



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Spektrumbecslési módszerek adatvesztés esetén

TDK DOLGOZAT

Készítette

Palkó András

Konzulens

Dr. Sujbert László

Tartalomjegyzék

1. Kivonat.....	5
2. Abstract	7
3. Bevezető.....	9
4. Az adatvesztés	11
4.1. Néhány példa adatvesztést okozó rendszerekre.....	11
4.2. Az adatvesztés matematikai leírása	12
4.3. Adatvesztési modellek.....	14
4.3.1. Véletlen, független adatvesztés	14
4.3.2. Véletlen, blokkalapú adatvesztés	14
4.3.3. Markov-lánc alapú adatvesztés	15
5. Spektrumbecslés a rezonátoros struktúrával	17
5.1. A rezonátoros jelmodell.....	17
5.2. A rezonátoros megfigyelő	20
5.3. A spektrumbecslés megvalósítása	24
5.4. Az adatvesztés hatása a rezonátoros struktúrára.....	25
6. Spektrumbecslés FFT és nullával lezárás alkalmazásával	28
6.1. Az eljárás vizsgálata	29
6.2. Átlagolási módszerek	32
6.2.1. Spektrumok összeadása, az átlagolás elméleti alapjai	33
6.2.2. Az exponenciális átlagolás együtthatója és időállandója	34
7. Módosított spektrumbecslési eljárás FFT-vel	36
7.1. A visszaállítási módszerek számításigénye	40
8. Egyéb módszerek	43
9. A módszerek összehasonlítása	45
9.1. Számításigény.....	45
9.2. Egyéb szempontok.....	47
9.3. Szimuláció	49
9.3.1. Szimulációs környezet és paraméterek.....	49
9.3.2. Szimulációs eredmények.....	50
10. A DSP-kártyás implementáció	58
10.1. Az implementáció kérdései és korlátai	59
10.2. A mérési elrendezés.....	60
10.3. Mérési eredmények.....	61
11. Összefoglalás, kitekintés	70
Irodalomjegyzék.....	71

Ábrajegyzék

1. ábra: Kétállapotú Markov-lánc.....	15
2. ábra: A koncepcionális jelmodell forgató integrátorokkal	18
3. ábra: A koncepcionális jelmodell rezonátorokkal	20
4. ábra: A rendszer és a megfigyelő	20
5. ábra: A rezonátoralapú megfigyelő (RBO)	21
6. ábra: A nullával lezárás hatása a DFT értékeire	30
7. ábra: A nullával lezárt jel spektruma az amplitúdóhiba javításával	31
8. ábra: A javasolt eljárás	37
9. ábra: Az egyszerűsített eljárás	38
10. ábra: A javasolt eljárás IFFT-vel	39
11. ábra: Lineáris átlagolás.....	51
12. ábra: Exponenciális átlagolás	52
13. ábra: Amplitúdóspektrum inkohereus mintavétel esetén (teljes és nagyított részlet).....	53
14. ábra: Inkohereus mintavétel	53
15. ábra: Nagy adatvesztés hatása	55
16. ábra: Extrém mértékű adatvesztés hatása	56
17. ábra: Amplitúdóspektrum extrém mértékű adatvesztés esetén.....	56
18. ábra: A DSP-kártya felülnézeti képe	59
19. ábra: A mérési elrendezés.....	60
20. ábra: 1 Vpp 1,5 kHz négyszögjel, RBO különböző adatvesztésekkel, $N=1024$	62
21. ábra: Az előző ábra nagyított részlete	62
22. ábra: 1 Vpp, 2,25 kHz háromszögjel, 0,5% adatvesztés.....	63
23. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete	64
24. ábra: 1 Vpp 750 Hz négyszögjel, visszaállítós FFT, nincs ablakozás, $N = 4096$, különböző adatvesztések	65
25. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete	65
26. ábra: 1 Vpp, 500 Hz négyszögjel, 0,1% adatvesztés, $N = 4096$	66
27. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete	67
28. ábra: 2,25 kHz, 1 Vpp háromszögjel, 10% adatvesztés, $N = 1024$	68
29. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete.....	68

Táblázatok jegyzéke

1. táblázat: Beállási idők és határhibák	25
2. táblázat: kritikus adatvesztési arányok	41
3. táblázat: A spektrumbecslési módszerek számításigénye	46
4. táblázat: A spektrumbecslési módszerek összehasonlítása	48
5. táblázat: Az összes szimulációra azonos paraméterek	50
6. táblázat: Az első szimuláció paraméterei	51
7. táblázat: A második szimuláció paraméterei	53
8. táblázat: A harmadik szimuláció paraméterei	54
9. táblázat: A negyedik szimuláció paraméterei	55
10. táblázat: Az összes mérésre azonos paraméterek	61
11. táblázat: Az első mérés paraméterei	61
12. táblázat: A második mérés paraméterei.....	63
13. táblázat: A harmadik mérés paraméterei	64
14. táblázat: A negyedik mérés paraméterei.....	66
15. táblázat: A kritikus veszteség mért és számított értékei	69

1. Kivonat

Manapság a kommunikáció nagyrészt elektronikusan történik, ami megvalósítható vezetékes vagy vezeték nélküli módon. Egy gyakran használt módszer például a rádiócsatorna alkalmazása, viszont legyen akármennyire is kényelmes, ennek is megvannak a hátrányai. Előfordulhat, hogy az átvitel során interferencia vagy zaj miatt az üzenet sérül, adatvesztés történik. Nemcsak a vezeték nélküli átvitelben történhet adatvesztés, hanem az internetes összeköttetések esetén is, erre jó példa a Skype. Az adatvesztés oka nem mindig kommunikációs természetű. Előfordulhat, hogy adott ütemezés szerint kell elvégezni egy méréssorozatot (pl. napon-ta adott időpontban egy csillagászati megfigyelést), és valamilyen hiba, külső körülmény következtében ez nem sikerül az összes kitűzött időpontban.

Az IoT (internet of things) és IoE (internet of everything) elterjedésével párhuzamosan növekszik a szenzorhálózatok jelentősége. Találkozhatunk velük például autókban, szabályozási körökben, és okos otthonokban is. Ezekben az esetekben a feladat valamit mérni, és mért adatokat továbbítani a feldolgozóegység felé. Természetesen ilyenkor is előfordulhat az átvitel során adatvesztés, ami alkalmazástól függő mértékű problémát okoz.

A dolgozatban bemutatok néhány példát adatvesztést okozó rendszerekre, illetve megadom az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását. Ismertetek néhány adatvesztési modellt, valamint ezek jellemző függvényeit.

A műszaki gyakorlatban fontos szerepet tölt be a spektrumbecslés. Ha ez a mérési feladat, és az adatok egy része elvész, az súlyos probléma. A mintavételezett jelek spektrumát DFT-vel lehet hatékonyan kiszámítani. Mivel a DFT bármely pontjának számításához szükség van az összes mintára, ezért pontos elvégzéséhez teljes, adatvesztés nélküli mintasorozat szükséges. Kézenfekvő lehetőségnek tűnik megvárni, amíg egy megfelelő hosszúságú blokk keletkezik. Az ehhez szükséges minták száma azonban már alacsony adatvesztési arány esetén is a DFT pontszámának többszöröse lehet, ami a legtöbb alkalmazásban elfogadhatatlan. A dolgozatban megvizsgálom néhány lehetőséget a probléma kezelésére.

A dolgozat megírásakor a témában már születtek eredmények, többek között a BME MIT tanszékén is. Két ilyen módszert is megvizsgáltam. Az első a periodikus jelek analízisére az említett tanszéken kifejlesztett rezonátoros struktúra adekvát kiegészítése. Bemutatom magát a rezonátoros struktúrát, azt, hogy alkalmazásával hogyan lehet meghatározni a spektrumot, illetve az adatvesztés hatását erre a struktúrára. A másik módszer az FFT-t alkalmazza, mivel ez rendkívül hatékony spektrumszámítási eljárás, éppen ezért szinte egyeduralkodó a valós

idejű alkalmazásokban. Az adatvesztést ez a módszer úgy próbálja kezelni, hogy a jelet „levágja” az első adatvesztési pontnál, azaz az aktuális FFT-blokkban az első adatvesztési helytől kezdve az összes minta zérus.

A vizsgálatok eredménye alapján rezonátoros struktúra sokkal jobban tűri az adatvesztést, mint az FFT alapú megoldás. Ennek az az oka, hogy a rezonátoros struktúra a mintákat egyével értékeli ki, míg az FFT blokkonként. Vagyis a rezonátoros struktúra általában képes a spektrum – viszonylag pontos – előállítására, ennek a „sebessége” (hány mintára van szükség) függ az adatvesztési aránytól. Ezzel szemben az FFT-s módszernél az adatvesztés hatására a spektrum „szétkenődik”, cserében ez az eljárás sokkal kevésbé számításigényes. A dolgozatban bemutatok egy új módszert, amelynek célja a két vizsgált eljárás előnyeit egyesíteni.

A dolgozatban összehasonlítom a három eljárást, mind elméleti megfontolások, mind szimulációk alapján. A módszereket DSP kártyán (Sharc ADSP 21364) is implementáltam, ismertetem ennek néhány főbb jellemzőjét és megfontolását. Az elkészült implementációval méréseket is végeztem, ezek eredményét is értékelem.

2. Abstract

Nowadays, most of the communication is carried out electronically either wired or wireless way. A commonly used method is the utilization of a radio channel, but in spite of its convenience, it has drawbacks. E. g., interference or noise can impair the transmission, which leads to data loss. Not only the wireless connection suffers from potential data loss, it can also happen to internet connections, a good example is Skype. The cause of the data loss is not always communicational. For instance, a series of measurements needs to be conducted with a set schedule (e.g. astronomical observation every day at a given time), but because of an error or an external influence, some of the measurements are unsuccessful.

Along with the spreading of the IoT (internet of things) and IoE (internet of everything) grows the significance of sensor networks. They can be found in cars, control loops and smart homes. In such systems the task is to measure something and transmit the measured data to the processing unit. Of course, there is a chance of data loss during the transmission, which can cause a problem depending on the application.

In this paper I present examples of systems, in which data loss can occur, and I give a possible mathematical description of data loss. Data loss models and their features are also described.

In the engineering practice, spectral estimation has a significant role. If this is the measurement task and some of the samples are lost, then data loss becomes a serious problem. The spectral estimation of sampled signals can be calculated effectively via DFT. In order to get the value of any point of the DFT, the whole record is needed, without data loss. An obvious solution is to wait for a complete record, but the number of samples which are needed can be the multiple of the DFT size, which is unacceptable in most applications. In this paper I examine some possibilities of dealing with this problem.

There are available results in this field, and two methods will be introduced in detail. The first one is the extension of the resonator based observer (RBO), which was developed at BME MIT, originally to analyze periodic signals. I present the RBO, a method of spectral estimation with this structure and the effect of data loss on the RBO. The second one utilizes the FFT because of its particular efficiency in spectral estimation, that is the cause of its dominance in real time applications. This method tries to manage data loss by zero padding the record from the first lost sample.

Based on the examinations, the RBO tolerates data loss better than the FFT-based solutions, because the RBO evaluates each sample one by one while FFT evaluates them in records. Usually, the RBO is able to estimate the spectrum with acceptable precision, the “speed” of it (how many samples are required) depends on the data loss rate. However, in the case of data loss, leakage occurs at the FFT based method; in exchange it needs less computation. A new procedure is introduced in this paper, with the intent of combining the benefits of the two examined methods.

The paper contains the comparison of the three methods by theoretical analysis and simulation. The methods were implemented on a DSP board (Sharc ADSP 21364), I present the main features of the implementation. The measurements made by the DSP are also presented and evaluated.

3. Bevezető

Problémafelvetés

A műszaki gyakorlatban fontos szerepet tölt be a spektrumbecslés, melynek leggyakrabban alkalmazott módszere – elsősorban a számítási hatékonysága miatt – az FFT. Egyes alkalmazásokban (például szenzorhálózatok) a mérési adatokat kénytelenek vagyunk nem megbízható csatornán továbbítani, amelynek eredményeként egyes adatok vagy adatblokkok elveszhetnek.

A spektrumbecslési eljárásokat számítógépen (beleértve a digitális jelfeldolgozó kártyákat, GPGPU alkalmazásokat, PLC-ket stb.) valósítják meg, aminek következtében a jelet, amelynek a spektrumát szeretnék megbecsülni, mintavételezik. Emiatt a dolgozatban kizárólag mintavételezett jelekkel foglalkozok. Ha a mintavételezési idő állandó, vagyis a mintavétel ekvidisztáns, akkor a jel spektrumát DFT-vel lehet hatékonyan kiszámítani:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = DFT(x_n) \quad (n, k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1)$$

Ahol x_n a mintavételezett jel értéke az n . időpillanatban, N a DFT pontszáma, és $X(k)$ a DFT k . pontbeli értéke. Láthatjuk, hogy egy tetszőleges pont kiszámításában az összes minta részt vesz, vagyis ha akár egy is elvész, akkor egyik pontot sem tudjuk kiszámítani. Kézenfekvő lehetőségnek tűnik megvárni, amíg egy megfelelő hosszúságú blokk keletkezik. Az ehhez szükséges minták száma azonban már alacsony adatvesztési arány esetén is a DFT pontszámának többszöröse lehet, ami a legtöbb alkalmazásban elfogadhatatlan.

Spektrumbecslésre, szűrésre hatékonyan használható a BME MIT-en kifejlesztett rezonátoros struktúra, amelyet alkalmassá tettek adatvesztés tolerálására is. Ugyancsak a MIT-en kidolgozták a spektrumbecslésre általánosan alkalmazott FFT algoritmus egy olyan módosítását, amely szintén jól használható adatvesztés esetén. A két módszer két különböző megközelítéssel kezeli a problémát és mind ez ideig nem történt meg az eljárások összehasonlítása. A dolgozat célja az összehasonlítás elméleti megfontolások, szimulációk és mérési eredmények alapján. A tapasztalatok birtokában egy új módszerre is javaslatot teszek, amelyet az előzőekkel szintén összevetek.

A dolgozat felépítése

A dolgozatban először megvizsgálom magát az adatvesztést, majd a rezonátoros struktúrát. Utána következik a kinullázós FFT-s módszer bemutatása, majd a dolgozat újdonsága: a visszaállítós FFT-s módszer. Röviden szót ejtek egyéb spektrumbecslési eljárásokról, majd rátérek a módszerek összehasonlítására elméleti és szimulációs alapokon. Végül ismertetem a DSP-kártyás implementációval végzett méréseket.

4. Az adatvesztés

Az első fejezetben példákat adok rendszerekre, melyekben előfordulhat az adatvesztés, bemutatom az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását és ismertetek néhány adatvesztési modellt. A fejezethez felhasználtam az [1] irodalmat.

4.1. Néhány példa adatvesztést okozó rendszerekre

Az adatvesztés az esetek túlnyomó többségében kommunikációs eredetű. Manapság a kommunikáció nagyrészt elektronikusan történik, ami megvalósítható vezetékes vagy vezeték nélküli módon. Tipikus vezeték nélküli alkalmazás a rádiócsatorna alkalmazása, mellyel találkozhatunk például szenzorhálózatokban. Ezekben a feladat valamit mérni, majd a mérési adatokat továbbítani a feldolgozóegység felé. A rádiócsatorna használata kényelmes lehet, amennyiben a mérőeszközök távol vannak a feldolgozóegységtől; vagy gyakran, esetleg jelentősen kell módosítani a mérési elrendezésem.

Jól ismerjük a rádiós összeköttetések potenciális hibáit: interferencia vagy zaj következtében az átvitel során az üzenet torzulhat, bithibák léphetnek fel. Ez az oka, hogy sokféle hibavédő, hibajavító kódolás létezik, amelyeket távközlési alkalmazásokban előszeretettel alkalmaznak. Nem biztos azonban, hogy jó ötlet a szenzorhálózatokban is a legrobosztusabb formában továbbítani az adatokat, hiszen ez növeli a számításigényt és a szükséges sáv szélességet. Ez azt eredményezheti, hogy az eszközeink bonyolultabbak, drágábbak lesznek, amit esetleg nem engedhetünk meg magunknak; illetve, ha az eszközön nem változtatunk, akkor lecsökken a rendelkezésre álló „hasznos” számítási kapacitás.

Adatvesztés nemcsak a vezeték nélküli összeköttetések esetén fordulhat elő. Vegyük példának az internetet: az információt csomagokra bontjuk, és a csomagokat külön-külön továbbítjuk. Egy üzenethez tartozó csomagok nem feltétlenül ugyanazon az úton jutnak el a feladótól a címzettig, közben pedig több útválasztón is áthaladnak. Akármennyire is megpróbálják a forgalmat elosztani, előfordulhat, hogy bizonyos útválasztók túlterhelődnek, és az érkező csomagokat kénytelenek eldobni.

Az eldobott csomagok problémájának kezelésére többféle megoldás létezik. Egyes valós idejű, multimédiás alkalmazásokban (pl. video stream, Skype) megtehetjük, hogy nem törődünk vele, cserében elfogadjuk, hogy a felhasználói élmény romlik. Más alkalmazásokban (pl. email, weboldalak) mindenképpen szükség van az összes csomagra (és a sebesség sem kritikus), ezekre az esetekre találták ki a TCP protokollt, amely megbízható átvitelt biztosít, cserében

bonyolult állapotgépet kell implementálni. Amennyiben mérési adatokat szeretnénk továbbítani az interneten, lényegében ugyanabba a problémába ütközünk, mint a rádiócsatornánál: küldhetjük az adatot a lehető legegyszerűbben, ami a leggyorsabb, de ekkor nem vagyunk benne biztosak, hogy célba ér. Vagy küldhetjük az adatot megbízható módon, de ekkor nagyobb a számításigény.

Azt hihetjük, hogy az adatvesztés minden esetben egy, a kommunikáció során fellépő probléma, de ez nincs feltétlenül így. Kicsit máshogy szemlélve a jelenséget az adatvesztés felfogható a változó frekvenciájú mintavételezés egy speciális esetének, ahol az összes mintát $k * T$ ($k \in \mathbb{Z}$) időpontokban vesszük, de nem feltétlenül az összes ilyen időpontban veszünk mintát. Nem kommunikációs jellegű adatvesztés a következő példa: legyen egy csillagászati megfigyelés, melyet minden nap adott időpontban kell elvégezni, a földről. Látszik, hogy ez időjárási (például felhők) és egyéb körülmények miatt nem sikerülhet minden nap. Hasonló problémát mutat be [14].

Ki tudunk találni egészen szokatlan, a tipikus mérnöki alkalmazásoktól elrugaszkodott lehetőségeket is: tegyük fel, hogy valaki szeretné megbecsülni, hogy az ismerősei egy adott közösségi oldalon mikor lesznek online. Ehhez felhasználhatja az eddig gyűjtött értékeket, viszont csak akkor tud „mérni”, amikor ő is online van. Feltehetjük, hogy nem tud vagy nem akar 7/24 online lenni, ezért bizonyos időszakokban nincs mérés, vagyis adatvesztés van.

