszor valamilyen integrális mennyiséget tudunk mérni és számítani, így ezek alapján tudunk csak következtetéseket levonni. Egy ilyen integrális mennyiség a térfogat által elnyelt teljesítmény, amely veszteséges anyagok esetén értelmezhető. Abban az esetben, ha lineáris, izotróp anyagokat feltételezünk, akkor a veszteségi teljesítmény meghatározása a következő összefüggés szerint történhet:

$$P_{loss} = \int_V \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv, \quad (4.2)$$

ahol σ a vezetőképesség, és \mathbf{E} az elektromos térvektor, továbbá valamilyen V térfogatra értelmezzük a teljesítményt. Az analitikus megoldásnál a veszteségi teljesítmény kiszámítása történhet a meghatározott elektromos térkomponensek térfogatra való összegzése alapján, viszont így hosszú számítási ideje lesz az algoritmusnak. Egyszerűsíthetjük a problémát, ha a térfogati integrálást kifejtjük az analitikus forma alapján. Vegyük észre, hogy a gömb homogén tartományokból áll, így a vezetőképességet nem kell az integrálás során figyelembe venni, elég utólag beszorozni vele az egész integrált. A következőekben visszavezetjük a térfogati integrálást egy lineáris integrál számolására, illetve ezzel megkerüljük a térkomponensek számolását, mely jelentősen leegyszerűsíti a számítást és egy gyorsabb algoritmust kapunk. Az itt leírt levezetéshez felhasználtam Dr. Badics Zsolt és Dr. Horváth Bálint Péter összegyűjtött jegyzeteit [26].

4.2. Veszteség a magban

Válasszuk szét a V térfogatot egy mag és egy héj részre a gömbben. Az elektromos térvektor abszolútértékének négyzetét a konjugálttal való skaláris szorzással kapjuk ($|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}^*$). Ekkor a magban az elektromos teret a (2.25) alakban tudjuk felírni. A konjugálttal való szorzáskor vegyük figyelembe a vektoriális harmonikusok ortogonalitását bármely gömbfelszínen [2]. Így

a térfogati integrál a következőképpen alakul:

$$\int_V |\mathbf{E}_{int}|^2 dv = \sum_{n=1}^N E_n^2 (|c_n|^2 \int_V |\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}|^2 dv + |d_n|^2 \int_V |\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}|^2 dv). \quad (4.3)$$

A vektoriális harmonikusok integrálja a (2.13) összefüggések alapján kifejtve gömbi koordináták szerint:

$$\begin{aligned} \int_V |\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}|^2 dv &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 \phi \left(\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 + \sin^2 \phi \left(\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 \right] \\ &\cdot |z_n(kr)|^2 r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr, \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} \int_V |\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}|^2 dv &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} n^2 (n+1)^2 \cos^2 \phi (P_n^1(\cos \theta))^2 \left| \frac{z_n(kr)}{kr} \right|^2 + \\ &+ \left[\cos^2 \phi \left(\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 + \sin^2 \phi \left(\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 \right] \\ &\cdot \left| \frac{1}{kr} \frac{d[kr z_n(kr)]}{d(kr)} \right|^2 r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr, \end{aligned} \quad (4.3b)$$

ahol a $z_n(kr)$ jelen esetben a $j_n(kr)$ gömbi Bessel-függvényt jelenti. A ϕ azimutális függés szerinti integrálás a következőképpen alakul:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi. \quad (4.4)$$

A θ poláris függés szerinti integráláshoz a Legendre-függvények tulajdonságait kell ismernünk [14]. A számunkra érdekes integrálok:

$$\int_0^\pi (P_n^1(\cos \theta))^2 \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (P_n^1(\cos \theta))^2 d\mu = \frac{2n(n+1)}{2n+1}, \quad (4.5)$$

ahol $d\mu = \sin \theta d\theta$ és $\mu = \cos \theta$. Továbbá egy másik nevezetes összefüggés [27]:

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 \right] \sin \theta d\theta = \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}. \quad (4.6)$$

Ezek alapján a következő alakba írhatjuk át a (4.4) térfogati integrálokat:

$$\int_V |\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}|^2 dv = \pi \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \int_{r_1}^{r_2} |z_n(kr)|^2 r^2 dr, \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \int_V |\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}|^2 dv = & \pi \frac{2n^3(n+1)^3}{2n+1} \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{z_n(kr)}{kr} \right|^2 r^2 dr + \\ & + \pi \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{1}{kr} \frac{d[kr z_n(kr)]}{d(kr)} \right|^2 r^2 dr, \end{aligned} \quad (4.6b)$$

melyeket visszahelyettesítve a (4.3) összefüggésbe látjuk, hogy a térfogati integrálás egy vonal menti integrállá egyszerűsödött, melynek kiértékeléshez valamilyen numerikus módszert kell alkalmaznunk, tekintve, hogy a Bessel-függvények integrálaljai nem ismertek. Tehát a megoldási forma tartalmaz analitikus és numerikus számítást is, így a módszert fél-analitikusnak nevezzük.

4.3. Veszteség a héjban

A fentiekhez hasonlóan a gömb köpenyének elektromos terére (2.27) is felírhatjuk a térfogati integrált, viszont ekkor a komplex konjugálttal való szorzás következtében létrejönnek olyan tagok is, ahol ugyanolyan vektoriális harmonikusokat szorzunk össze, csupán a felhasznált Bessel-függvény a különböző. Ezek egymásra nem ortogonálisak a gömbfelületen, ennél fogva számolni kell velük. Így a következő térfogati integrált írhatjuk fel az egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned} \int_V |\mathbf{E}_{shell}|^2 dv = & \int_V \sum_{n=1}^N E_n^2 [|a_n^{(1)}|^2 |\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}|^2 + |b_n^{(1)}|^2 |\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}|^2 + \\ & + |a_n^{(3)}|^2 |\mathbf{M}_{o1n}^{(3)}|^2 + |b_n^{(3)}|^2 |\mathbf{N}_{e1n}^{(3)}|^2 + \\ & + a_n^{(1)} \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} (a_n^{(3)} \mathbf{M}_{o1n}^{(3)})^* + (a_n^{(1)} \mathbf{M}_{o1n}^{(1)})^* a_n^{(3)} \mathbf{M}_{o1n}^{(3)} + \\ & + b_n^{(1)} \mathbf{N}_{e1n}^{(1)} (b_n^{(3)} \mathbf{N}_{e1n}^{(3)})^* + (b_n^{(1)} \mathbf{N}_{e1n}^{(1)})^* b_n^{(3)} \mathbf{N}_{e1n}^{(3)}] dv. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Láthatjuk, hogy az integrál első felében lévő tagok kiértékelésével már foglalkoztunk a mag esetén. Ekkor már a Hankel-függvényt is szükséges használnunk a (3) jelű tagoknál, így az előzőekkel megegyezik a szögek szerinti analitikus integrálás eredménye. Az második felében lévő tagok esetén a vektoriális harmonikusokat skalárisan szorozzuk egymással, így ezen tago-

kat vizsgálhatjuk koordinátánként. Példaként fejtsük ki a hetedik tagot a θ koordináta szerint (2.13):

$$b_n^{(1)} N_{e1n,\theta}^{(1)} (b_n^{(3)} N_{e1n,\theta}^{(3)})^* = b_n^{(1)} (b_n^{(3)})^* \left[\cos \phi \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2 [j_n(kr) (h_n(kr))^*], \quad (4.8)$$

amely szerint ezen tagot fel tudjuk írni fentiekben használt formában, melyre az integrált kiértékeljük a mag esetén. Tehát hasonlóképpen van egy konstans tagunk, egy szögtől függő tagunk, és egy sugártól függő tagunk. Ilyen formában az összes tagot át tudjuk alakítani, és az ismertett összefüggésekkel kifejtethetjük a szögek szerinti integrálokat. Így a veszteségi teljesítményt a következő alakban kapjuk:

$$\int_V |\mathbf{E}_{shell}|^2 dv = \sum_{n=1}^N E_n^2 [M + N_1 + N_2], \quad (4.9)$$

ahol

$$M = \pi \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \int_{r_1}^{r_2} [|a_n^{(1)} j_n(kr)|^2 + |a_n^{(3)} h_n(kr)|^2 + a_n^{(1)} j_n(kr) (a_n^{(3)} h_n(kr))^* + (a_n^{(1)} j_n(kr))^* a_n^{(3)} h_n(kr)] dr \quad (4.10a)$$

$$N_1 = \pi \frac{2n^3(n+1)^3}{2n+1} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left| b_n^{(1)} \frac{j_n(kr)}{kr} \right|^2 + \left| b_n^{(3)} \frac{h_n(kr)}{kr} \right|^2 + b_n^{(1)} \frac{j_n(kr)}{kr} \left(b_n^{(3)} \frac{h_n(kr)}{kr} \right)^* + \left(b_n^{(1)} \frac{j_n(kr)}{kr} \right)^* b_n^{(3)} \frac{h_n(kr)}{kr} \right] dr \quad (4.10b)$$