A tudományos publikációk, szabadalmak között keresgélve észrevehetjük, hogy sok különféle területen találkozhatunk adatvesztéssel. Például, [7] témája a prediktív szabályozótervezés hálózattal összekötött rendszerekhez, melyekben késletetés és adatvesztés is előfordulhat. [8] azzal foglalkozik, hogy egy szenzorhálózatban hogyan lehet minimalizálni az elveszített adatok mennyiségét.

Egyéb helyeken, például az orvosi alkalmazásokban is találkozhatunk adatvesztéssel, ennek egy esetét mutatja be [9], mely a PET (pozitron emissziós tomográfia) eljárást vizsgálja. A csomagkapcsolt, veszteséges hálózaton keresztüli videotovábbítással, annak hatásával a QoS-re (Quality of Service) fogalakozik [10]. A kvantumszámítógép és alkalmazásai népszerű kutatási témák, [11] a kvantumkriptográfiai kulcszcere során fellépő adatvesztést próbálja csökkenteni.

4.2. Az adatvesztés matematikai leírása

A következőkben bemutatom az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását. Az adatvesztést modellezhetjük úgy, hogy definiálunk egy adatelérhetőségi vagy indikátorfüggvényt:

$$K_n = \begin{cases} 1 & \text{ha az adat elérhető az } n. \text{ ütemben} \\ 0 & \text{ha az adat elveszett az } n. \text{ ütemben} \end{cases} \quad (2)$$

Vagyis a nem elveszett mintákat elérhető, vagy feldolgozott mintáknak fogjuk nevezni. Azokat a mintasorozatokat vagy blokkokat, amelyek nem tartalmazzak elvesztett mintát, teljes sorozatnak vagy blokknak fogjuk hívni.

K_n segítségével definiálhatjuk az adatvesztési arányt:

$$\gamma = P\{K_n = 0\} \quad (3)$$

Ahol $P\{A\}$ a valószínűségi operátor: megadja az A esemény bekövetkezésének valószínűségét. Az adatvesztési arány komplementere annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges adat rendelkezésre áll:

$$\mu = P\{K_n = 1\} = 1 - \gamma \quad (4)$$

A dolgozatban csak ekvidisztánsan mintavételezett jelekkel foglalkozok, mivel az alkalmazások többségében ilyeneket használnak. Tekintsünk egy ilyen jelet, amely minden időpontban ismert, ez legyen $x_{e,n}$ ($x_{eredeti}$ az n . ütemben). Az adatvesztett jelet megkaphatjuk, ha minden ütemben az eredeti jel és az indikátorfüggvény értékeit összeszorozzuk:

$$x_n = K_n x_{e,n} \quad (5)$$

Ha ennek a jelnek a spektrumát szeretnénk megbecsülni, akkor ehhez alkalmazhatjuk a DFT-t (1):

$$X(k) = DFT(x_n) = DFT(K_n x_{e,n}) = \sum_{n=0}^{N-1} K_n x_{e,n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (6)$$

$$(n, k = 0, 1, \dots, N - 1)$$

A szorzatjel DFT-je tétel alapján az így kapott spektrum az eredeti jel és az indikátorfüggvény spektrumainak cirkuláris konvolúciójával kapható meg:

$$X(k) = DFT(K_n x_{e,n}) = DFT(K_n) * DFT(x_{e,n}) \quad (7)$$

Az adatvesztési arány hasznos mutató, viszont az elveszett minták időbeli eloszlásáról nem ad információt. Azon rendszerek esetében, melyekben előfordulhatnak hibák, szokás definiálni a megbízhatósági függvényt ($R(t)$), mely megmutatja annak a valószínűségét, hogy a rendszer hibátlanul működik a $(0; t]$ időintervallumban. Esetünkben a megbízhatóság annak a valószínűsége, hogy az összes minta elérhető és hiba az, ha akár egy minta is elvész a sorozatból. Legyen a mintasorozat hossza L és a megbízhatóság ε , ekkor:

$$R(L) = P \left\{ \prod_{n=1}^L K_n = 1 \right\} = \varepsilon \quad (8)$$

4.3. Adatvesztési modellek

Ebben a részben bemutatok három adatvesztési modellt: a véletlen, független adatvesztést, a véletlen, blokkalapú adatvesztést és a Markov-lánc alapú adatvesztést. Az adatvesztési modellek az indikátorfüggvényre tesznek bizonyos megkötéseket. A véletlen, független adatvesztési modell az egyik legalapvetőbb megközelítés, melyet egyszerűsége miatt sok helyen alkalmaznak. A blokkalapú modell remekül leírja azokat a helyzeteket, amelyekben a mintákat csomagokban továbbítjuk. Ha egy csomag elvész, akkor több, egymás utáni minta vész el. A Markov-lánc alapú megközelítés ott lehet hasznos, ahol véletlenszerűen, változó hosszúságú adatblokkok veszhetnek el.

4.3.1. Véletlen, független adatvesztés

A véletlen, független adatvesztés az alább látható módon definiálható:

$$K_n = \begin{cases} 1 & \mu = 1 - \gamma \text{ valószínűséggel} \\ 0 & \gamma \text{ valószínűséggel} \end{cases} \quad \forall n \quad (9)$$

A definíció azt jelenti, hogy egy tetszőleges minta γ valószínűséggel veszik el (ez egyben az adatvesztési arány), és az adatvesztések egymástól függetlenek. A (8)-ban definiált megbízhatósági függvény:

$$R(L) = \mu^L = \varepsilon \quad (10)$$

4.3.2. Véletlen, blokkalapú adatvesztés

A véletlen, blokkalapú adatvesztésnél az egyes mintákat összefogjuk blokkokba, és vagy az egész blokk elvész, vagy az egész elérhető. Legyen M minta egy blokkban, ezt a blokk hosszának vagy méretének nevezzük. A blokkokra ugyanazt az adatelérhetőségi függvényt írhatnánk, mint a véletlen, független esetben az egyes adatokra. Az indikátorfüggvény:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \mu = 1 - \gamma \text{ valószínűséggel} \\ 0 & \gamma \text{ valószínűséggel} \end{cases} \quad \forall k \quad (11)$$

$$K_{kM+n} = \alpha_k \quad \forall k \quad \forall (n \in \{0, 1, \dots, M-1\})$$

A felső egyenlet a blokkokra vonatkozó elérhetőséget fejezi ki, az alsó pedig, hogy egy adott blokk vagy teljesen elérhető, vagy teljesen elveszett. Látható, hogy az egyes blokkok egymástól függetlenek, és egy tetszőleges blokk γ valószínűséggel vész el. Amennyiben elég sok

blokkot nézünk, γ egyben az adatvesztési arány is. A megbízhatósági függvény (amennyiben a vizsgált L hosszú sorozat blokkhatáron kezdődik):

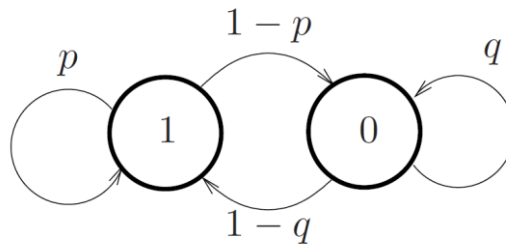
$$R(L) = \mu^{\lceil \frac{M}{L} \rceil} \quad (12)$$

Ahol $\lceil x \rceil$ a felsőegészrész-függvény: megadja a legkisebb, x -nél nem kisebb egész számot.

Ilyen adatvesztés fordult elő [20] első mérési elrendezésénél. Egy vezeték nélküli szenzor valós időben adatokat gyűjtött és 25-ös csomagokban továbbította a mérésiadat-gyűjtő számítógépnek. Az adóberendezéssel egybeépített szenzort kiterjedt fémfelületekhez közel helyezték, hogy a rádiós átvitel tulajdonságait rontsák. Az elrendezéstől függően 0,1 ... 30%-os adatvesztési (blokkvesztési) arányt tudtak elérni.

4.3.3. Markov-lánc alapú adatvesztés

A Markov-lánc elképzelhető egy olyan állapotgépként, amelynek nincsen bemenete, állapotváltozásai véletlenszerűek és kimenete az aktuális állapot. Az első ábrán egy kétállapotú Markov-láncot látunk, ennek a felhasználásával is modellezhetjük az adatvesztést.



1. ábra: Kétállapotú Markov-lánc

Amennyiben az aktuális állapot 1, a következő állapot p valószínűséggel 1 és $1 - p$ valószínűséggel 0. Amennyiben az aktuális állapot 0, a következő állapot q valószínűséggel 0 és $1 - q$ valószínűséggel 1.

E Markov-lánc felhasználásával a következőképp kaphatunk indikátorfüggvényt: az ütemek között történik egy állapotváltozás. Amennyiben az aktuális állapot az n . ütemben 1, akkor $K_n = 1$, ha az aktuális állapot 0, akkor $K_n = 0$. A kezdőállapotot még meg kell adni, ezt is célszerű valószínűségi alapon megadni, hiszen nem tudhatjuk előre, hogy az első adat elérhető-e. Tegyük fel, hogy ismert az adatelérhetőségi arány (μ), ekkor $P\{K_0 = 1\} = \mu$ és $P\{K_0 = 0\} = 1 - \mu = \gamma$. Mivel az aktuális állapot megegyezik az indikátorfüggvény értékével, ezért ezzel a kezdőállapotot is megadtuk. Egyenletekkel összefoglalva:

$$K_0 = \begin{cases} 1 & \mu \text{ valószínűséggel} \\ 0 & \gamma = 1 - \mu \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

$$K_{n+1} = \begin{cases} 1 & p \text{ valószínűséggel, ha } K_n = 1 \\ 0 & 1 - p \text{ valószínűséggel, ha } K_n = 1 \\ 1 & 1 - q \text{ valószínűséggel, ha } K_n = 0 \\ 0 & q \text{ valószínűséggel, ha } K_n = 0 \end{cases} \forall (n > 0) \quad (13)$$

Az adatelérhetőségi arány:

$$\mu = \frac{q - 1}{p + q - 2} \quad (14)$$

Ebből az adatvesztési arány:

$$\gamma = 1 - \mu = \frac{p - 1}{p + q - 2} \quad (15)$$

A megbízhatósági függvény:

$$R(L) = \mu p^{L-1} \quad (16)$$

Markov-lánc alapú adatvesztést idéztek elő [20] második mérési elrendezésében, ahol egy WiFi-n keresztül kommunikáló mobiltelefont helyeztek el a szenzor mellé. Mivel mindkét eszköz ugyanazt a frekvenciát használta, ezért a telefon jele zavarta a szenzor által mért adatok átvitelét.

5. Spektrumbecslés a rezonátoros struktúrával

Ebben a fejezetben bemutatom a rezonátoros struktúrát [5], amely a BME MIT-en lett kifejlesztve, periodikus jelek analízisére, követésére. Majd ismertetem, hogy alkalmazásával hogyan lehet a spektrumot becsülni és azt, hogy hogyan hat a struktúrára az adatvesztés. A fejezethez felhasználtam a [2], [3] és [4] irodalmakat is.

5.1. A rezonátoros jelmodell

A cél egy koncepcionális jelmodell megalkotása, amely képes előállítani sávkorlátozott, periodikus jeleket. Ehhez először tekintsünk egy diszkrét idejű, N minta periódusú jelet. Ez diszkrét Fourier-sorba fejthető, vagyis előáll megfelelő amplitúdójú és kezdőfázisú komplex exponenciálisok összegeként:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (17)$$

Ahol X_k a k . Fourier-együttható. Az egyenletet Z-transzformálva:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{z}{z - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{z}{z - e^{j2\pi f_k}} \quad (18)$$

Ahol f_k a k . komponens relatív frekvenciája. A relatív frekvencia megmutatja, hogy az adott frekvencia hányszorosa a mintavételnek: $f_{relatív} = \frac{f_{tényleges}}{f_{mintavételi}}$. Bevezetve a $z_k = e^{j2\pi f_k}$ pó-lust:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{z}{z - z_k} \quad z_k = e^{j2\pi f_k} \quad (19)$$

A $\frac{z}{z - z_k}$ hányados egy f_k frekvenciával forgó komplex exponenciális, másik szemszögből viszont egy „forgató integrátor”, ugyanis ezt átviteli függvénynek tekintve:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z - z_k} = \frac{1}{1 - z^{-1}z_k} \quad (20)$$

$$Y(z) - z_k z^{-1} Y(z) = U(z)$$

Az egyenletet inverz Z-transzformálva:

$$y_n - e^{j2\pi f_k} y_{n-1} = u_n \quad (21)$$

$$y_n = e^{j2\pi f_k n} y_{n-1} + u_n$$

Amennyiben az $u_n = \delta_n X_k$ ($\delta_n = 1 \Leftrightarrow n = 0$) gerjesztést alkalmazzuk (nulla kezdőállapot mellett), akkor előáll az adott f_k frekvenciához tartozó komplex exponenciális a jel Fourier-sorából. Ugyanezt kapjuk, ha nincs gerjesztés, viszont a kezdőállapot X_k .

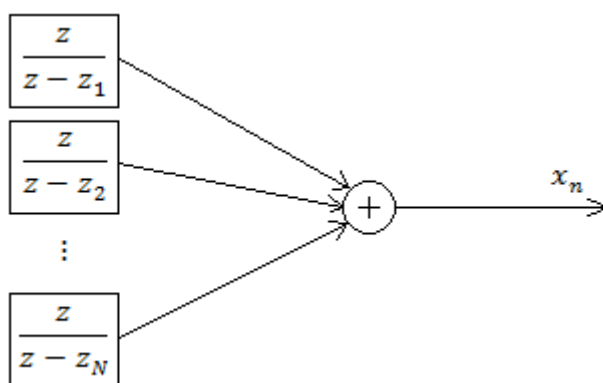
Azt kaptuk, hogy megfelelő kezdőállapotú forgató integrátorok kimeneteinek összegeként előállíthatjuk a periodikus jelünket. Most legyen egy folytonos időben periodikus jelünk, amely mintavételezve aperiodikus. Ez úgy fordulhat elő, hogy a jel frekvenciájának és a mintavételi frekvenciának a hányadosa irracionális. Feltételezhetjük, hogy a mintavételi tétel teljesül, vagyis a jel teljesítményének elhanyagolható része esik a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciasávba. Fontos, hogy a jelmodellben még mindig ismertnek és állandónak tekintjük az alapfrekvenciát. A (17) egyenlet így módosul:

$$x_n \cong \sum_{k=-L}^L X_k e^{j2\pi f_k n} \quad (22)$$

$$f_k = k f_1 \quad f_L < f_s < f_{L+1}$$

Ahol f_1 a jel relatív alapfrekvenciája és f_s a mintavételi frekvencia.

Az előző gondolatmenet alapján azt kapjuk, hogy megfelelő kezdőállapotú és frekvenciájú forgató integrátorok kimeneteinek összegeként tetszőleges periodikus jel mintavételezett verzióját előállíthatjuk. Előállítottunk egy jelmodellt, amely sávkorlátozott, periodikus jeleket generál. A forgató integrátorok pólusait z_1 -től z_N -ig jelölve fel is rajzolhatjuk a modellt:



2. ábra: A koncepcionális jelmodell forgató integrátorokkal

Hatékony jelkiértékelő eljáráshoz juthatunk, ha az eljárás struktúrája a jelmodell struktúráján alapszik. A rezonátoralapú megfigyelő ötlete az, hogy a koncepcionális jelmodellhez egy Luenberger-féle megfigyelőt tervezünk.

A Luenberger-féle megfigyelő a megfigyelt rendszer állapotváltozóit követi, mindezt úgy teszi, hogy futtatja a jelmodellt, a megfigyelt jeltől és a futtatott jelmodell kimenetéből különbségképzéssel hibajelét képezi, amelyet megfelelő visszacsatoló együtthatókon keresztül hozzáad az állapotváltozókhöz, így pontosítva a becslést.

A megfigyelő tervezéséhez szükséges a megfigyelt rendszer (a koncepcionális jelmodell) állapotváltozós leírása, viszont ahhoz, hogy ezt a szokásos alakban kapjuk meg, kicsit módosítani kell a jelmodellen.

Az összes forgató integrátor bemenetére tegyünk egy késleltetőt. Ennek a jel generálásának szempontjából nincs jelentősége, hiszen a jelmodellben a forgató integrátorok bemenete minden ütemben nulla. Az így kapott rendszert nevezzük rezonátornak. Ezt a módosítást nemcsak kényelmi szempontok indokolják. Amennyiben a bemeneten nem lenne késleltető, akkor (mivel a megfigyelő visszacsatolja a jelmodell kimenetét) a megfigyelőben keletkezne egy késleltetésmentes hurok. Az ilyen hurkot tartalmazó hálózat nem reguláris, amely azt jelenti, hogy az állapotváltozós leírása nem állítható elő egyértelműen, vagyis nem tekinthető egy rendszer reprezentációjának.

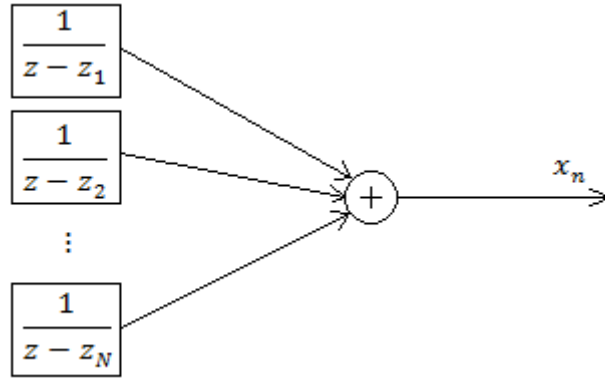
Az egy rezonátort tartalmazó alrendszert csatornának nevezzük. Mivel a késleltető átviteli függvénye z^{-1} és a csatornán belül soros kapcsolat van, ezért egy csatorna átviteli függvénye:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-1} \frac{z}{z - z_k} = \frac{1}{z - z_k} \quad (23)$$

Ezt inverz Z-transzformálva:

$$\begin{aligned} y_n - e^{j2\pi f_k} y_{n-1} &= u_{n-1} \\ y_n &= e^{j2\pi f_k} y_{n-1} + u_{n-1} \\ y_{n+1} &= e^{j2\pi f_k} y_n + u_n \end{aligned} \quad (24)$$

Vagyis megkaptuk egy csatorna állapotegyenletét a szokásos alakban. Felrajzolhatjuk az így módosított jelmodellt, ez képezi az alapját a rezonátoralapú megfigyelőnek.



3. ábra: A koncepcionális jelmodell rezonátorokkal

5.2. A rezonátoros megfigyelő

A megfigyelő tervezéséhez szükséges a megfigyelt rendszer állapotváltozós leírása, mely jelen esetben a rezonátoros jelmodell. Mivel a jelmodell gerjesztetlen, ezért a megfigyelő egyszerűbb lesz, mint az általános esetben. A rezonátorok kimeneteit állapotváltozóknak választva:

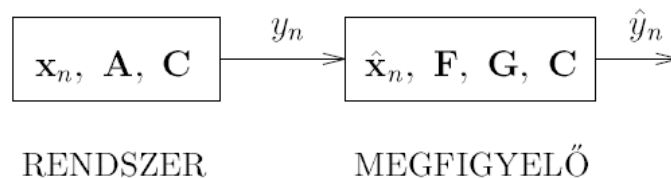
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ y_n &= \mathbf{c}\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = \langle z_i \rangle \quad \mathbf{c} = [1, 1, \dots, 1]$$

Ahol \mathbf{x}_n az állapotvektor, \mathbf{A} a rendszermátrix (a pólusokból álló diagonálmátrix), \mathbf{c} a kimeneti együtthatóvektor és y_n a kimenet. A megfigyelő állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}y_n \\ \hat{y}_n &= \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_n \end{aligned} \quad (26)$$

Ahol \mathbf{F} és \mathbf{g} a megfigyelő rendszermátrixa és bemeneti együtthatóvektora, $\hat{\mathbf{x}}_n$ a becült állapotvektor és \hat{y}_n a becült kimenet, amely egyben a megfigyelő kimenete. Fel is rajzolhatjuk a jelmodellt (rendszer) és a megfigyelő kapcsolatát:



4. ábra: A rendszer és a megfigyelő

Állandósult állapotban bármely n -re:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}_n \quad (27)$$

Az állapotegyenletek alapján:

$$\hat{x}_{n+1} - x_{n+1} = 0 = \mathbf{F}\hat{x}_n + \mathbf{g}y_n - \mathbf{A}x_n \quad (28)$$

$$\mathbf{F}\hat{x}_n + (\mathbf{g}\mathbf{c} - \mathbf{A})x_n = 0$$

(27) alapján:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{c} \quad (29)$$

(26) felhasználásával:

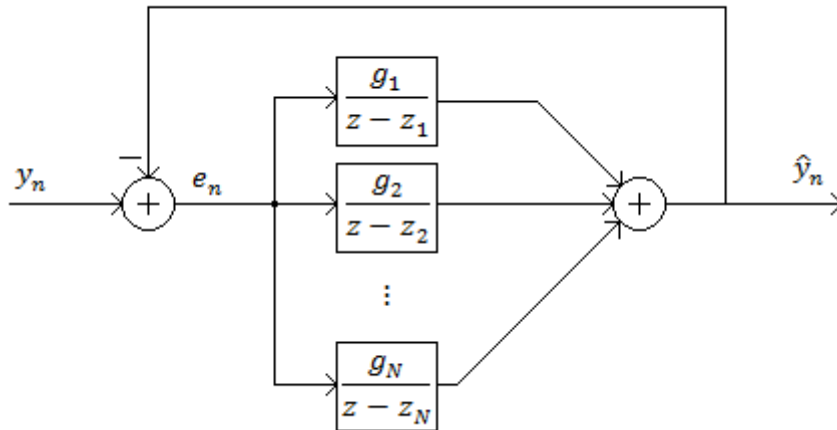
$$\hat{x}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{x}_n + \mathbf{g}(y_n - \mathbf{c}\hat{x}_n) \quad (30)$$

$$\hat{x}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{x}_n + \mathbf{g}(y_n - \hat{y}_n)$$

Bevezetve az $e_n = y_n - \hat{y}_n$ hibajelet:

$$\hat{x}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{x}_n + \mathbf{g}e_n \quad (31)$$

Az eddigiek alapján fel is rajzolhatjuk a megfigyelőt, melyre később RBO-ként (Resonator-Based Observer) fogok hivatkozni:



5. ábra: A rezonátoralapú megfigyelő (RBO)

Láthatjuk, hogy a rezonátoros jelmodell képezi az alapját a megfigyelőnek, és a tervezés kimerül \mathbf{g} vektor (általában mátrix) meghatározásában. Amennyibe előírjuk \mathbf{F} -et, akkor \mathbf{g} egy állapot-visszacsatolási probléma megoldásaként adódik. \mathbf{F} -et általában úgy kell megválasztani, hogy a megfigyelő gyorsabb legyen, mint a megfigyelt rendszer. Diszkrét rendszerek esetén kiemelt szerepük van a véges beállású megfigyelőknek.

Legyen \mathbf{F} előírt karakterisztikus polinomja $D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{c})$, mely monik, azaz 1 vezető együtthatójú. A rendszer sajátértékei és pólusai megegyeznek, ezért a $z = \lambda$ jelölést alkalmazzuk. Ekkor a visszacsatoló együtthatók:

$$g_i = \frac{D(z_i)}{\prod_{l=1, l \neq i}^N (z_i - z_l)} \quad (32)$$

Ha $D(z) = z^N$, akkor a megfigyelő véges beállású. Amennyiben a rezonátor pólusok az egységkörön egyenletesen helyezkednek el ($z_i = \sqrt[N]{1}$), akkor a véges beállítás eléréséhez szükséges együtthatók:

$$g_i = \frac{1}{N} z_i \quad (33)$$

Tekintsük azt az esetet, amikor $g_i = \frac{\alpha}{N} z_i \Leftrightarrow \mathbf{g} = \frac{\alpha}{N} \mathbf{Ac}$. (22)-nek megfelelően f_1 -gyel jelöljük a jel relatív alapfrekvenciáját. Általában három esetet különböztetnek meg az alapfrekvencia és α értékei szerint:

- $f_1 = \frac{1}{N}, \alpha = 1$: a mintavételi frekvencia a jel frekvenciájának többszöröse, ami ekvivalens azzal, hogy a rezonátorok az egységkörön egyenletesen helyezkednek el, vagyis a rezonátor pólusok az N . egységgyökök. A megfigyelő deadbeat beállítású, azaz N ütem alatt képes pontosan beállítani $\hat{\mathbf{x}}_n$ -et. A beállítás előnye a becslés gyorsasága, hátránya a potenciális zajérzékenység.
- $f_1 = \frac{1}{N}, 0 < \alpha < 1$: a megfigyelő exponenciális átlagolást végez az összes harmonikus komponens frekvenciáján. A pólusok: $p_i = (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}i}$, vagyis a pólusok egyenletesen helyezkednek el egy, az egységkörnél kisebb sugarú körön. Az exponenciális átlagolás sajátértéke $\lambda = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}}$ ($e^{-\lambda t}$ értelemben). (Amennyiben szeretnénk az időállandót is használni $e^{-\frac{t}{\tau}}$ értelemben, akkor $\tau = \frac{1}{1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}}}$.)
- f_1 tetszőleges, $0 < \alpha \leq 1$: a megfigyelő impulzusválasza végtelen (még $\alpha = 1$ esetén is). A beállítás nem deadbeat, viszont elég gyors ($\alpha = 1$ esetén), amennyiben a mintavételi frekvencia feléig az összes harmonikus komponenst megfigyeljük.

Hangsúlyozandó, hogy – mivel a jelmodellben az alapfrekvenciát ismertnek tekintjük – a megfigyelőben is ismert az alapfrekvencia, amelyet a gyakorlati alkalmazásokkor előre meg kell adnunk. Ez párhuzamba állítható azzal, hogy a DFT-nél is előre meg kell adnunk a pontszámot. Amennyiben ismeretlen vagy változó alapfrekvenciájú jel spektrumát szeretnénk megbecsülni, akkor célszerű az adaptív Fourier-analizátor (AFA)[6] alkalmazása, mely az RBO továbbfejlesztett változata, azonban ezzel a dolgozat nem foglalkozik.

A gyakorlatban, amikor egy jel spektrumát meg szeretnénk mérni, a mérés során legtöbbször zaj van jelen, mely a mért spektrumot befolyásolja, vagyis mérési hibát okoz. E mérési hiba számunkra szükséges szintre csökkentéséhez átlagolnunk kell. Ha ismerjük (vagy megmértük) a zaj paramétereit, akkor ebből meghatározható az átlagolás szükséges mértéke, amelyből kiszámítható a mérési idő. A helyes méréshez szükséges, hogy a mért spektrum változása a mérési idő alatt elhanyagolható legyen, ez a mérési időre (és így az elérhető pontosságra) felső korlátot jelent.

Szokás zajelnyomásról beszélni, ami mint számérték alatt a variancia csökkenésének mértékét, mint jelenség alatt pedig a variancia csökkenését értjük. RBO esetén ez deadbeat beállítás mellett $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{N}$ fehér zajra, ahol σ_1^2 egy becsült harmonikus varianciája, σ_0^2 pedig az eredeti mérési zaj varianciája. Ha exponenciális átlagolást alkalmazunk, akkor a zajelnyomás $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} \approx \frac{\lambda}{2}$, ahol σ_2^2 az átlagolt kimenet varianciája, σ_0^2 pedig itt is az eredeti mérési zaj varianciája.

Az RBO-t nem célszerű alkalmazni inkohereus mintavétel esetén (itt az inkohereus mintavétel azt jelenti, hogy a rezonátorpozíciók által megadott frekvenciák eltérőek a jel komponenseinek frekvenciáitól), hiszen – zajelnyomási célból – szinte az összes alkalmazásban exponenciálisan átlagolnak, ami az inkohereus mintavételezés eredményére nagymértékben hatással van. Amennyiben nem alkalmazunk exponenciális átlagolást, egy csatorna amplitúdóátviteli karakterisztikája [4] szerint úgy alakul, mint amit DFT esetén kapunk, amennyiben nem használunk ablakfüggvényt. A rezonátor amplitúdóátviteli karakterisztikáján azt értjük, hogy arra a rendszerre írjuk fel az átviteli karakterisztikát, amelyben a kimenet az adott rezonátor értéke (de ettől függetlenül az összegző-visszacsatoló hurok továbbra is megvan), és ennek vesszük az abszolút értékét.

Viszont, ha inkohereus mintavételnél exponenciális átlagolást alkalmazunk, akkor a csatorna amplitúdóátviteli karakterisztikája [4] alapján jelentősen megváltozik: két rezonátor között (az időállandótól függően) akár több tíz dB-es csillapítása is lehet, továbbá az átvitel „csúcsos” jellegű, vagyis csak a rezonátorok közvetlen közelében van egyhez közeli amplitúdóátviteli tényező. Minél nagyobb az időállandó, annál nagyobb ez a csillapítás és annál szűkebb a csúcs.

Létezik a koncepcionális jelmodellnek egy másik változata is, amelyben integrátorokat használunk, amelyek bemenetére és kimenetére egy-egy időben változó (forgó) komplex exponen-

ciális szorzót teszünk. Mindjárt látni fogjuk, hogy a spektrumbecsléshez célszerű a rezonátorost használni.

5.3. A spektrumbecslés megvalósítása

Láttuk, hogy az RBO nem más, mint egy állapotmegfigyelő a rezonátoros jelmodellhez. A rezonátoros jelmodell állapotváltozói a forgó komplex exponenciálisok, melyek kezdeti értékei a Fourier-együtthatók. Amennyiben az állapotváltozókat „visszaforgatjuk”, megkapjuk a Fourier-együtthatókat.

(25) alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{A}^n &= \langle z_i^n \rangle \end{aligned} \quad (34)$$

Ahhoz, hogy \mathbf{x}_0 -t megkapjuk, az egyenletet balról szorozzuk meg \mathbf{A}^n inverzével, \mathbf{A}^{-n} -nel:

$$\mathbf{A}^{-n} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \quad (35)$$

Mivel \mathbf{A}^n diagonálmátrix, inverze egyszerűen számítható: $\mathbf{A}^{-n} = \langle z_i^{-n} \rangle$. Mivel az állapotváltozók kezdeti értékei a Fourier-együtthatók, az egyenlet így írható:

$$\langle z_i^{-n} \rangle \mathbf{x}_n = [X_i]^T \quad (36)$$

Ahol $[X_i]^T$ a Fourier-együtthatók oszlopvektora. Amennyiben a jel periódusa N minta, a Fourier-együtthatók megkaphatók a jel (N pontos) DFT-jéből skálázással:

$$X_k = \frac{1}{N} X(k) \quad (37)$$

Az előző két egyenlet alapján – feltéve, hogy a megfelelő sorrendben vannak az állapotváltozók – a jel DFT-je megkapható a következő módon:

$$DFT(x_n) = N \langle z_i^{-n} \rangle \mathbf{x}_n \quad (38)$$

Ha a jel diszkrét időben nem periodikus, a (36) még mindig igaz, vagyis ebben az esetben az RBO a jel spektrumának becslését adja a $z_i = e^{j2\pi f_i}$ -knek megfelelő f_i relatív frekvenciákon.

Amennyiben a másik (integrátoros) jelmodellt használjuk, akkor az állapotváltozók bármelyik ütemben megadják a spektrum becslését a megfelelő frekvenciákon. Az integrátoros jelmodellnél minden ütemben kétszer kell forgatni: egyszer a kimeneti együtthatóknak megfelelően az állapotváltozókat, egyszer pedig az integrátorok bemenetén kell a „javító” jeleket visszaforgatni. A rezonátoros jelmodellnél is minden ütemben kétszer kell forgatni: egyszer az állapotváltozókat, és egyszer az állapotváltozókat vissza a spektrumszámításhoz (de ezt a vissza-

forogatást nem „mentjük el”). Amennyiben nem kérdezzük le minden ütemben a spektrumot, vagy csak az amplitúdóspektrumra vagyunk kíváncsiak, akkor a rezonátoros jelmodell használata esetén potenciálisan kisebb a számításigény, mint az integrátorosnál.

A mérések megtervezésekor a mérési idő fontos adat, melyet átlagolás esetén úgy kell meghatározni, hogy a mérés végére (amennyiben a többi feltétel ezt lehetővé teszi) az átlagolt érték számunkra kellő hibával közelítse a valódit. Ehhez szokás használni a beállási idő fogalmát. Tegyük fel, hogy $n < 0$ ütemekben a mért jel spektruma X_0 , $n \geq 0$ ütemekben pedig X_1 , és exponenciális átlagolást alkalmazunk az RBO-ban. Feltételezhetjük, hogy $n = 0$ -ban állandósult állapotban vagyunk, vagyis az állapotváltozók értékei a nekik megfelelő Fourier-együtthatók értékeivel megegyeznek. Az exponenciális átlagolás időállandója (τ) megadja, hogy konstans bemenet (végérték, célérték) mellett mennyi idő (itt: hány ütem) alatt csökken az átlagolt érték abszolút hibája (átlagolt érték és végérték abszolút eltérése) $\frac{1}{e}$ -szeresére.

Ebben az esetben tetszőleges komponens hibájának alakulása felírható a következő alakban: $h_{i,n} = |X_0(i) - X_1(i)|e^{-\frac{n}{\tau}}$ ($h_{i,n}$ az i . komponens hibája az n . ütemben). A hiba arányaiban minden frekvencián ugyanúgy csökken, az összes komponens esetén az n . ütembeli és kezdeti hibák aránya ugyanaz, mégpedig $e^{-\frac{n}{\tau}}$. Ezért van értelme az egész spektrumra vonatkozó ε határhibáról beszélni, amelynél kisebb hiba esetén úgy tekintjük, hogy a kimenet beállt a végértékére. A beállási idő (T) definíciója ezek alapján: $\varepsilon = e^{-\frac{T}{\tau}}$. Adott időállandó esetén táblázatba foglalhatjuk a T és hozzájuk tartozó ε értékeket:

T	ε
τ	0,36788
2τ	0,13534
3τ	0,04979
5τ	0,00673
10τ	0,00004

1. táblázat: Beállási idők és határhibák

5.4. Az adatvesztés hatása a rezonátoros struktúrára

Tekintsünk (5) szerint egy adatvesztett jelet, és az ehhez tartozó koncepcionális jelmodell állapotváltozós leírását:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ y_n &= K_n \mathbf{c}\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{A} = \langle z_i \rangle \quad \mathbf{c} = [1, 1, \dots, 1]$$

A jelmodell kimeneti egyenlete változott: a kimenetet megszoroztuk a K indikátorfüggvény n . ütembeli értékével.

Amennyiben ehhez a jelmodellhez tervezünk egy megfigyelőt, (30) a következőképp alakul:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}K_n(y_n - \hat{y}_n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{g}K_n e_n \quad (40)$$

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy adatvesztés esetén a megfigyelő állapotváltozóit csupán a rendszermátrixnak megfelelően frissítjük, nincs innovációs tag. Vagyis van time-update, de nincs measurement-update, mivel az ehhez szükséges minta elveszett.

A megfigyelők egyik legfontosabb kérdése a konvergencia, vagyis, hogy zajmentes esetben a becslési hiba, zajos esetben pedig annak várható értéke tartson nullába, ha $n \rightarrow \infty$. Ez a szempontunkból azt jelenti, hogy az RBO képes a spektrum pontos becslésére.

A konvergencia szükséges feltételét megkaphatjuk, ha tekintjük a (39) által adott rendszer megfigyelhetőségi mátrixát:

$$\mathbf{O}_n = \begin{bmatrix} K_0 \mathbf{c} \\ K_1 \mathbf{A}\mathbf{c} \\ K_2 \mathbf{A}^2 \mathbf{c} \\ \vdots \\ K_{N-1} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Amennyiben \mathbf{O}_n rangja N , a rendszer megfigyelhető, ami a konvergencia szükséges feltétele. Ez deadbeat beállású megfigyelő esetén elégséges feltétel is.

Amennyiben a rezonátorpozíciók az egységkörön egyenletesen helyezkednek el (vagyis a mintavételezés koherens és a periódusidő N minta), a \mathbf{c} , $\mathbf{A}\mathbf{c}$, ..., $\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{c}$ periodikusak N -nel, vagyis \mathbf{O}_n -ben az egyes indikátorfüggvény értékeket tetszőlegesen kicserélhetjük egy, az adott sorhoz képest $k * N$ ($k \in \mathbb{Z}$) ütemmel eltolt értékre. Amennyiben még ilyen cserékkel sem lehetséges N rangú megfigyelhetőségi mátrixot előállítani, akkor ez azt jelenti, hogy létezik legalább egy pozíció, mely esetén az összes vizsgált periódusban adatvesztés történik, ezt hívjuk szinkronizált adatvesztésnek. Az eddigiekből következik, hogy szinkronizált adatvesztéskor a megfigyelő nem konvergens.

A konvergencia szükséges feltételeinek jelentősége az, hogy segítségükkel megállapíthatók azok a helyzetek, melyekben nem alkalmazhatjuk az RBO-t, mert hibás becslésre vezetne. A

konvergenciára több elégséges feltételt fogalmazhatunk meg [3], ezek közül egy, a gyakorlatban is kiemelkedő szerepű az, hogy az adatvesztés véletlenszerű. Az elégséges feltételek megmutatják, hogy milyen helyzetekben kaphatunk (elegendően hosszú mérési idő alatt, a zajtól eltekintve) pontos eredményt.

Amennyiben a megfigyelőben exponenciális átlagolást alkalmazunk, akkor a kimenet beállításához tartozó időállandóra is hatással van az adatvesztés, hiszen nem tudunk a becslésen javítani, ha nem áll rendelkezésre friss mérési adat. Általánosságban kijelenthetjük, hogy ez az időállandó az adatvesztési arány növekedésével növekszik.

Ezt az összefüggést általánosan, kvantitatív módon meghatározni bonyolult feladat lenne, azonban az aszimptotikus viselkedését könnyen kitalálhatjuk. Teljes adatvesztés esetén (azaz, amikor az összes adat elveszik), az időállandó végtelen, mivel a beállási idő is az (mert soha sem lehet javítani a becslésen).