$$N_2 = \pi \frac{2n^3(n+1)^3}{2n+1} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left| b_n^{(1)} \frac{1}{kr} \frac{d[kr j_n(kr)]}{d(kr)} \right|^2 + \left| b_n^{(3)} \frac{1}{kr} \frac{d[kr h_n(kr)]}{d(kr)} \right|^2 + b_n^{(1)} \frac{1}{kr} \frac{d[kr j_n(kr)]}{d(kr)} \left(b_n^{(3)} \frac{1}{kr} \frac{d[kr h_n(kr)]}{d(kr)} \right)^* + \left(b_n^{(1)} \frac{1}{kr} \frac{d[kr j_n(kr)]}{d(kr)} \right)^* b_n^{(3)} \frac{1}{kr} \frac{d[kr h_n(kr)]}{d(kr)} \right] dr. \quad (4.10c)$$

Fontos megjegyezni, hogy az így kapott összefüggés a köpeny veszteségi teljesítményére, alkalmazható bármely köztes gömbszimmetrikus rétegre, így tetszőleges rétegű gömbök esetén is használhatjuk a (4.10) fél-analitikus összefüggéseket, csupán a megfelelő szóródási együtthatókat kell behelyettesíteni. Így megadtuk az általános rétegzett gömb veszteségi teljesítményének kiszámítására szolgáló fél-analitikus módszert.

Továbbá, a (4.9) kifejezés általánosan alkalmazható minden globális mennyiségre, amely csak sugárirányban változó anyagparaméter értékekkel rendelkezik, p.l. energia és RMS elektromos vagy mágneses tér.

4.4. Numerikus egyváltozós integrálás

A vonal menti numerikus integrálásra számos módszer létezik, és ezek egy fajtája, ahol könnyen integrálható polinomok segítségével közelítjük a függvényt. Ehhez jellemzően alacsony fokszámú lineáris vagy kvadratikus polinomokat használunk. A tartományt felosztjuk N pontra, melyek az egyszerűség kedvéért legyenek egyenletesen szétosztva. Alkalmazzuk a trapéz-szabályt, mely szerint a következő becslést adjuk:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x \quad , \text{ ahol } \Delta x = \frac{b-a}{N}. \quad (4.11)$$

A felosztás szükséges finomságát mindig az adott függvényhez kell igazítani. Bessel-függvények esetén a felbontásnak kellően részletesnek kell lennie, hogy a periodikus viselkedést le tudják fedni a trapézok. A Bessel-függvényeknek jellemzően van egy saját periódusok, amely az argumentumuktól függ. Tehát a $j_n(kx)$ függvénynek nagy argumentumok esetén $\sin(kx)$ alakja van, melynek periódusa (hullámhossza) $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Egy periódust nagyjából 100 ponttal lefedve kellő pontosságot kapunk. Ekkor ki tudjuk számítani, hogy az integrálási tartományon belül mennyi periódus várható, amely megadja a szükséges felbontást:

$$N = \frac{r_2 - r_1}{\lambda} M, \quad (4.12)$$

ahol M az egy perióduson belüli pontok száma.

A trapéz-szabály a kellő pontossághoz gyakran nagy felbontást eredményez, így lassabb algoritmust kapunk. Ennek kiküszöbölésére léteznek módszerek, melyek nem követelik meg az egyenletes felbontást, így megfelelő helyre választva mintapontokat egy gyorsabb és pontosabb algoritmust kapunk. Ilyen módszer az úgynevezett Gauss-kvadratúra.

4.5. Adaptív tagszámbeclés

A gyors és pontos fél-analitikus számolás segítségével tudunk globális mennyiségeket számolni, amelyet az adaptív módszerhez alkalmazhatunk. Ehhez az $N = 1$ tag hozzájárulását az eredményhez számoljuk ki először, majd az $N = 2$ tagokra ugyanígy. A két eredményből számolunk egy globális mennyiséget (pl. energia vagy RMS elektromos tér), és meghatározzuk a kettő közötti abszolút hibát. Ezután addig növeljük a sorozat tagszámát, amíg ez az abszolút hiba a kellő szint alá nem kerül.

5.