Véletlen, független adatvesztés és koherens mintavétel esetén többet mondhatunk. Ekkor (elég hosszú adatsorra) teljesül, hogy N méretű blokkokra osztva az indikátorfüggvényt, bármelyik, a blokkokon belüli (pl. minden blokkból a harmadik) pozíciót tekintve az adott pozícióra vonatkozó adatvesztési arány egyenlő a teljes adatsorra vonatkozó adatvesztési aránnyal. Ez alapján, γ adatvesztési arány mellett M blokknyi adatból $(1 - \gamma)M$ blokknyi adat érvényes.

$(1 - \gamma)M$ érvényes blokk feldolgozásával az átlagolási időállandó (τ) ismeretében a becslési hibát lecsökkenthetjük $e^{-\frac{(1-\gamma)MN}{\tau}}$ -szorosára. Ahhoz viszont, hogy a kimeneten ez megjelenjen, meg kell várnunk mind az M blokkot (hogy elegendő érvényes minta legyen), ami felfogható úgy, hogy a kimeneti, vagyis a beálláshoz társítható időállandó más (nagyobb) lenne, mint az átlagoláskor beállított. Egyenletben megfogalmazva:

$$e^{-\frac{(1-\gamma)MN}{\tau}} = e^{-\frac{MN}{\tau_k}} \quad (42)$$

Ahol τ_k a kimenet beállításához társítható időállandó. Rendezve:

$$\tau_k = \frac{1}{1 - \gamma} \tau \quad (43)$$

A kapott összefüggés teljesíti az általánosan megfogalmazott viselkedést is: teljes adatvesztés esetén az időállandó végtelennek adódik. A gondolatmenet kulcsfeltétele az, hogy a blokkon belüli bármelyik pozíción ugyanaz az adatvesztési arány. Belátható, hogy ez véletlen, blokk-alapú adatvesztés esetén is teljesíthető, így a kapott eredmény arra is érvényes.

6. Spektrumbecslés FFT és nullával lezárás alkalmazásával

Kétségtelen az FFT domináns szerepe spektrumbecslési feladatok esetén, mely annak köszönhető, hogy ez az egyik legkevesebb számítást igénylő eljárás. A DFT hatékony kiszámítására többféle FFT algoritmus létezik [17], viszont valós idejű jelfeldolgozó rendszerekben szinte kizárólag olyant alkalmaznak, melynek pontszáma a kettő pozitív egész kitevőjű hatványa (továbbiakban: kettőhatvány), ezért a dolgozatban csupán ezekkel foglalkozom. A fejezetben bemutatok egy módszert, amely az FFT-t alkalmazza adatvesztett jelek spektrumának becslésére, viszont ehhez a jelet „levágja” az első adatvesztésnél, vagyis a mintasorozat az első hiányzó mintával kezdődően nulla (ezt az angol szakirodalomban „zero padding”-nek nevezik), illetve a jelet megfelelő együtthatóval skálázza. A fejezethez felhasználtam az [1] irodalmat.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért van szükség speciális eljárásokra adatvesztés esetén, mi mögöttük a motiváció. Az adatvesztett jel (5) alapján felírható az eredeti jel és az indikátorfüggvény szorzataként. Ha a jobb oldalhoz hozzáadjuk a jel eredeti értékét és le is vonjuk belőle, akkor a következőt kapjuk: $x_n = x_{e,n} - (1 - K_n)x_{e,n}$. Tehát az adatvesztés (a kvantáláshoz hasonlóan) felfogható egy speciális additív zajként is, melynek spektruma hozzáadódik az eredeti jel spektrumához. Az eljárások célja e zaj teljesítményének csökkentése [1], mert a nagy zajteljesítmény nehezzé vagy lehetetlenné teheti kis amplitúdójú spektrumkomponensek detektálását.

A vizsgált eljárás a következő:

0. Adott x_n és K_n ($n = 0, 1, \dots, N - 1$) bemenő jel és indikátorfüggvény.
1. Legyen $L = \min \{N; n, \text{ ahol } K_n = 0\}$, vagyis az első adatvesztés helye. A minimum argumentumába azért kell bevenni N értékét, mert ha nincs adatvesztés, akkor $L = N$ esetén az eljárás a jelet változatlanul hagyja.
2. Módosítjuk az indikátorfüggvényt: az első adatvesztéssel kezdve kinullázzuk a jel értékeit:

$$K'_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n < L \\ 0 & \text{ha } n \geq L \end{cases} \quad (44)$$

3. A jelet $\frac{N}{L}$ -el megszorozzuk és alkalmazzuk az új indikátorfüggvényt:

$$y_n = \frac{N}{L} x_n K'_n \quad (45)$$

4. Ha $L \geq N_{min}$, akkor kiszámítjuk y_n DFT-jét:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (46)$$

Ablakfüggvény használata esetén, az ablakfüggvény hossza nem N , hanem L és az ablakfüggvényt csak az érvényes részre alkalmazzuk.

(Ha $L < N_{min}$, a blokkból nem számítunk spektrumot.)

5. Az így megkapott $Y(k)$ az x_n spektrumának becslése.

6.1. Az eljárás vizsgálata

Először nézzük meg, hogy mit okoz önmagában a jel levágása, ehhez vegyünk egy N hosszúságú, csupa egyesből álló mintasorozatot:

$$x_{e,n} = 1 \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (47)$$

Ennek DFT-je (1) alapján könnyen kiszámítható:

$$X_e(k) = \begin{cases} N & \text{ha } k = 0 \\ 0 & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (48)$$

Most vegyük figyelembe az adatvesztést: legyen egy K_n indikátorfüggvényünk, és legyen $L = \min \{N; n, \text{ ahol } K_n = 0\}$. L megmutatja az első adatvesztés helyét a blokkban (illetve $L = N$, amennyiben nincs adatvesztés). A levágás (vagy nullával lezárás) kifejezhető az indikátorfüggvény módosításával:

$$K'_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n < L \\ 0 & \text{ha } n \geq L \end{cases} \quad (49)$$

Itt felhasználtuk L definícióját: az összes L -nél kisebb indexű minta érvényes. Az adatvesztett és nullával lezárt jel láthatóan megegyezik az indikátorfüggvénnyel, hiszen $x_{e,n} = 1$:

$$x_n = x_{e,n} K'_n = K'_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n < L \\ 0 & \text{ha } n \geq L \end{cases} \quad (50)$$

Számítsuk ki ennek a DFT-jét:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (51)$$

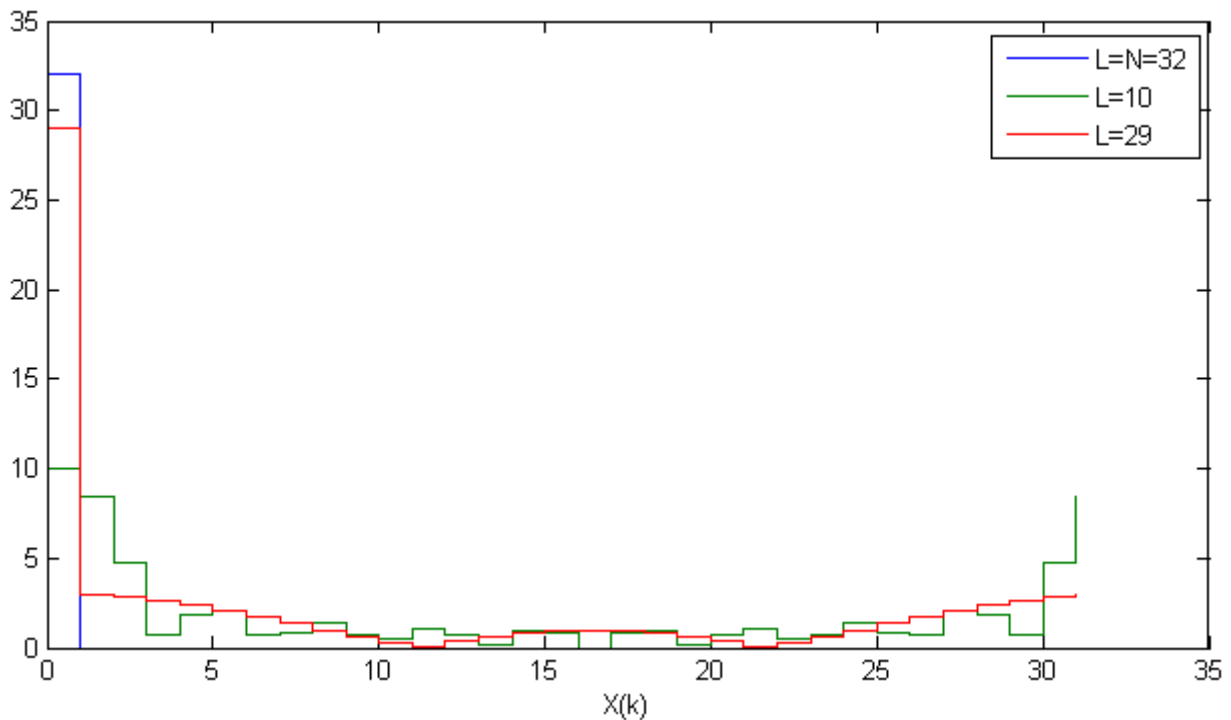
Mivel $n \geq L$ esetén x_n nulla, egyébként egy:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (52)$$

Alkalmazva a mértani sorozat összegképletét:

$$X(k) = \begin{cases} L & \text{ha } k = 0 \\ \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}kL}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (53)$$

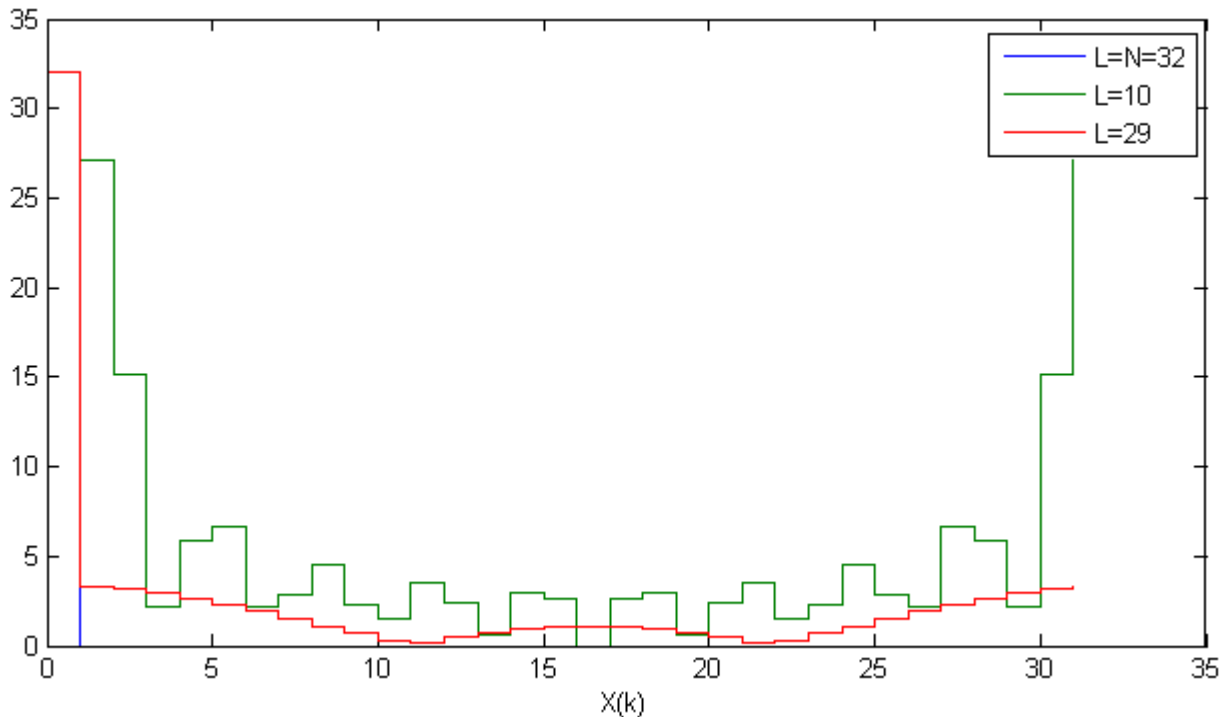
Két nemkívánatos hatást fogalmazhatunk meg: egyrészt, a DC komponens amplitúdója csökkent, másrészt a többi frekvencián is megjelent egy nullától különböző érték. $N = 32$ esetén ábrázoltam az eredeti amplitúdóspektrumot; illetve az $L = 10$ és $L = 29$ esetek eredményét:



6. ábra: A nullával lezárás hatása a DFT értékeire

Az ábrán az egyes frekvenciákhoz tartozó értékeket egy-egy oszloppal jelenítettem meg, szemléltetve a spektrum diszkrét jellegét. Az első hibát könnyen javíthatjuk, nincs más dolgunk, mint x_n -t megszorozni $\frac{N}{L}$ -lel. Triviális, hogy ez a skálázás a többi komponens hibáját is felnagyítja. Ekkor a DFT értéke és az ábra így alakul:

$$X(k) = \begin{cases} N & \text{ha } k = 0 \\ \frac{N}{L} \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}kL}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} & \text{ha } k \neq 0 \end{cases} \quad (54)$$



7. ábra: A nullával lezárt jel spektruma az amplitúdóhiba javításával

A DFT frekvenciatartománybeli eltolási tétele alapján ez az okfejtés a többi frekvenciára is igaz, illetve a DFT linearitása miatt bármely jel esetén szükséges az $\frac{N}{L}$ -lel való szorzás.

Felvetődik az ötlet, hogy javítsuk ki a szivárgást is, viszont ezt nem lehet megtenni, mert a DFT N komplex számnyi információt N komplex számnyi információvá alakít. Vagyis, ha eredetileg $L < N$ minta áll rendelkezésre (és semmi egyebet nem tudunk, amit általában feltételezhetünk), akkor lehetetlen a DFT mind az N pozícióját pontosan kiszámítani.

Látszik, hogy L csökkenésével a szivárgás mértéke növekszik. Ezért célszerű L -re egy alsó határt (N_{min}) megszabni, amely alatt a blokknak nem számítjuk a DFT-jét. [1] alapján $N_{min} \geq \frac{N}{4}$ érték javasolt.

Vizsgáljuk meg, hogy miért kell módosítani az ablakfüggvény hosszán. Az ablakfüggvények amplitúdóját úgy határozzák meg, hogy egész periódusra vett átlaguk egy legyen, ellenkező esetben a mért jel komponenseinek nagyságát nem tudnánk pontosan kiszámítani. Ha a jelet levágjuk, akkor vele együtt az ablakfüggvényt is levágjuk, ezzel elveszítjük az ablakfüggvény azon tulajdonságát, hogy átlaga egy, vagyis a becslés amplitúdóhibás lesz. Viszont, ha az ablakfüggvényt az érvényes rész hosszához illesztjük, akkor ezt a hibát kiküszöbölhetjük.

Az illesztett ablakfüggvény használatát az is indokolhatja, hogy általában a jelet nem nulla értéknél vágjuk le, vagyis egy ugrást teszünk a végére. Ennek a hatása még koherens mintavétel esetén is olyan, mintha inkohereensen mintavételeztünk volna, vagyis koherenciavesztés

történik. Az ugrás mértéke (és ebből adódóan a spektrumra gyakorolt torzító hatása) illetett ablakfüggvény használatával csökkenthető.

Amennyiben az alkalmazás nem teszi lehetővé, hogy minden blokkhoz kiszámítsuk az illetett ablakfüggvényt, akkor egy közelítő megoldással élhetünk. Bizonyos felbontással $(\frac{N}{d})$ előállítjuk az ablakfüggvényeket az $N_{min} \leq L_i = i \frac{N}{d} \leq N$ ($i \in \mathbb{N}$) tartományban, és ezeket eltávolítjuk. Adott L érvényes hossz esetén a legrövidebb, ennél nem rövidebb előállított ablakfüggvényt használjuk.

6.2. Átlagolási módszerek

Az alkalmazások többségében a jelek, melyeknek kíváncsiak vagyunk a spektrumára, zajosak, melynek hatása spektrumban is jelentkezik. Ezért a pontosabb becslés érdekében célszerű több blokkból is spektrumot számítani, majd átlagolni, melyre többféle módszer létezik. Jelölje DFT_i az i . blokk DFT-jét, M a blokkok számát és DFT_{avg} az átlagolt spektrumot.

- Lineáris átlagolás: a spektrumok számtani közepét képezzük.

$$DFT_{avg} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M DFT_i \quad (55)$$

- Lineáris átlagolás J hosszú csúszóablak alkalmazásával: az utolsó J mérési eredmény számtani közepét vesszük.

$$DFT_{avg} = \frac{1}{J} \sum_{i=M-J+1}^M DFT_i \quad (56)$$

- Exponenciális átlagolás α együtthatóval: a legfrissebb mérési eredményt α , míg az eddigi becslést $1 - \alpha$ együtthatóval vesszük figyelembe:

$$DFT_{avg,i} = \alpha DFT_i + (1 - \alpha) DFT_{avg,i-1} \quad (57)$$

Ahol $DFT_{avg,i}$ az átlagolt spektrum az i . blokk feldolgozása után. Természetesen ezek az átlagolások alkalmazhatók az amplitúdóspektrumokra is.

A csúszóablakos megoldás alkalmazhatósága korlátozott, mivel J darab blokk DFT-jét el kell tárolni, ami miatt vagy több memóriára van szükség, vagy a DFT pontszámát kell csökkentenünk. A lineáris átlagolást célszerű viszonylag rövid időre végezni, amíg feltételezhető, hogy a jel spektruma nem (vagy elhanyagolható mértékben) változik. Ha a spektrum hosszú időn át is állandó, akkor pedig numerikus problémák (pl. lebegőpontos számábrázolás, túlsordulás)

miatt nem lehet korlátlanul sok blokkból átlagolni. Az itt bemutatott okok miatt alkalmaznak a legtöbb helyen exponenciális átlagolást.

Az átlagoláson kívül a blokkok átlapolása egy, a gyakorlatban széles körben alkalmazott módszer, melynek célja, hogy a becslés gyorsabban konvergáljon. Ennek a lényege, hogy a blokkok egymást bizonyos mértékben átfedhetik. A $0 \leq \beta < 1$ átfedési vagy átlapolási arány azt jelenti, hogy ha az első blokk n_1 ütemben kezdődik és N minta hosszú, akkor a következő blokk $n_2 = n_1 + (1 - \beta)N$ ütemben kezdődhet. Szemléletesen fogalmazva β megmutatja, hogy egy blokk mekkora része közös a következő blokkal. [18] alapján a maximális javasolt átfedés 75%. A nagyobb átfedés azt is jelenti, hogy gyakrabban frissítjük a becsült spektrumot, illetve ennek a kiszámítására kevesebb időnk van.

6.2.1. Spektrumok összeadása, az átlagolás elméleti alapjai

Az előzőekben könnyelműen felírtuk (akár átlapolott blokkokból származó) spektrumok összegét, most ezt vizsgáljuk meg kicsit részletesebben.