Számítási példa

Az analitikus megoldás ellenőrzéséhez a gömb belső terét vizsgáljuk, melyből a veszteségi teljesítményt is meg tudjuk határozni. Az összehasonlításhoz a végelem módszert (FEM) használjuk a Comsol Multiphysics környezetben. A következőekben egy gyakorlati példát használunk, amely illik a kétrétegű gömb alkalmazásához, illetve a belső tér vizsgálatát teszi szükségessé.

5.1. Elektromágneses tér vizsgálata

A továbbiakban tekintsük a következő példát. Számos területen fontos kérdés az elektromágneses sugárzás hatása az emberi szervezetre. Ez a rádiófrekvenciás mobil eszközök esetén is lényeges, ugyanis ezek az eszközök gyakran a felhasználók testéhez közel helyezkednek el, úgy mint például a mobiltelefon. Ekkor lényeges megvizsgálni a sugárzás hatását létfontosságú szervekre, amely ezen esetben az emberi agy, melyet a koponyacsont vesz körül. Ilyen módon az emberi fej anyagszerkezetét közelíthetjük kétrétegű gömbbel, melynek a külső sugara $R_2 = 100$ mm és a héj vastagsága D . Az így alkotott mag és köpeny közelítő anyagparamétereit ki tudjuk olvasni egy biológiai kísérleten alapuló adatbázisból [28]. Az összehasonlítást több frekvencián is elvégezzük, habár a kisebb hullámhosszak esetén a numerikus modellben közelítéseket kell alkalmaznunk, ugyanis a probléma diszkretizálása nagy memóriaigényt eredményez. A következő frekvenciákat vizsgáljuk: 900 MHz, 2,4 GHz, és 10 GHz. A 900 MHz modell esetén a végelem háló legnagyobb felbontását $1/20$ hullámhossz méretűre választottam (5.1 ábra), amíg a 2,4 GHz modell esetén már csak $1/9$ hullámhossznyi méretet engedhetünk meg. A 10 GHz modell esetén egyszerűsíteniünk kell a modelltartományt, ugyanis a diszkretizálás memóriaigénye túl nagy lenne. Ehhez a gömb magját elhagyjuk a modelltől

5.1. táblázat. A példaszámítások paramétereit

Frekvencia [GHz]	0,9	2,4	10
D_{mag} [mm]	25	25	10
ε_{mag}	45	45	45
σ_{mag} [S/m]	2	2	30
$\varepsilon_{köpeny}$	10	10	10
$\sigma_{köpeny}$ [S/m]	0,5	0,5	0,5

5.2. táblázat. A példaszámítások memória és idő igénye

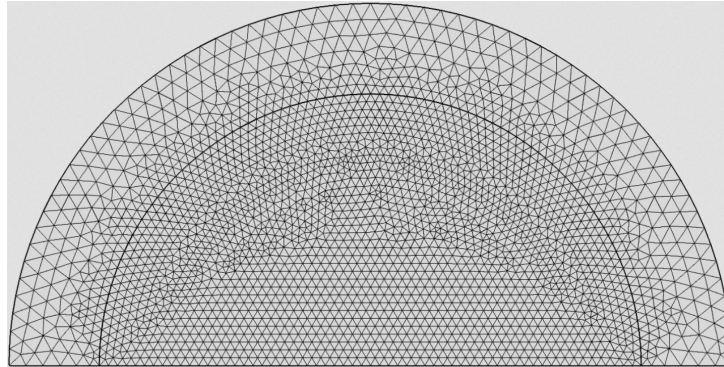
Frekvencia \ Igény	RAM [GByte]	DoFs	Idő [s]
900 MHz (FEM)	39	$7 \cdot 10^6$	1460
900 MHz (MIE)	—	—	0,4
2,4 GHz (FEM)	50	$8 \cdot 10^6$	1330
2,4 GHz (MIE)	—	—	1,3
10 GHz (FEM)	39	$9 \cdot 10^6$	660
10 GHz (MIE)	—	—	22

és egy impedancia peremfeltételt alkalmazunk. Emiatt a mag vezetőképességét megnöveljük és a héj vastagságát csökkentjük, amely egy egyszerűbben számolható problémát eredményez. A modellekben felhasznált paraméterek az 5.1 táblázatban láthatóak. A numerikus számítás memória és számítási idő igényét az 5.2 táblázat mutatja.