Legyen egy periodikus (N minta periódusú) jel x_n , és ennek $n_0 = 0$ ütemtől kezdve vett N mintából számított spektruma $X(k)$. Ha kiszámítjuk x_n spektrumát az n . ütemmel kezdődő blokkból, akkor a DFT időtartománybeli eltolási tétele alapján $X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ értéket kapunk. Észrevehető az analógia az RBO-val (feltételezve, hogy $z_i = \sqrt[N]{1}$), ahol X_k értékeit tárolják az állapotváltozók, melyek minden ütemben $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ -val szorzódnak.

Speciálisan $n = a * N$ ($a \in \mathbb{Z}$) esetre megkapjuk $X(k)$ -t. Annak, hogy két blokkból származó spektrumokat összeadjunk (átlagolási célból) a feltétele az, hogy olyan blokkokból származzanak, melyek kezdőpontjai egymástól $a * N$ ($a \in \mathbb{Z}$) ütem távolságra vannak. Ellenkező esetben egy IDFT-t az átlagolt spektrumon elvégezve, megkapnánk a jelnek és az időbeli eltolásának az átlagát, ami a mi szempontunkból hibás működés, hiszen varianciacsökkentési célból akarunk átlagolni.

Amennyiben tetszőleges kezdőpontú blokkok DFT-ét szeretnénk átlagolni, akkor ehhez a blokkokat időben megfelelően el kell tolni (hogy az összes $n + a * N$ ($a \in \mathbb{Z}$) ütemben kezdődjön), vagy, ami ezzel ekvivalens, a DFT-ken átlagolás előtt az eltolásnak megfelelő fázisforogatást kell alkalmazni.

Vegyük észre, hogy inkohereus mintavétel esetén (vagyis, ha a jel nem N minta periódusú) nem tudunk olyan (jeltől független) fázisforogatást (sem időtartománybeli eltolást) adni, amely használatával tetszőleges, inkohereusen mintavett jelből számított DFT-blokkok fázisban le-

gyenek, vagyis a komplex spektrumok nem átlagolhatók. Mivel itt a probléma oka az, hogy a fázisok mások (szisztematikusan mások), ezért ezen az ablakfüggvény használata sem segít.

A legtöbb alkalmazásban elegendő csak az amplitúdóspektrumot (vagy az ebből számítható teljesítménysűrűség-spektrumot) ismerni, ezekben nincs szükség időbeli eltolásra vagy fázisforgatásra átlagolás előtt (és értelme sem lenne), feltéve, hogy az átlagolni kívánt amplitúdóspektrumokat a komplex spektrumokból átlagolás előtt kiszámítjuk. Ebben az esetben (megfelelő ablakfüggvény használatával) nem okoz problémát az inkohereus mintavétel sem.

6.2.2. Az exponenciális átlagolás együtthatója és időállandója

Tegyük fel, hogy a kiszámított spektrumokat exponenciálisan szeretnénk átlagolni, τ (egy ütemre vonatkoztatott) időállandóval és β átfedéssel. Ekkor $T = (1 - \beta)N$ ütemenként kapunk újabb DFT-blokkot, és T ütemenként fogunk egy átlagolási lépést végrehajtani. A cél meghatározni azt az együtthatót, mellyel ugyanazt a hatást érnék el, mintha egyesével átlagoltunk volna, τ időállandóval.

Mivel a T ütem közül csupán egyről, az utolsóról van spektruminformációnk, becsüljük ezzel a többi ütemben kiszámítható spektrumokat. Ez a becslés elfogadható, mivel feltételezhetjük, hogy T minta alatt a mérendő spektrum változása kicsi, ez közelíthető úgy, hogy a vizsgált T ütem alatt a spektrum állandó. Az összes frekvencián ugyanúgy és egymástól függetlenül történik az átlagolás, ezért vizsgálhatók egyszerre, egymástól külön kezelve.

Mivel az exponenciális átlagolásban a két érték különbsége a meghatározó, és a művelet lineáris, az általánosság megszorítása nélkül legyen $X_{\text{átl}}(t = 0) = 1$ és $X_{\text{új}}(0 < t \leq T) = 0$, ahol $X_{\text{átl}}$ és $X_{\text{új}}$ egy adott frekvencián az eddig átlagolt és az új mérési eredmény. Amennyiben egyesével átlagolunk, akkor egy lépésben $X_{\text{átl}}$ értéke megszorozódik $e^{-\frac{1}{\tau}}$ -val. T lépés után:

$$X_{\text{átl}}(t = T) = X_{\text{átl}}(t = 0)e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (58)$$

T értékét behelyettesítve:

$$X_{\text{átl}}(t = T) = X_{\text{átl}}(t = 0)e^{-\frac{(1-\beta)N}{\tau}} = X_{\text{átl}}(t = 0)e^{-\frac{1}{(1-\beta)N\tau}} \quad (59)$$

Azt kaptuk, hogy a T ütemre vonatkoztatott ekvivalens időállandó:

$$\tau' = \frac{\tau}{(1 - \beta)N} \quad (60)$$

(57) alapján az új átlagolt spektrumban a régi $1 - \alpha$ súllyal szerepel, ezért:

$$1 - \alpha = e^{-\frac{(1-\beta)N}{\tau}} \quad (61)$$

Tehát az exponenciális átlagolás együtthatója:

$$\alpha = 1 - e^{-\frac{(1-\beta)N}{\tau}} = 1 - e^{-\lambda(1-\beta)N} \quad (62)$$

Ennél a módszernél az exponenciális átlagolást T ütemenként végezzük el, vagyis amikor új spektrumot számítunk. A többi ütemben, amit a becsült spektrumnak mondhatunk, az a legutóbbi átlagolt érték (ellenben a számítás során használt következő értékkel). Vagyis a spektrumbecslés hibája lépcsős beállású, és a lépcsők egy exponenciális függvényre illeszkednek, ezért T -nél jóval nagyobb mérési idő esetén jogos az exponenciális beállással való közelítés.

A beállási idő adatvesztéstől való függéséről első közelítésben ugyanazt mondhatjuk el, mint az RBO-nál: az adatvesztési arány növekedésével a beállási idő növekszik, teljes adatvesztésnél a beállási idő végtelen. A pontosabb megadás problémás, mivel a szivárgás változó mértéke miatt a beállítás értelmezése nehézkes.

7. Módosított spektrumbecslési eljárás FFT-vel

Az előző két fejezetben külön-külön bemutatam a rezonátoros struktúrát és egy FFT alapú módszert. Utóbbiról tudjuk, hogy számítási igényt tekintve kedvező, viszont már viszonylag alacsony adatvesztési aránynál is pontatlan becslést ad, amennyiben nem a meghatározó spektrumkomponensek keresése a cél. Az RBO-ról elmondhatjuk, hogy az adatvesztés mértéke csupán azt befolyásolja, hogy milyen gyorsan konvergál a becslés, viszont több számítást igényel, mint az FFT. (Erről részletesebben később lesz szó, de az RBO nem igényelhet lényegesen kevesebb számítást, mert akkor ez lenne az elterjedtebb módszer.) A fejezetben bemutatok egy eljárást, amely célja egyesíteni a két módszer előnyeit.

Az ötlet a következő: használjuk az FFT-t spektrumbecslésre, és adatvesztés esetén próbáljuk elérni azt a viselkedést, amit az RBO-nál tapasztalhatunk. (40) alapján azt kaptuk, hogy adatvesztés esetén az RBO az e_n hibajel alapján nem frissíti az állapotváltozóit. e_n akkor is nulla, ha a beérkező jel és a becsült jel értéke megegyezik. Ezek alapján mondhatjuk azt, hogy az adatvesztést az RBO úgy kezeli, mintha abban az ütemben a becslése pontos lenne. Ez az a viselkedés, amit el szeretnénk érni az FFT alkalmazásakor is.

Azt kihasználva, hogy (periodikus esetben) lineáris kapcsolat van a DFT értékei és a Fourier-együtthatók között, illetve a koncepcionális jelmodell állapotváltozóinak kezdeti értékei a Fourier-együtthatók, a jelmodell kimenetét felírva megkapjuk az IDFT formuláját:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (63)$$

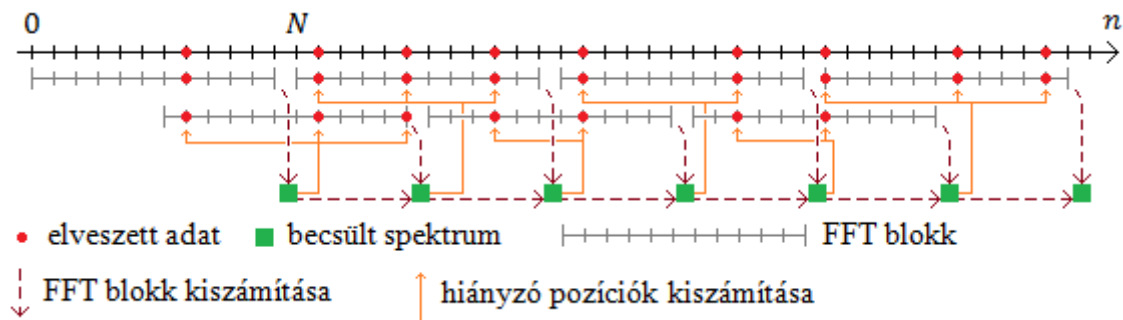
Ezzel a képlettel (amennyiben nincs adatvesztés) képesek vagyunk visszaállítani, hogy mi volt az az x_n periodikus jel, amelynek a spektrumát ($z * N$ ($z \in \mathbb{Z}$) ütemmel kezdődő blokkból) előállítva megkapjuk $X(k)$ -t. Ha (63) szerint a hiányzó mintákat az eddig meglévő legjobb becslésből kiszámítjuk, akkor azzal elérjük a kívánt viselkedést.

Ennek belátásához először tekintsük azt, hogy az RBO adatvesztés esetén ugyanúgy viselkedik, mintha a becslése pontos lenne. Az FFT-s eljárásnál pontos becslés azt jelenti, hogy a DFT-ből visszaállított periodikus jel megegyezik a bemeneti jellel (vagy annak zajmentesített változatával), ekkor pedig számíthatjuk a hiányzó pozíciókat (63) szerint. Azt gondolhatjuk, hogy megpróbáljuk kitalálni, hogy mik voltak az elveszett minták, azonban nem erről van szó. Ez a számítás ahhoz kell, hogy úgy tudjuk kiszámítani blokk FFT-jét, mintha a hiányzó pozíciókban lévő adatokat az eddigiek alapján pontosan tudtuk volna becsülni.

Az eljárás a következő:

0. Várjuk meg N mintát, az elveszett adatokat helyettesítsük nullákkal, számítsuk ki az FFT-jét, az eredmény legyen FFT_1 .
1. Várjuk meg, amíg összegyűlik a következő FFT-blokk.
2. Az új FFT-blokkban lévő adatvesztési pozíciókra számítsuk ki (63) alapján az értékeket.
3. Számítsuk ki az új blokk FFT-jét, az eredmény legyen FFT_2 .
4. FFT_1 és FFT_2 alapján (a megfelelő visszaforgatás után) exponenciális átlagolással számítsuk ki az új FFT_1 -et.
5. Ha még tart a mérés, folytassuk az 1.-től.

Az eljárást ábrázolhatjuk is:



8. ábra: A javasolt eljárás

Az ábrán is látható, hogy ezzel a módszerrel az első blokkban lévő elveszett adatokat nullákkal helyettesítjük, vagyis ezek hatása a kezdeti becslésben zajként megjelenik. Az, hogy ez probléma-e, az alkalmazás dönti el, hiszen az exponenciális átlagolással ezt a zajt kiátlagoljuk. A zaj mértéke növekvő adatvesztéssel nő. Ha ez probléma, akkor megvárhatjuk, hogy egy teljes, adatvesztési nélküli FFT-blokk összegyűljön, viszont lehetséges, hogy ehhez több idő kellene, mint kiátlagolni a kezdeti zajt, ezt ismét az adott alkalmazás paraméterei határozzák meg. Esetleg alkalmazhatjuk a nullákkal lezárós módszert az első blokkra, viszont itt újból azzal a problémával találkozunk, hogy nagyobb érvényes adatblokk esetén kisebb a szivárgás vagyis a zaj, de nagyobb érvényes blokkra többet kell várni, tehát ismét az alkalmazás paramétereitől függ, hogy melyiket célszerű alkalmazni.

Észrevehetjük, hogy az egyes adatvesztési pontokhoz (azaz adott n -hez) tartozó értékeket minden, azt tartalmazó FFT-blokkban újra kiszámítjuk a szükséges értéket. Erre azért van szükség, mert az adatvesztési pontokról feltételezzük, hogy a legfrissebb becslés alapján a (63) szerint visszszámított értékeket tartalmazzák. Amennyiben a spektrum kellően lassan

változik az új FFT-blokkok elkészültéhez (összegyűléséhez) képest, elég csak azokat az adatvesztési pontokat kiszámolni (és a kiszámolt értékeket elmenteni, majd később is felhasználni), amelyek a legfrissebben kiszámolt FFT-blokk utolsó mintája után vannak. Ezzel a visszaállításhoz szükséges számítások számát átlagosan $(1 - \beta)$ -szorosára tudjuk csökkenteni (β az átlapolási arány: az adott blokk hányadrésze esik bele az előző blokkba is). Az ábra így alakul:



9. ábra: Az egyszerűsített eljárás

Az eljárás felfogható úgy is, hogy futtatjuk a koncepcionális jelmodellt, amely állapotváltóit az FFT-blokkok elkészültekor frissítjük (ezzel akár visszafelé kiszámolást is figyelembe tudjuk venni).

Vegyük észre, hogy lehetséges, hogy áttoltuk a döglött lovat az út túlsó oldalára, ugyanis minden adatvesztési pont kiszámításához $O(N)$ műveletre van szükség, ahol O az ordó operátor. N mintából γ adatvesztési arány mellett átlagosan γN elvész, tehát egy teljes FFT-blokkra $O(\gamma N^2)$ művelettel tudjuk a szükséges előkészítő számításokat elvégezni. Amennyiben γ elég kicsi, akkor nincs probléma, viszont kellően magas adatvesztési arány esetén a hiányzó mintákba írandó értékek kiszámításához szükséges műveletek száma (és idő) már felülmúlja az FFT kiszámítását, amely $O(N \log N)$ művelettel megoldható.

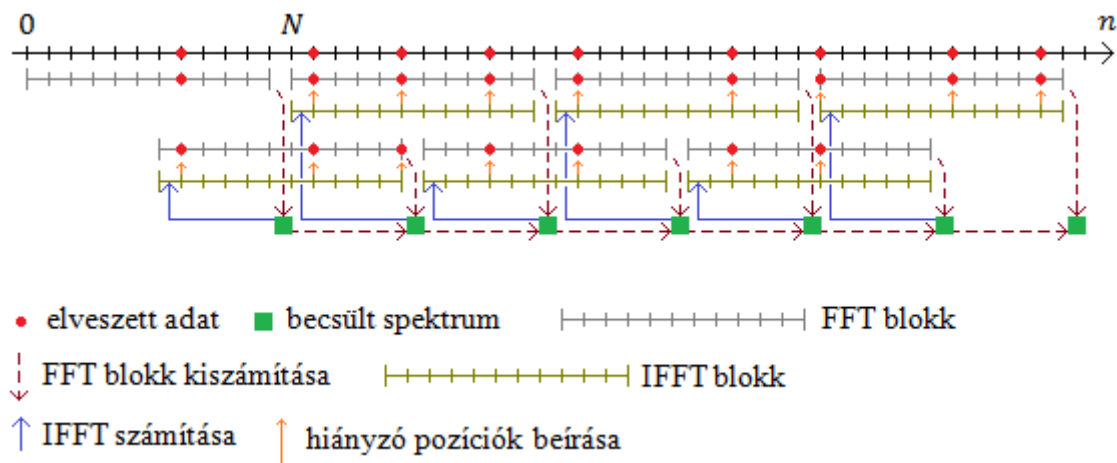
Mivel (63)-ban IDFT-vel állítjuk elő a hiányzó értékeket, ezért jogos a felvetés, hogy használjunk IFFT-t a hiányzó értékek kiszámítására. IFFT-vel viszont csak teljes blokknyi mintát tudunk visszaállítani, ami a felhasználás céljából nem probléma, hiszen a szükségtelenül előállított mintákat eldobhatjuk, és függetlenül attól, hogy hány vesztett minta van, ugyanannyi művelet szükséges a megfelelő pozíciók kiszámításához. Ügyelni kell arra, hogy a spektrum forgatása nélkül kiszámított értékek ugyanolyan kezdőfázisban lesznek, mint az átlagolt spektrum, ezért az adatvesztési pozíciókba való beírás előtt időtartományban (vagy az IFFT előtt frekvenciatartományban) a megfelelő fázisforgatást el kell végezni a DFT eltolási tételei

alapján. A visszaállítás számításiigénye az IFFT alkalmazása miatt $O(N \log N)$, vagyis az egész eljárásához $O(N \log N)$ műveletre van szükség. Ebben az esetben a számítások száma független az adatvesztési aránytól. A hátrány az, hogy így az összes kiszámolt értéket (és adott esetben a forgatott spektrumot) (ideiglenesen) el kell tárolni.

Amennyiben IFFT-vel számítjuk a vesztett pozíciókat, akkor az eljárás így alakul:

0. Várjunk meg N mintát, az elveszett adatokat helyettesítsük nullákkal, számítsuk ki az FFT-jét, az eredmény legyen FFT_1 .
1. Várjuk meg, amíg összegyűlik a következő FFT-blokk.
2. FFT_1 megfelelően forgatott értékéből IFFT-vel számítsuk ki az időtartománybeli értékeket (v_n).
3. Az új FFT-blokkban lévő adatvesztési pozíciókra (x_n) írjuk be az adott pozícióra vonatkozó v_n értékeket, majd számítsuk ki a blokk FFT-jét, az eredmény legyen FFT_2 .
4. FFT_1 és FFT_2 alapján (a megfelelő visszaforgatás után) exponenciális átlagolással számítsuk ki az új FFT_1 -et.
5. Ha még tart a mérés, folytassuk az 1.-től.

Az ábrát így rajzolhatjuk fel:



10. ábra: A javasolt eljárás IFFT-vel

Mivel ebben az eljárásban is a komplex spektrumokat átlagoljuk, ez sem alkalmazható inkoherens mintavétel esetén, még ablakfüggvénnyel együtt sem, és ezért az ablakfüggvény használata általában nem célszerű. Olyan jelenségek sem lépnek fel, mint a kinullázós FFT-nél a jel levágása okozta koherenciavesztés, mely indokolná az ablakfüggvény szükségességét.

A módszer egyaránt tekinthető – koherens mintavétel esetén - az FFT-alapú spektrumbecslés továbbfejlesztésének, illetve az RBO egy hatékonyabb számítási eljárásának (bizonyos korlá-

tozásokkal az RBO-ra nézve). Az eljárásban felhasználtuk az FFT-t, melyet a gyakorlatban szinte kizárólag kettőhatvány méretű blokkokra alkalmaznak, (és beállítottuk az exponenciális átlagolás időállandóját), ezzel a rezonátorok számát és pozícióját előírtuk.