5.2. A Mie algoritmus pontossága

Az algoritmus pontossága két tényezőtől függ: az együtthatók száma, és a számábrázolási hiba mértéke. Az elsőt az adaptív módszer használatával tudjuk kezelni, amelyhez valamilyen globális hibát tudunk számolni. A másodikat a határérték módszerrel tudjuk stabilizálni, viszont vannak esetek, amikor az elvárt pontosságot nem tudjuk elérni az adott problémához, habár a számítás hibáját meg tudjuk becsülni. Ekkor ez a hiba öröklődik a további számításokhoz is. Mivel a két módszer közösen határozza meg az elérhető pontosságot, ezért mindig a nagyobb hiba értéket kell figyelembe vennünk.

Ennek szemléltetésére tekintsük a 900 MHz-es számítás hibáit a Mie-sor tagszámának függvé-



5.1. ábra. A 3D FEM model hálózása (900 MHz)

nyében (5.2 ábra). Az adaptív tagszámbeclés által számított hiba csökken, viszont a határérték módszer hibája lokálisan megnő $N = 11$ környékén, így a számítás hibáját ez a domináns hiba határozza meg.

Az ismertett módszer előnye, hogy felismerhetjük az algoritmus instabilitását a hiba mértékéből következtetve.

5.3. Eredmények

A numerikus számítás és az analitikus módszer eredményeinek összehasonlításához célszerűen egy globális mennyiséget kell definiálnunk. Ehhez használhatnánk valamilyen térfogatban értelmezett értéket (pl. energia vagy veszteségi teljesítmény), viszont a numerikus modell diszkrét felbontása miatt ez az összehasonlítás pontatlan lenne. Emiatt a modelltartomány egy vonalmetszetében hasonlítjuk össze a tér értékeket, amelyhez a végeselem megoldás is pontos eredményt szolgáltat. Az elektromos tér nagyságának összehasonlítására a négyzetes középérték hibát számoljuk ki megfelelő számú mintapontra:

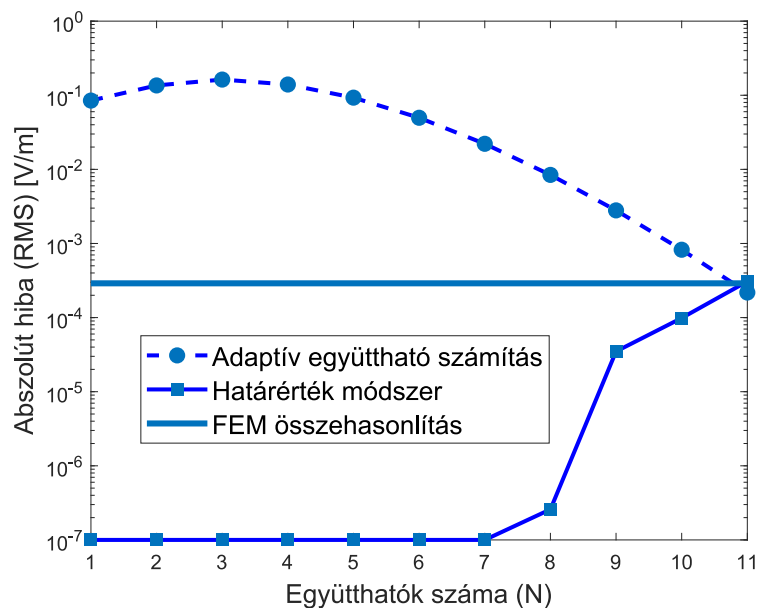
$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (E_{1,n} - E_{2,n})^2}, \quad (5.1)$$

ahol T a mintapontok száma, és $E_{1,n}$, illetve $E_{2,n}$ a két módszer adott ponthoz tartozó mintái. Ezen összehasonlítások pontossága szerepel az 5.3 táblázatban. Az elektromos tér nagysága vonalmetszetben ábrázolva az 5.4 ábrán látható, míg a síkmetszeti téreloszlás az 5.3 ábrán.

Továbbá, az 5.3 táblázatban szerepel az analitikus megoldás becsült hibája is. A 900 MHz-es számítás becsült és tényleges hibája nagyon közel van egymáshoz, amely egy elvárt eredmény,

hisz ezen numerikus modellt még megfelelő felbontással lehet diszkrétizálni. A 2,4 GHz-es számítás becslése és tényleges hibája még mindig közel van egymáshoz, viszont itt már figyelembe kell vennünk, hogy a numerikus modell diszkrétizálásának felbontása durva. Hasonlóan a 10 GHz-es problémára, a becsült és a valós hiba közel van egymáshoz, bár a numerikus modell közelítést alkalmaz. Összességében az analitikus számítások stabilak voltak, illetve a legrosszabb esetben is 10^{-3} hibájú összehasonlítást kaptunk.