7.1. A visszaállítási módszerek számításigénye

Az előző pontban láttuk, hogy alacsony adatvesztési arány esetén a mintákat egyesével visszaállítani éri meg jobban, míg gyakoribb adatvesztésnél az IFFT alkalmazása hatékonyabb. Érezhető, hogy van egy kritikus adatvesztési arány, amely a két módszer célszerű alkalmazási tartományait elválasztja, a cél ennek kvantitatív elemzése.

Továbbra is N a blokk hossza, és legyen γ_b az adatvesztési arány a blokkon belül. Először vizsgáljuk meg az egyenkénti visszaállítást. (63) szerint egy minta visszaállításához N komplex szorzásra (a skálafaktor és a komplex exponenciális konstansok, szorzatuk előre kiszámítható) és N komplex összeadásra van szükség. Mivel a jel valós, ezért elegendő a valós részt kiszámítani, emiatt a komplex szorzás két valós szorzással és egy valós összeadással megvalósítható, illetve a komplex összeadás redukálódik a valós részek összeadására. Ezzel egy minta visszaállítható $2N$ valós szorzással és $2N$ valós összeadással, ez összesen $4N$ művelet. Egy teljes FFT-blokkból $\gamma_b N$ minta veszik el, és ezek mindegyikére külön-külön el kell végezni a visszaállítást, ezért egy blokk előkészítése $4\gamma_b N^2$ műveletet igényel.

Amennyiben IFFT-vel végezzük el a visszaállítást, akkor az előkészítő műveletek száma várhatóan kevésbé fog függeni az adatvesztési aránytól, hiszen minden pozícióra ki kell számítanunk az adatvesztés esetén visszaállítandó értéket. Radix-2-es IFFT algoritmust feltételezve, az IFFT $\frac{N}{2} \log_2 N$ komplex szorzással és $N \log_2 N$ komplex összeadással megvalósítható. Valós műveletekre áttérve ez $2N \log_2 N$ szorzás és $3N \log_2 N$ összeadás, vagyis $5N \log_2 N$ művelet. Majd a blokk összes pozícióján ellenőrizni kell, hogy történt-e adatvesztés (ekkor $K_n = 0$) és ha igen, akkor beírni az előbb kiszámolt értéket. Ez N összehasonlítás és $\gamma_b N$ értékadás. Tehát az IFFT-s visszaállítás összesen várhatóan $5N \log_2 N + N + \gamma_b N$ műveletet igényel.

A kritikus adatvesztési arány az, amely esetén a két eljárás műveletigénye megegyezik:

$$4\gamma_{b,krit} N^2 = 5N \log_2 N + N + \gamma_{b,krit} N \quad (64)$$

N -nel egyszerűsítve és a kritikus adatvesztési arányra átrendezve:

$$\gamma_{b,krit} = \frac{5 \log_2 N + 1}{4N - 1} \quad (65)$$

Természetesen ez csak becslés, hiszen a különböző műveletek különböző számú gépi ciklust igényelhetnek, az itt különállónak számolt műveleteket lehet, hogy egyes processzorok képesek összevontan végrehajtani, a fordítóprogram optimalizálásait nem vettük figyelembe, az algoritmusok megvalósíthatók másképp, stb.. Például az IFFT-s módszer esetén lehetséges, hogy nem radix-2-es algoritmust használunk, vagy szeretnénk elkerülni az elágazásokat, ezért az adatvesztés ellenőrzését és az esetleges beírást a következőképp fogalmazzuk meg: $x_n = x_n + (1 - K_n)v_n$, ahol x_n az n . pozíció mért értéke és v_n az n . pozícióhoz kiszámított érték. A blokkon belüli adatvesztési arányt becsülhetjük a teljes adatvesztési aránnyal ($\gamma_b \cong \gamma$), Ezek alapján (65)-öt átírhatjuk így:

$$\gamma_{krit} \approx \frac{5 \log_2 N}{4N} \quad (66)$$

Néhány N értékre ezt kiszámítva:

N	γ_{krit}	$N\gamma_{krit}$
16	31,250%	5
32	19,531%	6,25
64	11,719%	7,5
128	6,836%	8,75
256	3,906%	10
512	2,197%	11,25
1024	1,221%	12,5
2048	0,671%	13,75
4096	0,366%	15
8192	0,198%	16,25
16384	0,107%	17,5
32768	0,057%	18,75
65536	0,031%	20
131072	0,016%	21,25
262144	0,009%	22,5
524288	0,005%	23,75
1048576	0,002%	25

2. táblázat: Kritikus adatvesztési arányok

Az első oszlop a blokk hosszát, a második a (66) alapján számított kritikus adatvesztési arányt, a harmadik pedig ennek a kétszorosát tartalmazza, vagyis azt, hogy mennyi a blokkon belüli adatvesztések kritikus értéke.

Az egyes sorokat megvizsgálva kijelenthető, hogy nem értelmetlen ez a vizsgálat, hiszen kis pontszám esetén nagy adatvesztési arány szükséges ahhoz, hogy megérje az IFFT-s módszert használni, míg a pontszám növelésével ez egyre csökken. Az utolsó oszlop jelentősége abban rejlik, hogy a blokkon belüli adatvesztések száma N művelettel megállapítható, és ez után

még egy összehasonlítás szükséges ahhoz, hogy megtudjuk, melyik eljárás használatával kapunk gyorsabban eredményt. Ez minden blokkra megtehető, adott esetben előfordulhat, hogy az egyik blokkban az egyedi, míg a másikban az IFFT-s visszaállítást célszerű alkalmazni. Amennyiben nem szeretnénk mindkét módszert implementálni, viszont a várható adatvesztési arányról van ismeretünk, tudunk választani, hogy melyik módszert alkalmazzuk: γ_{krit} felett az IFFT-s, alatta az egyedi visszaállítás ad gyorsabban eredményt.

8. Egyéb módszerek

A dolgozatban ismertetett eljárások kidolgozása előtt is létezett a spektrumbecslési probléma adatvesztés esetén. Mivel az adatvesztés felfogható az egyenlőtlen mintavétel speciális esetének, ezért olyan eljárásokat használtak, melyekkel egyenlőtlenül mintavett jelek spektrumát lehet kiszámítani.

A szakirodalomban többféle, itt részletesen nem ismertetett, nem vizsgált spektrumbecslési módszert találhatunk, melyeket adatvesztés esetén alkalmazhatunk. Ezek kétféle megközelítéssel kezelik a hiányzó minták problémáját: vagy visszaállítják, interpolálják a hiányzó mintákat és az így kapott jelet analizálják, vagy csupán a meglévő mintákat használják fel.

Az első megközelítésnél az állandó mintavételi idejű, hiánytalan adatsorok analízisére jól bevált eljárásokra alapoznak. Ide tartoznak a statikus interpolációt végző eljárások (lineáris, polinomiális, zérusrendű tartó, legközelebbi érvényes szomszéd, spline-ok, stb.). A második csoportban kiszámítják a hiányzó minták legvalószínűbb értékeit.

[12] bemutat egy eljárást, amely a legvalószínűbb becslés módszerén alapszik, és egy autoregresszív modellt használ. Elméletileg ez adja a legpontosabb spektrumot. A cikkben adnak egy módszert, mely csak a korábbi adatokat használja a becsléshez, nem kell semmilyen kezdőértéket beállítani. [13] szintén az autoregresszív modellt vizsgálta, arra jutott, hogy akár 90%-os adatvesztés esetén is – a cikk megfogalmazása szerint – elég pontos becslés adható vele.

[14] a legkisebb négyzetek módszerén alapuló spektrumbecslést vizsgálja. A módszer jellemzője, hogy előre ismeretlen periodicitás, egyenlőtlen (nem ekvidisztáns) mintavételezés esetén is használható. [15]-ben eljárást adnak a diszkrét Fourier-transzformáció, az autokorrelációs függvény és a keresztkorrelációs függvény megvalósítására, amennyiben a mintavételezés nem egyenletes. [14] és [15] adják a Lomb-Scargle metódust, mellyel a spektrumban csúcsok detektálhatók hatékonyan.

[16] egy paramétermentes eljárást ad adatvesztés esetén, dekonvolúciót és interpolációt felhasználva. Az eddig bemutatottakkal ellentétben ez az első csoportba tartozik.

A dolgozatban vizsgált eljárásokhoz a Lomb-Scargle metódus áll a legközelebb, hiszen ez is (mint a DFT) a legkisebb négyzetek módszerével illeszt szinuszokat az adatokra. A legfőbb különbség, hogy a DFT-vel ellentétben, ez nem ortogonális sorfejtést használ. Ennek eredményeképp az implementáció során numerikus problémák léphetnek fel.

Az összes itt bemutatott módszer komplexitása $O(N^2)$. Ezzel szemben az FFT-alapú eljárások számításiigénye $O(N\log N)$, mely egyértelmű előnyt jelent az egyéb módszerekkel szemben. Az RBO alkalmazását nem a számításiigény indokolja, hiszen az is kvadrátikus algoritmus, hanem az eljárás robusztussága.

Az „előrecsatolt” módszerekben (például ilyen a Lomb-Scargle is) még ortogonális sorfejtés esetén is felléphetnek numerikus problémák. Ezek mértékét fokozhatja a sok hiányzó minta, de például adatvesztés nélkül, nem egyenletes frekvenciakiosztásnál is felléphetnek. Ezeket a problémákat kezeli az RBO a visszacsatolt struktúrájával.

Az RBO-val megegyező viselkedésű rendszert meg lehetne valósítani visszacsatolás nélküli struktúrában is [19], azonban ezt véges számábrázolási pontosságú rendszereken (pl. jelprocesszorok) implementálva, a paraméterek és változók elméletből számítható és ténylegesen megvalósított értéke egymástól eltér. Az eltérés hatása az idővel akkumulálódhat, és a mérési eredményeket meghamisíthatja. Figyelembe véve, hogy a rendszer (beállítástól függően) a stabilitás határhelyzetében is lehet, ez a numerikus hiba akár oszcillációba is viheti a rendszert.

Az RBO implementációjánál is előfordul a paraméterek nem teljesen pontos beállítása, azonban figyelembe kell vennünk a visszacsatolás hatását. Tegyük fel, hogy a bemenő jel spektruma állandó, a mintavétel periodikus és a rendszer beállt. Ekkor a paraméterek apró eltérései miatt a generált kimenet kicsit eltér a bemenettől, vagyis a visszacsatolt jel nullától különböző értékű (de még mindig „kicsi”). Ez az érték kompenzálja a visszacsatoló együtthatókon keresztül a paraméterek pontatlanságát.

9. A módszerek összehasonlítása

Külön-külön már bemutatam a három vizsgált módszert, ebben a fejezetben elméleti megfontolások és szimulációk alapján összehasonlítom őket.

9.1. Számításigény

Az első szempont az eljárások számításigénye. A rezonátoros struktúra minden ütem végén N állapotváltozót (rezonátort) frissít, ez N komplex szorzást igényel, amely felírható $4N$ valós szorzás és $2N$ valós összeadás műveletével. Ezekből képzik a következő ütemben kimenetet, amely (mivel valós jelet állít elő, csak a valós részt kell összegezni) $N - 1$ valós összeadás, majd a hibajelet, amely még egy összeadás. A hibajelet megszorozza a visszacsatoló együttműködéssel, ami N valós*komplex szorzás, azaz $2N$ valós szorzás, és hozzáadja az állapotváltozóhoz, ami N komplex összeadás, vagyis $2N$ valós összeadás.

A spektrum kiszámításához még az állapotváltozókat vissza kell forgatni, ez újabb N komplex szorzás. Összesen: $10N$ valós szorzás és $7N$ valós összeadás, vagyis $17N$ valós művelet. A többi módszerrel való összevethetőség miatt tekintsünk N egymás utáni ütemet, vagyis egy teljes DFT-blokkot. Mivel minden ütemben ugyanazt a műveletsort kell elvégeznünk, ezért egy teljes DFT-blokk számításigénye $17N^2$.

Korábban láttuk, hogy az IFFT $5N\log_2 N$ műveletet igényel, nem nehéz belátni, hogy az FFT-hez is ennyire van szükség. A kinullázós eljárás használatakor meg kell keresni az első adatvesztés helyét, ez legfeljebb N műveletet igényel, majd onnantól fogva kinullázni a blokk értékeit, a maradékot pedig skálázni. Ezekhez összesen újabb N műveletre van szükség. Feltételezzük, hogy a megmaradt rész nem túl rövid, így számíthatunk egy FFT-t. Továbbá tegyük fel, hogy használunk ablakfüggvényt, és ennek értékeit előre kiszámítottuk. Ekkor az ablakozás még N valós szorzás, az FFT $5N\log_2 N$ művelet. Egy blokk kinullázós FFT-s módszerrel történő kiszámításához $5N\log_2 N + 3N$ műveletre van szükség.

Amennyiben a visszaállító FFT-t használjuk, akkor a visszaállítás történhet egyesével és IFFT-vel is. A blokkon belüli adatvesztési arányt becsülhetjük az egész mintasorozatra vonatkozó adatvesztési aránnyal. Amennyiben a mintákat egyesével állítjuk vissza, akkor $4\gamma N^2$ műveletre, IFFT használata esetén pedig $5N\log_2 N + N + \gamma N$ műveletre van szükség.

Tegyük fel, hogy megszámloljuk az elvesztett mintákat és az alapján a kevesebb számítás igénylő eljárást használjuk. Ennek műveletigénye felülről becsülhető (65) alapján, annak felhasználásával, hogy az adatvesztések megszámlolása N művelet. Ezek felhasználásával, (65)-öt behelyettesítve pl. az egyesével visszaállító módszer számításigényébe megkapjuk, hogy

legfeljebb $4N^2 \frac{5\log_2 N + 1}{4N - 1} + N \approx 5N\log_2 N + N$ művelettel (a végén a $+N$ az elvesztett minták megszámlálása) megkapjuk a visszaállított FFT-blokkot. Mivel a visszaállító eljárás nem alkalmazható inkohérens mintavétel esetén, ezért az ablakfüggvény használata felesleges. Az FFT műveletigényét hozzáadva egy blokk feldolgozásához $10N\log_2 N + N$ műveletre van szükség.

A kinullázós módszer esetén lehetséges, hogy az amplitúdóspektrumokat átlagoljuk, ekkor minden ponton kell képeznünk az abszolút értéket, ami $2N$ szorzás, N összeadás és N gyökvonás, vagyis $4N$ művelet. Majd alkalmazhatjuk az exponenciális átlagolást, ez pontonként két szorzás és két összeadás (vagy egy, ha $1 - \alpha$ értékét kiszámítjuk előre). Összesen: $8N$ művelet.

Amennyiben a komplex spektrumokat átlagoljuk, akkor az FFT eredményét még „vissza kell forgatni” (N komplex szorzás, azaz $6N$ művelet), majd minden ponton átlagolni (viszont itt komplex számokat, vagyis $8N$ művelet). Összesen $14N$ művelet, ha amplitúdóspektrumot is képzünk minden ütemben, akkor $18N$.

Ha β átfedési arány mellett számítjuk az FFT-s eljárásokat, akkor nem N , hanem $(1 - \beta)N$ mintánként kapunk új blokkot, vagyis a műveletek számát $\frac{1}{1 - \beta}$ -val meg kell szorozni. Az egyes eljárások N mintára vonatkoztatott számításigényét táblázatban összefoglalva:

Eljárás	Számításigény
RBO, komplex spektrum kimenet	$17N^2$
RBO, amplitúdóspektrum kimenet	$21N^2$
Kinullázós FFT, amplitúdóspektrum kimenet	$\frac{5N\log_2 N + 11N}{1 - \beta}$
Kinullázós FFT, komplex spektrum kimenet	$\frac{5N\log_2 N + 17N}{1 - \beta}$
Visszaállító FFT, optimális visszaállítási eljárás, komplex spektrum kimenet (felső becslés)	$\frac{10N\log_2 N + 15N}{1 - \beta}$
Visszaállító FFT, optimális visszaállítási eljárás, amplitúdóspektrum kimenet (felső becslés)	$\frac{10N\log_2 N + 19N}{1 - \beta}$
Visszaállító FFT, visszaállítás egyesével, komplex spektrum kimenet	$\frac{5N\log_2 N + 4\gamma N^2 + 14N}{1 - \beta}$
Visszaállító FFT, visszaállítás egyesével, amplitúdóspektrum kimenet	$\frac{5N\log_2 N + 4\gamma N^2 + 18N}{1 - \beta}$
Visszaállító FFT, visszaállítás IFFT-vel, komplex spektrum kimenet	$\frac{10N\log_2 N + 15N + \gamma N}{1 - \beta}$
Visszaállító FFT, visszaállítás IFFT-vel, amplitúdóspektrum kimenet	$\frac{10N\log_2 N + 19N + \gamma N}{1 - \beta}$

3. táblázat: A spektrumbecslési módszerek számításigénye

A táblázat alapján kijelenthetjük, hogy az RBO kvadratikus, míg az FFT-alapú eljárások lineáris komplexitásúak. Adott rendszeren várhatóan a legnagyobb pontszámot a kinullázós FFT-s megoldással érhetjük el, legfeljebb ennyit a visszaállítóssal és ennél sem többet az RBO-val. Ezt természetesen egyéb paraméterek (pl. memóriakapacitás) árnyalhatják.

9.2. Egyéb szempontok

A következő szempont az, hogy mi történik inkoherens mintavétel esetén. Beláttuk, hogy amennyiben a komplex spektrum átlagát szeretnénk megkapni, akkor inkoherens mintavétel esetén nem kapunk helyes eredményt. Ebből kifolyólag, mivel az RBO-ban és a visszaállítóssal FFT-s eljárásban is szükséges a komplex spektrumok átlagolása, ezek nem alkalmazhatóak inkoherens mintavételnél. Ellenben, a kinullázós megoldás használatakor - amennyiben nem a komplex spektrumra vagyunk kíváncsiak – elegendő az amplitúdóspektrumokat átlagolni, amelynél nem okoz problémát az inkoherens mintavétel.

Ehhez kapcsolódik az ablakfüggvény használata: RBO esetén időtartományban nem tudunk ablakozni, ha mégis szükséges, akkor az ablakfüggvény hatását a mért spektrum transzformálásával lehet elvégezni. Általában nincs is szükség az ablakozásra az RBO-nál, hiszen a rezonátorfrekvenciákra nézve a mintavétel koherens (vagyis a DFT szempontjából lehet inkoherens). A visszaállítóssal FFT-t is koherens mintavételnél célszerű alkalmazni, ezért itt sem szükséges az ablakozás. Ha mégis szeretnénk, akkor könnyebb dolgunk van: a hiányzó pozíciók kiszámítása után a blokkra alkalmazhatjuk az ablakfüggvényt. A kinullázós FFT használható inkoherens mintavétel esetén is, és az ablakozásra is lehetőség van, az érvényes adatok számához illesztve az ablakfüggvény hosszát.

Fontos, hogy az egyes eljárások hogyan kezelik az adatvesztést. Az RBO a mintákat egyesével dolgozza fel, és nem frissít a becslésén, amennyiben a minta elvész. A visszaállítóssal FFT-s módszer ugyanezt a viselkedést célozza meg, de a mintákat nem egyesével, hanem blokkonként dolgozza fel. A kinullázós módszer a blokkot az első adatvesztési ponttól kezdve érvénytelennek tekinti, és csak egy bizonyos minimális érvényes hossz felett számít spektrumot.

Ez alapján, a kinullázós a legérzékenyebb az adatvesztésre, hiszen akár egy elveszett minta is azt okozhatja, hogy az adott blokkot nem tudjuk felhasználni. A másik két módszernél ilyen probléma nem áll fenn, ott a kimenet beállításához rendelhető időállandó függ az adatvesztési aránytól.

Szót kell ejtenünk arról is, hogy az egyes eljárások mennyire rugalmasak. Láttuk, hogy az RBO esetén tetszőleges pólusokat képesek vagyunk beállítani. Ezzel a rendszer viselkedését

könnyen kézben tarthatjuk, például plusz számítás nélkül képesek vagyunk adott időállandójú exponenciális átlagolást végrehajtani. Megfelelő rezonátorpozíciók beállításával lehetővé válik inkoherensen mintavételezett jelek követése, elemzése is. Képesek vagyunk tetszőleges N minta periódusú jelnek előállítani a DFT-jét, míg az FFT-alapú megoldásoknál a blokk hossza szinte mindig a kettő egész kitevőjű hatványa.

Az FFT-alapú megoldásoknál a beállítások kimerülnek abban, hogy milyen ablakfüggvényt alkalmazunk, mennyi a blokk hossza, az átfedés és az exponenciális átlagolás időállandója. A kinullázós módszernél még egy paramétert meg kell határoznunk: a minimális érvényes hosszt. Annak ellenére, hogy a visszaállítós módszer az RBO viselkedését próbálja imitálni, a rezonátorpozíciókkal kapcsolatban vannak megkötései, így általános esetben nem alkalmazható az RBO számítására.

Ezek alapján megérthetjük, hogy mikor melyik módszert célszerű használni. Amennyiben a mérendő jelről nem rendelkezünk semmilyen információval, akkor olyan módszert kell választanunk, amely inkoherens mintavétel esetén is használható. A három közül ez a kinullázós FFT-s megoldás. Ennek további előnye, hogy várhatóan elég jó felbontású képet kapunk a spektrumról, viszont érzékeny az adatvesztésre. Ezen úgy is lehet javítani, hogy a pontszámot kisebbre vesszük, elérve, hogy – bár kisebb felbontásban – pontosabb legyen az eredmény.

Ha tudjuk, hogy a jel periodikus, és a frekvenciája ismert (és állandó), akkor alkalmazhatjuk az RBO-t. Amennyiben ezt úgy tudjuk megtenni, hogy a rezonátorok száma kettőhatvány és egyenletesen helyezkednek el, akkor a számításhoz fel tudjuk használni a visszaállítós FFT-s módszert. Ebben az esetben az FFT pontszámát választhatjuk nagyobbra is a rezonátorpozíciók számánál, ezzel egy nagyobb felbontású képet kapunk a spektrumról. Ha az alapfrekvencia változhat vagy nem ismert pontosan, akkor alkalmazhatjuk az AFA-t.

Az egyéb eljárások alkalmazása leginkább egyedi, speciális esetekben indokolt. Táblázatban összefoglalva a lehetőségeket:

	Rezonátoros struktúra	Visszaállítós FFT	Kinullázós FFT	Egyéb eljárások
Mikor alkalmazható?	Koherens és inkoherens mintavétel	Koherens mintavétel	Koherens és inkoherens mintavétel	Koherens és inkoherens mintavétel
Mikor előnyös?	Mindkét esetben	Koherens esetben	Inkoherens esetben	Semleges (nem ortogonális sorfejtés)
Komplexitás	$O(N^2)$	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	$O(N^2)$
Alkalmazható-e real-time?	Igen	Igen	Igen	Kérdéses (numerikus problémák)

4. táblázat: A spektrumbecslési módszerek összehasonlítása

9.3. Szimuláció

A szimuláció egyrészt az összehasonlítás eszköze, másrészt demonstrációs módszer, mellyel az eddig leírt állításokat támasztom alá.

9.3.1. Szimulációs környezet és paraméterek

Az eljárásokat implementáltam Matlab környezetben. A szimulációk menete a következő: generáljuk a (diszkrét idejű) bemenő jelet, az indikátorfüggvényt, és a bemenő jel spektrumát. A beállított jel-zaj viszony alapján a jelet additív fehér zajjal terheljük, majd pontról pontra összeszorozzuk az indikátorfüggvénnyel. A zaj spektrumát is kiszámítjuk.

Az egyes eljárásokat ütemről ütemre szimuláljuk, és mindegyik esetén kiszámítjuk a spektrumbecslés hibáját. Erre a következő definíciót használhatjuk:

$$e_n = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (|X(i) - E(i)|)^2} \quad (67)$$

Ahol $E(i)$ és $X(i)$ a jel tényleges és becsült spektrumának i . pontbeli (komplex) értéke. Ez az euklideszi normája annak az N dimenziós vektornak, melynek i . rendezője (komponensének hossza) az i . ponton jelentkező becslési hiba abszolút értéke. A zaj spektrumából is képzünk egy hibát $X(i) = 0$ helyettesítéssel, ennek a hiba nagyságának szemléltetése végett van jelentősége.

Amennyiben az eredeti spektrumot mint $2N$ dimenziós euklideszi térben lévő vektort képzeljük el, akkor ehhez a zaj spektruma még hozzáadódik egy ugyanilyen vektorként. A háromszög-egyenlőtlenség miatt a zajjal terhelt spektrumból képzett vektor normája legfeljebb annyi, mint az eredeti spektrumból és a zajból képzett normák összege. Másképp fogalmazva, a becsült spektrumba helyezett, zajnormányi sugarú $2N$ -dimenziós gömbbe mutat az eredeti spektrum vektora. Hasonló gondolatmenettel értelmezhetjük a becslési hiba normáját is.

Ugyanannak a jelnek az ablakfüggvénnyel és nélküle kiszámított spektrumát a hibadefinícióba behelyettesítve, általában nullától különböző értéket kapunk. Ez nem meglepő, hiszen az ablakfüggvények a spektrumokon is módosítanak, viszont emiatt nehézkes lenne egy ablakfüggvény használatával becsült spektrumból és az ablakfüggvény nélkül kiszámított eredetiből értelmes hibát számítani.

Ugyanez a helyzet akkor is, ha a becsült spektrumban nem ablakozunk, viszont az eredetiben igen, és úgy képzünk hibát. Továbbá, egy ablak nélküli becsült és eredetiből képzett hibát

nem lenne korrekt összehasonlítani egy ablakozott eredeti és becsült spektrumból képzett hibával.

Amennyiben a szimulációk során az FFT-s módszerekben ablakfüggvényt alkalmazunk, akkor az előbbieken ismertetett esetek legalább egyike előáll. Ennek oka, hogy RBO esetén rendkívül ritkán van szükség ablakfüggvény használatára, ezért a szimulációban az RBO-t ablakozás nélkül valósítottam meg. Az eddigiekből következik, hogy az összehasonlíthatóság miatt a szimulációk során egyik módszerben sem használok ablakfüggvényt.

Több szimulációt is be fogok mutatni, melyek mind különböző problémákat jelenítenek meg:

- Csúszóablakos lineáris és exponenciális átlagolás összehasonlítása.
- Inkoherens mintavétel esete
- Nagy adatvesztés esete
- Extrém mértékű adatvesztés esete

9.3.2. Szimulációs eredmények

A kinullázós FFT minimális érvényes adathossza $N/4$, a jel-zaj viszony 20 dB. A bementi jel periódusa $N = 256$, ez egyben a rezonátorok és az FFT pontok száma is. A szimuláció időtartama $L = 100N$ ütem, az FFT-s módszerek átlapolása $\beta = 75\%$. Ezek az adatok érvényesek az összes szimulációra, hacsak nem specifikáljuk őket másképp. Táblázatban:

Paraméter	Érték
Blokkméret, periódushossz	$N = 256$
Minimális érvényes adathossz	$N_{min} = \frac{N}{4} = 64$
Jel-zaj viszony	$SNR = 20 \text{ dB}$
Szimulációs idő (ütem)	$L = 100N = 25600$

5. táblázat: Az összes szimulációra azonos paraméterek

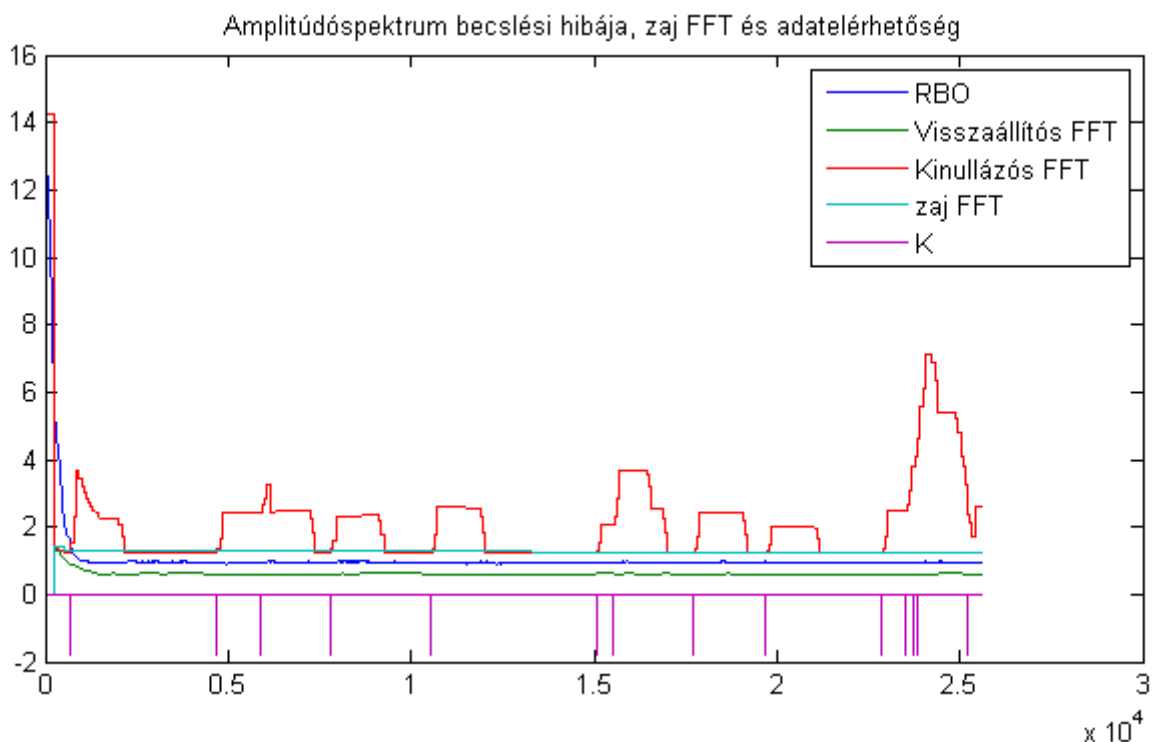
Először érdemes összevetni a különböző átlagolásokat. A bemenő jel egy enyhén torzított szinusz, mely a fő komponensén kívül véletlenszerűen néhány frekvencián tartalmaz olyan komponenseket, melyek amplitúdója legfeljebb tizede a fő komponens amplitúdójának, a kezdőfázisok véletlenszerűek (ehhez jön még hozzá a zaj). A mintavétel koherens. A véletlen generálás miatt minden szimulációt több (számszerűen tíz) „menet” eredményeinek átlagaként képzünk, viszont az indikátorfüggvény az összes menetben ugyanaz. Az adatvesztés véletlen, független, az adatvesztési arány 500 ppm. A szimuláció paraméterei táblázatban:

Paraméter	Érték
Bemenet	Enyhén torzított alapfrekvenciás szinusz
Mintavétel	Koherens
Adatvesztés	Véletlen, független, $\gamma = 500$ ppm
Exponenciális átlagolási időállandó	$N = 256$
FFT átlagolási csúszóablak hossza	$J = 20$

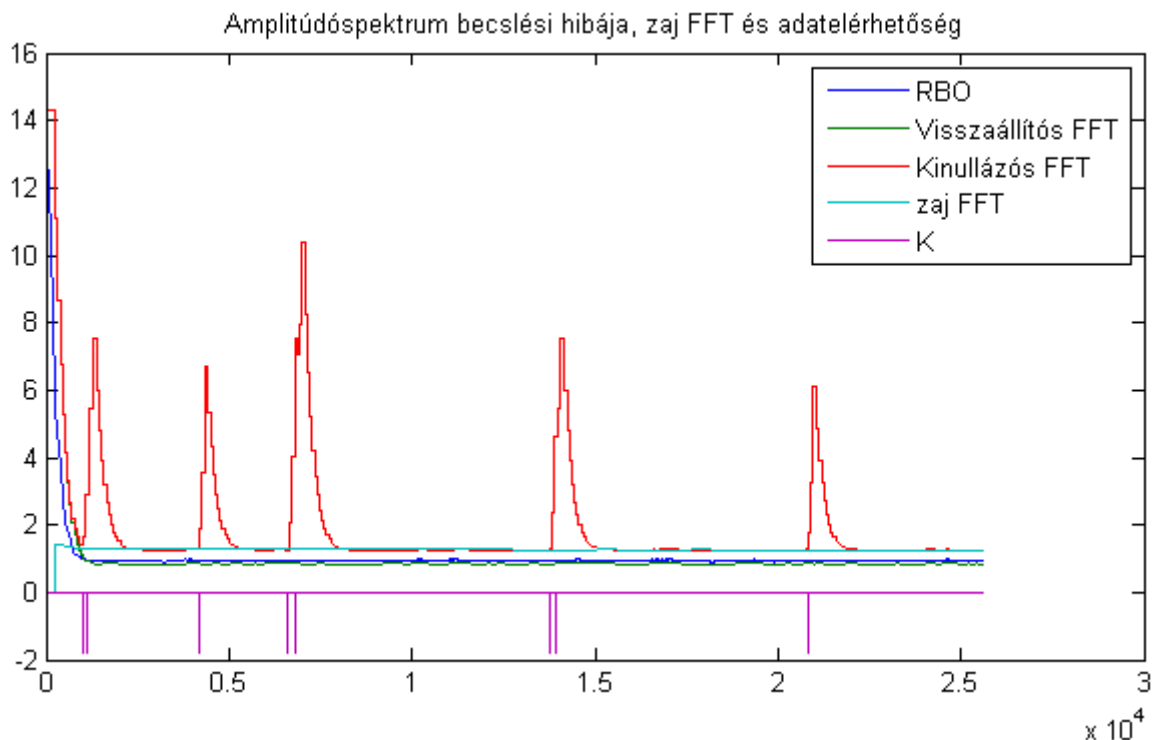
6. táblázat: Az első szimuláció paraméterei

A 11. ábra időfüggvényei a két FFT-s módszer hibájának alakulását mutatják húszelemű, csúszóablakos lineáris átlagolás és az rezonátorosét exponenciális átlagolás esetén. Az oka annak, hogy a rezonátorosban exponenciális átlagolást alkalmazunk az, hogy ez a struktúra inherensen alkalmas exponenciális átlagolásra, míg az FFT-s módszerek esetén tetszőleges átlagolás kiegészítő műveleteket igényel.

Látható a zajból képzett hiba és az indikátorfüggvény (K). Utóbbi értelmezése: „magas” szinten az adat elérhető, „alacsony” szinten nem. A magas szint minden szimuláció esetén a nulla. Az exponenciális átlagolás időállandója N -re volt beállítva, mivel az FFT-s módszerek 75%-os átfedést alkalmaztak és húszelemű a csúszóablak, vagyis az átlagolt spektrum a mért jel hirtelen megváltozásának hatására körülbelül $5N$ minta alatt áll be konstans értékre. Ez exponenciális átlagolás esetén öt időállandóval becsülhető. Ugyanezen paraméterek mellett, az összes módszer esetén exponenciális átlagolás használatával is elvégeztem a szimulációt, ennek eredményét mutatja a 12. ábra. Természetesen az összes módszer időállandója azonos értékű volt.



11. ábra: Lineáris átlagolás



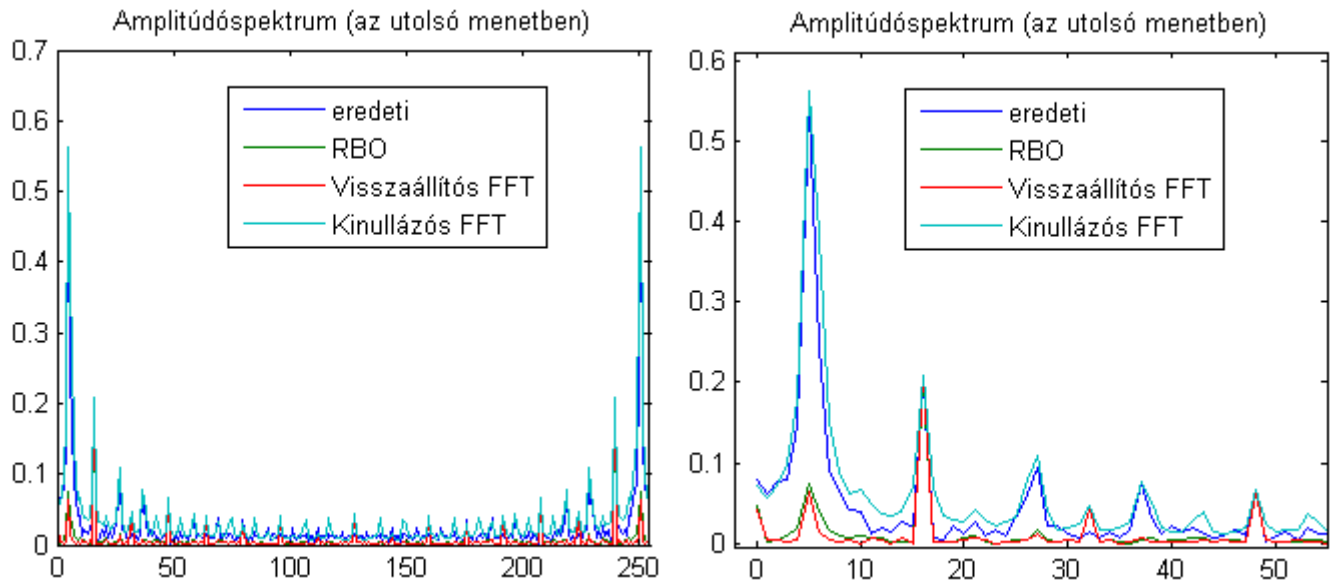
12. ábra: Exponenciális átlagolás

Látható, hogy lineáris átlagolás esetén a visszaállítós FFT-s módszer pontosabb eredményt ad, mint a rezonátoros exponenciális átlagolással. Ezen kívül, a kinullázós módszer mindkét eljárásnál pontatlanabb, és az adatvesztés okozta hiba sok ütemen keresztül megmarad. Az exponenciális átlagolás használatánál a kinullázós módszer hibája adatvesztés esetén jobban felugrik, viszont rövidebb ideig marad meg. A kiugrás mértékén lehet csökkenteni például a minimális érvényes adatblokk hosszának növelésével vagy az időállandó növelésével. Nagyobb adatvesztési arány esetén a kinullázós FFT-s módszer becslésének lassabb beállása várható. Alkalmazástól függ, hogy melyik átlagolást célszerű használni, viszont adott esetben nem engedhetjük meg magunknak a csúszóablakos lineáris átlagolást, mert túl sok adatot kellene eltárolni. A zajból képzett hibánál érdemes megfigyelni, hogy értéke körülbelül tizede a módszerek kezdeti hibájának. Tekintve, hogy a spektrumokat nullákkal inicializáltam, a jel-zaj viszony 20 dB , ami tizedszeres amplitúdónak felel meg, a hiba értelmezése alapján ez nem meglepő.