Fontos megjegyezni, hogy ugyanezen problémát vizsgálva az említett Scattnlly nevű implementációban [24], már a program figyelmeztet, hogy számos foksám esetén nem lehet kiértékelni az együtthatókat. A tapasztalatom szerint a hibás együtthatók száma növekszik a frekvenciával, és az anyagparaméterek ugrásának mértékével. Az eddigi vizsgálataim alapján a saját implementációm nem rendelkezik ilyen jellegű stabilitási hibával. Megállapítható tehát, hogy az implementációm a bemutatott konfigurációra megbízhatóan működik 10 GHz frekvenciáig, azonban magasabb frekvenciákon a stabilitás vizsgálata a jövőbeli kutatás feladata.



5.2. ábra. Az analitikus megoldás hibái: az adaptív tagszámbeclés és a határérték módszer által becsült hibák (900 MHz). Illetve a numerikus számolással való összehasonlítás $N = 11$ tagszám esetén.

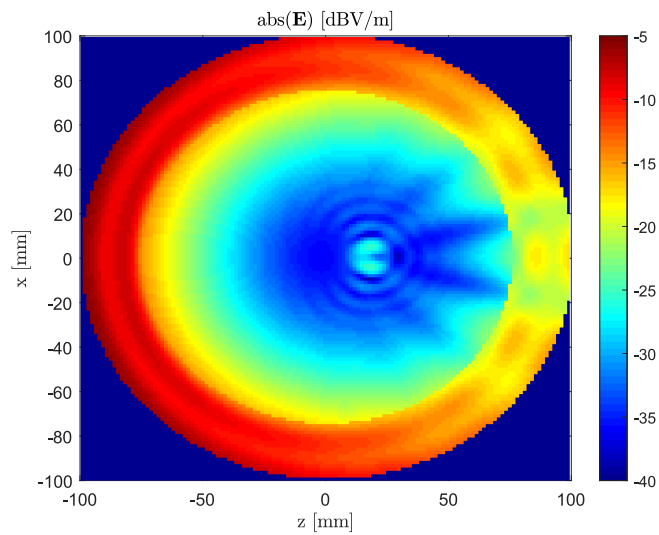
5.4. Veszteségi teljesítmény vizsgálata

Végül az így kapott módszerrel meghatároztuk a példa szerinti gömb belsejében elnyelt teljesítményt, amely $46,889 \mu\text{W}$, abban az esetben, ha $E_0 = 1 \text{ V/m}$. Továbbá ellenőrzésképpen az

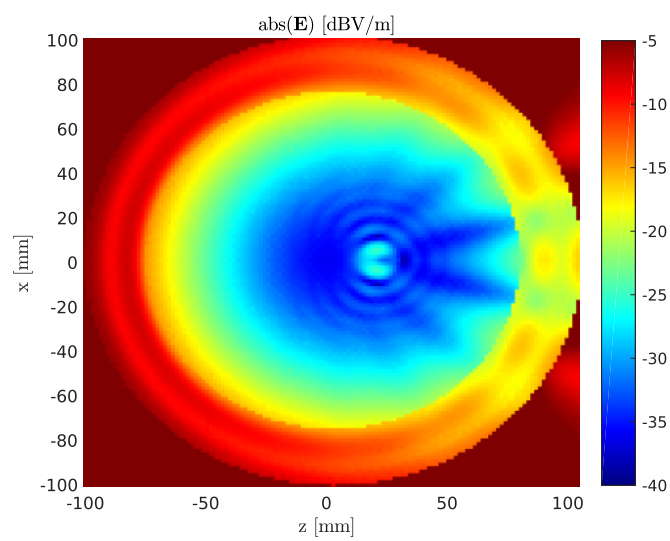
5.3. táblázat. *A példaszámítások RMS E hibái*

Frekvencia	Hiba [V/m]	FEM összehasonlítás	Becsült
900 MHz ($N = 11$)		$2,9 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$
2,4 GHz ($N = 20$)		$9,7 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$
10 GHz ($N = 66$)		$5,4 \cdot 10^{-3}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$

analitikus módszerrel kiszámolt elektromos tér alapján, térfogati integrálással: $46,546 \mu\text{W}$. Valamint a végelem módszerrel számolt elektromos tér alapján, térfogati integrálással: $46,876 \mu\text{W}$. Látható, hogy a három módszer közel azonos eredményt szolgáltat, amely a fél-analitikus számolás pontos működését erősíti meg.

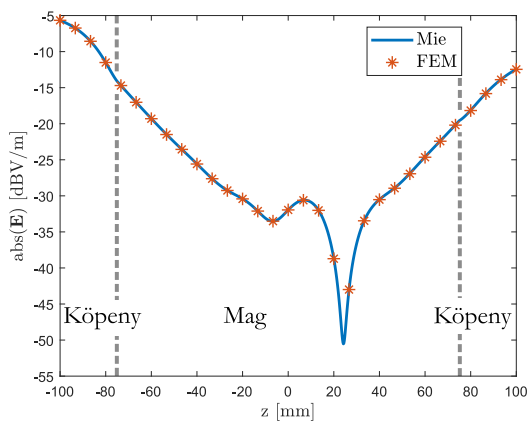


(a) $y = 0$ síkmetszet (Mie)

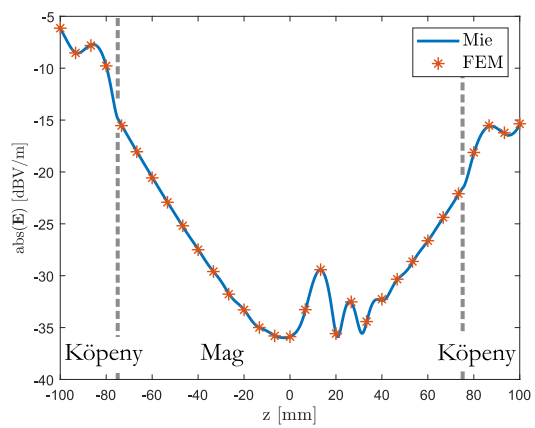


(b) $y = 0$ síkmetszet (Comsol-FEM)

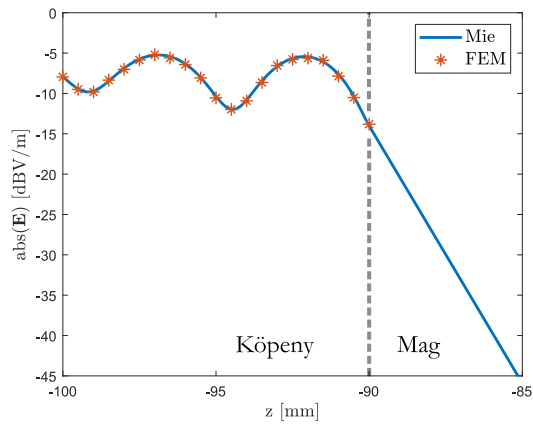
5.3. ábra. Elektromos tér nagysága a gömb belsejében síkmetszetben ábrázolva (2,4 GHz)



(a) 900 MHz



(b) 2,4 GHz



(c) 10 GHz (A gömb magja nem szerepel a numerikus modellben)

5.4. ábra. Elektromos tér nagysága vonalmetszetben ábrázolva a z tengely mentén

Összefoglalás

A dolgozatban egy, az eddigiektől eltérő megoldást adtam az elektromágneses hullámok gömb-ről való szóródását leíró Mie-sor stabil kiértékelésére. Továbbá, az így kapott formulából leveztettem a veszteségi teljesítmény számolására szolgáló fél-analitikus módszert, amely gyorsabb és pontosabb a térfogati integráláshoz viszonyítva. Ehhez Matlab környezetben implementáltam az algoritmust.

A Mie-sor szükséges tagszámának becslésére bemutattam egy adaptív módszert, amely segítségével előre becsülhető a megoldás pontossága. Az analitikus számítás eredményét numerikus módszer segítségével ellenőriztem (FEM), amely pontos egyezést mutatott. Az összehasonlítás-hoz a gyakorlatban is hasznos példát, az emberi fej egy anatómia közelítő modelljét használtam, így egy alkalmazási példát mutatva.

A továbbiakban az analitikus megoldás egy eszközt nyújt az elektromosan nagyméretű tárgyak-ról való szóródás vizsgálatához, ahol a szórási jellemzők meghatározásához nem élhetünk a nagyobb hullámhossz esetén megszokott közelítésekkel és numerikus módszerekkel. Továbbá, egy ellenőrzési módszerként szolgál más, közelítéseket alkalmazó numerikus számolásokhoz, amely gyorsabb és kevésbé költséges, mint a megszokott laboratóriumi mérések útján való ellenőrzés.

Irodalomjegyzék

- [1] E. F. Knott, J. F. Schaeffer, and M. T. Tuley, *Radar cross section*. SciTech Publishing, 2004.
- [2] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2008.
- [3] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics, 2 edition*. John Wiley & Sons, 2012.
- [4] N. A. Logan, „Survey of some early studies of the scattering of plane waves by a sphere,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, no. 8, pp. 773–785, 1965.
- [5] G. Mie, „Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen,” *Annalen der physik*, vol. 330, no. 3, pp. 377–445, 1908.
- [6] P. J. W. Debye, „Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material,” *Livres*, 1908.
- [7] W. Hergert and T. Wriedt, *The Mie theory: basics and applications*, vol. 169. Springer, 2012.
- [8] R. A. Shore, „Scattering of an electromagnetic linearly polarized plane wave by a multilayered sphere: Obtaining a computational form of mie coefficients for the scattered field.,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 57, no. 6, pp. 69–116, 2015.
- [9] K. Ladutenko, U. Pal, A. Rivera, and O. Peña-Rodríguez, „Mie calculation of electromagnetic near-field for a multilayered sphere,” *Computer Physics Communications*, vol. 214, pp. 225–230, 2017.
- [10] D. Xue, L. Demkowicz, and H. Ling, „Application of coupled finite / infinite element method to modeling of absorption and scattering of em waves,” 2005.
- [11] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, vol. 33. John Wiley & Sons, 2007.
- [12] A. L. Aden and M. Kerker, „Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres,” *Journal of Applied Physics*, vol. 22, no. 10, pp. 1242–1246, 1951.
- [13] Z. Wu and Y. Wang, „Electromagnetic scattering for multilayered sphere: recursive algorithms,” *Radio Science*, vol. 26, no. 6, pp. 1393–1401, 1991.

- [14] „NIST Digital Library of Mathematical Functions.” <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.26 of 2020-03-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.
- [15] Z. Badics and P. B. Horváth, „Matlab algorithm for scattering and absorption of a homogeneous sphere using the Mie expansion formula.” Private communication, 2019.
- [16] M. Kerker, *The scattering of light and other electromagnetic radiation: physical chemistry: a series of monographs*, vol. 16. Academic press, 2013.
- [17] R. Bhandari, „Scattering coefficients for a multilayered sphere: analytic expressions and algorithms,” *Applied optics*, vol. 24, no. 13, pp. 1960–1967, 1985.
- [18] J. R. Wait, „Electromagnetic scattering from a radially inhomogeneous sphere,” *Applied Scientific Research, Section B*, vol. 10, no. 5-6, pp. 441–450, 1962.
- [19] B. Peterson and S. Ström, „T-matrix formulation of electromagnetic scattering from multilayered scatterers,” *Physical Review D*, vol. 10, no. 8, p. 2670, 1974.
- [20] B. Johnson, „Light scattering by a multilayer sphere,” *Applied optics*, vol. 35, no. 18, pp. 3286–3296, 1996.
- [21] W. Yang, „Improved recursive algorithm for light scattering by a multilayered sphere,” *Applied optics*, vol. 42, no. 9, pp. 1710–1720, 2003.
- [22] O. Peña and U. Pal, „Scattering of electromagnetic radiation by a multilayered sphere,” *Computer Physics Communications*, vol. 180, no. 11, pp. 2348–2354, 2009.
- [23] A. Ericsson, D. Sjöberg, C. Larsson, and T. Martin, *Scattering from a multilayered sphere-Applications to electromagnetic absorbers on double curved surfaces*. Electromagnetic Theory Department of Electrical and Information Technology, 2017.
- [24] K. Ladutenko, U. Pal, A. Rivera, and O. Peña-Rodríguez, „Scattnlay v2.0.1.” <https://github.com/ovidioppr/scattnlay/tree/v2.0.1>, 2017.
- [25] L. Landau, „Ratios of bessel functions and roots of $\alpha j_\nu(x) + x j'_\nu(x) = 0$,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 240, no. 1, pp. 174–204, 1999.
- [26] Z. Badics and P. B. Horváth, „Summary on the Mie expansion for homogeneous sphere with the extension of semi-analytical loss calculation.” Private communication, 2019.
- [27] J. G. V. Bladel, *Appendix 5: Special Functions*, ch. A.5., pp. 1043–1061. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2006.

- [28] C. Gabriel, „Compilation of the dielectric properties of body tissues at RF and microwave frequencies.” Tech. Rep. Report N.AL/OE-TR- 1996-0037, Occupational and environmental health directorate, Radiofrequency Radiation Division, Brooks Air Force Base, Texas (USA), 1996.