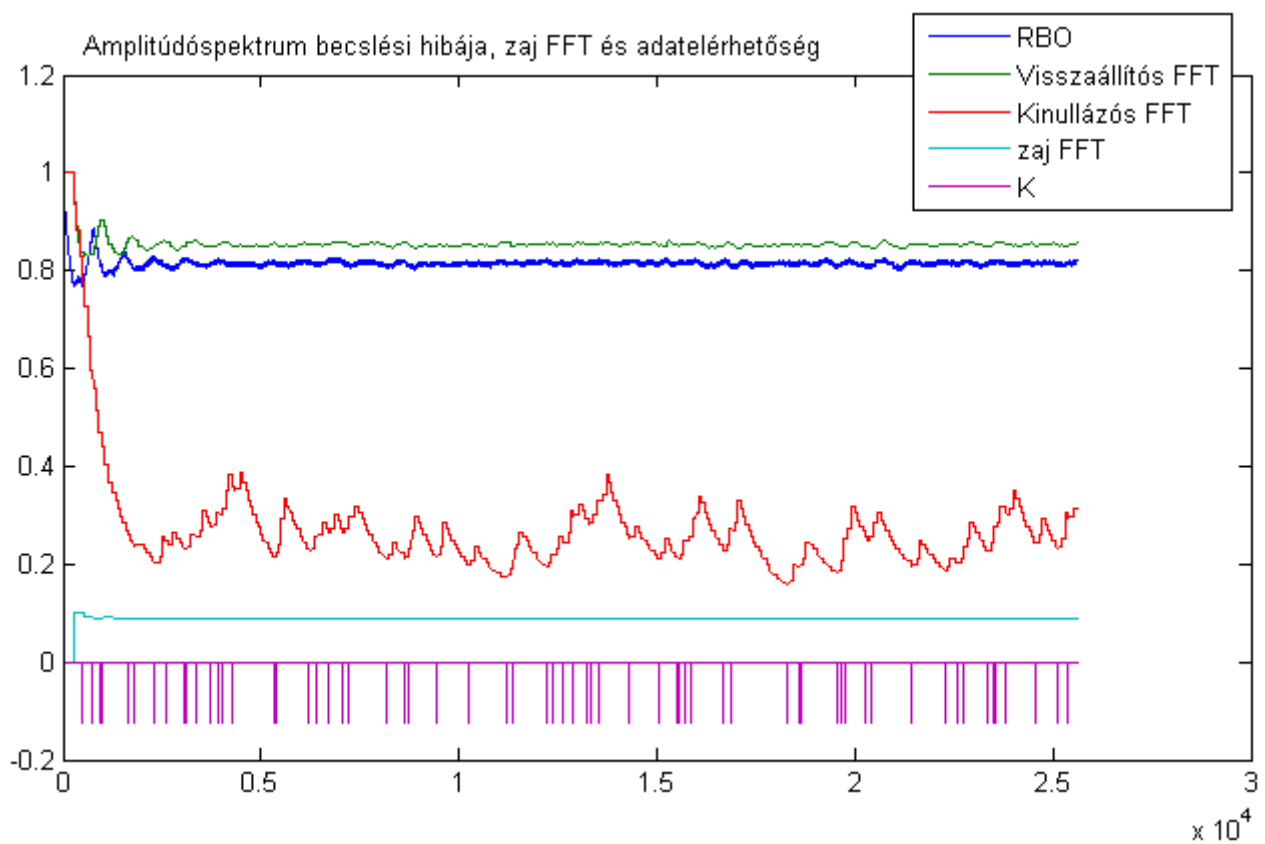
A következő szimuláció az inkoherens mintavétel esetét mutatja be. A bemeneti jel egy olyan négyszögjel, melynek frekvenciája az alapfrekvencia $16/3$ -szorosa. Az exponenciális átlagolás időállandója 1000 minta, az adatvesztés véletlen, független és az adatvesztési arány $0,2\%$. A 14. ábra a hibák alakulását, a 13. ábra az amplitúdóspektrumot ábrázolja a szimuláció végén, illetve ennek kinagyított részletét. A szimulációs paraméterek táblázatosan:

Paraméter	Érték
Bemenet	Négyzögjel
Mintavétel	Inkoherens
Adatvesztés	Véletlen, független, $\gamma = 0,2\%$
Exponenciális átlagolási időállandó	1000

7. táblázat: A második szimuláció paramétereit



13. ábra: Amplitúdóspektrum inkoherens mintavétel esetén (teljes és nagyított részlet)



14. ábra: Inkoherens mintavétel

Észrevehető, hogy a visszaállítós FFT ugyanúgy viselkedik, mint az RBO; ez nem probléma, hiszen a megalkotásakor ez volt a célunk. Az előző szimulációval ellentétben itt a kinullázós FFT-vel érhetjük el a legjobb eredményt, ezzel gyakorlatilag az összes komponens amplitúdóját helyesen tudjuk becsülni, még annak ellenére is, hogy nem ablakoztunk. A teljes spektrumot viszont sokkal nagyobb hibával becsüljük, mint az előbb, ennek oka, hogy nagyobb az adatvesztési arány, amire a kinullázós módszer érzékeny. Az egyes hibacsúcsok relatíve kisebbek, mivel az exponenciális átlagolás időállandója nagyobb.

Mivel a mintavétel inkoherens, ezért nem számíthatunk arra, hogy a visszaállítós FFT-nek megfelelő rezonátoros struktúrával helyes eredményt kapunk. Ennek ellenére a nagyított részben láthatóan pl. a harmadik és a kilencedik harmonikus amplitúdóját helyesen tudjuk becsülni. Ennek az oka az, hogy a hárommal osztható sorszámú harmonikusokra nézve a mintavétel koherens. Amennyiben a rezonátorpozíciókat úgy állítjuk be, hogy a hozzájuk tartozó frekvenciák megegyeznek a négyszögjel komponenseinek frekvenciáival, akkor e komponensek becslése helyesen elvégezhető attól függetlenül, hogy a mintavétel inkoherens.

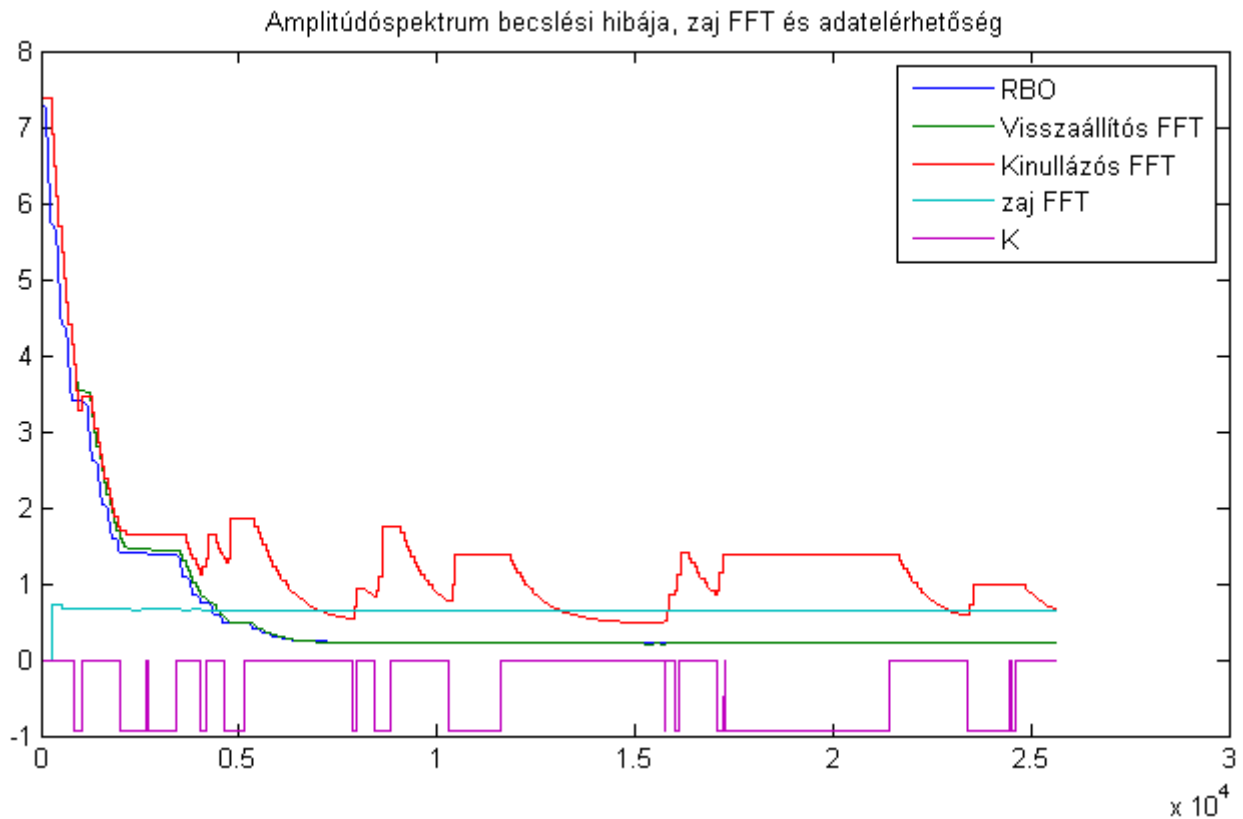
A következő szimulációban a nagy adatvesztési arányt vizsgáljuk. A bemenő jel egy, az első szinuszhoz hasonlóan torzított négyszögjel, az adatvesztés Markov-lánc alapú ($p = 0,999$ $q = 0,998$), az ebből kiadódó adatvesztési arány 33,3%. Az exponenciális átlagolás időállandója maradt 1000. A 15. ábra mutatja az így kiadódó hibák időfüggvényeit. A paraméterek táblázatosan:

Paraméter	Érték
Bemenet	Enyhén torzított négyszögjel
Mintavétel	Koherens
Adatvesztés	Markov-lánc alapú, $p = 0,999$, $q = 0,998$, $\gamma = 33,3\%$
Exponenciális átlagolási időállandó	1000

8. táblázat: A harmadik szimuláció paraméterei

A grafikon legelején látható a rezonátoros struktúra egyik előnye: már az első teljes FFT-blokk előtt elkezdődik a spektrum becslése és elkezd csökkenni a becslési hiba. Érdeemes megjegyezni, hogy a rezonátoros és a visszaállítós FFT alapú becslések hibája (állandósult állapotbeli kis ingadozások kivételével) monoton csökken, míg a kinullázós FFT-sé az adatvesztési blokkok elején megugrik, az adatvesztés alatt állandó marad, majd amikor újra vannak érvényes adatok, az exponenciális átlagolásnak megfelelően elkezd csökkenni. A megugrás abból adódik, hogy az érvényes adatok vége utáni első adatvesztés először a blokk utolsó

negyedébe, majd harmadik, második és első negyedébe esik, ami a módszer tulajdonságai miatt egyre nagyobb szivárgást okoz, ami hibaként jelentkezik.

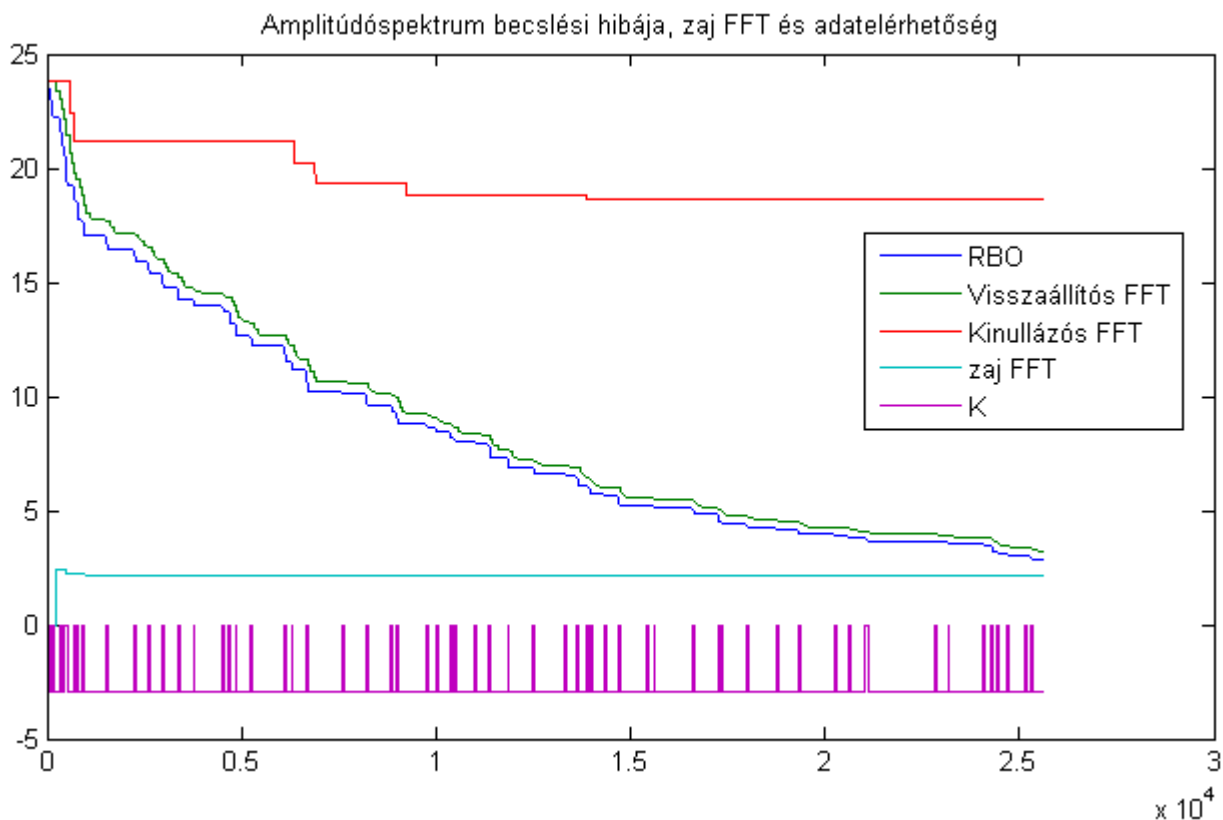


15. ábra: Nagy adatvesztés hatása

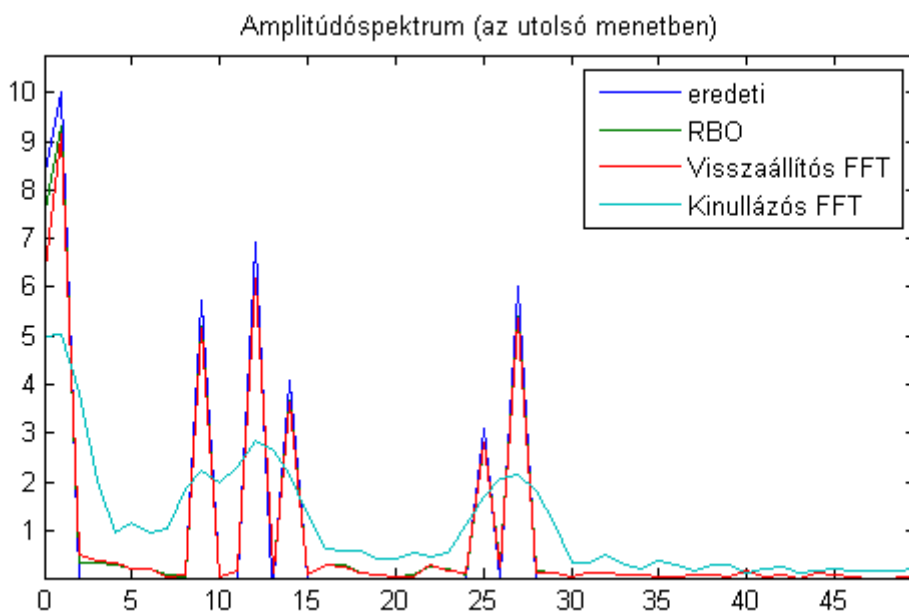
Az utolsó szimulációban az extrém nagy adatvesztést mutatom be. Az adatvesztési modell blokkalapú, a blokkméret 40, az adatvesztési (blokkvesztési) arány 90%. A bemenő jel egy hasonlóan torzított szinusz, mint az első szimulációban, ám a torzítás mértéke annál (amplitúdóban) tízszer nagyobb. A 16. ábra mutatja az így kialakult időfüggvényeket, a 17. ábra a becslés végén az amplitúdóspektrum kinagyított részletét. A paraméterek táblázatba foglalva:

Paraméter	Érték
Bemenet	Erősen torzított alapprofrekvenciás szinusz
Mintavétel	Koherens
Adatvesztés	Véletlen, blokkalapú, $M = 40$, $\gamma = 90\%$
Exponenciális átlagolási időállandó	1000

9. táblázat: A negyedik szimuláció paraméterei



16. ábra: Extrém mértékű adatvesztés hatása



17. ábra: Amplitúdóspektrum extrém mértékű adatvesztés esetén (nagyított részlet)

A kinullázós FFT hibáját tekintve remekül látszik, hogy a beállítás még nem történt meg. Ennek oka, hogy ritkán volt olyan blokk, amely használható lett volna, azaz legalább negyede érvényes adatot tartalmazott volna. Ez még rosszabb lett volna véletlen, független adatvesztés alkalmazása esetén. Az RBO és a visszaállítós FFT időfüggvényein jól látszik az exponenciá-

lis jelleg, viszont a beállítás nagyon lassú, száz periódus alatt sem érte el a hiba a zajból képzett összehasonlítási szintet.

Az amplitúdóspektrum becslésén látszik, hogy az RBO és a visszaállítós FFT egész jó becslést ad. A kinullázós módszer esetén is kivehető, hogy a spektrum körülbelül milyen frekvenciákon tartalmaz komponenseket, azonban az amplitúdóbecslés hibás és a közeli komponensek egyáltalán nem vagy nagyon nehezen különíthetők el. A hibás amplitúdóbecslés a nem teljes beállítás eredménye. A módszer hibáinak mértéke illesztett ablakfüggvény alkalmazásával csökkenthető. A szimuláció két kimeneti ábráját összevetve látszik, hogy az itt használt hibadefiníció arra lett kiélezve, hogy az összes frekvencián pontos legyen a becslés, nem arra, hogy a meghatározó komponensek felismerhetőek legyenek.

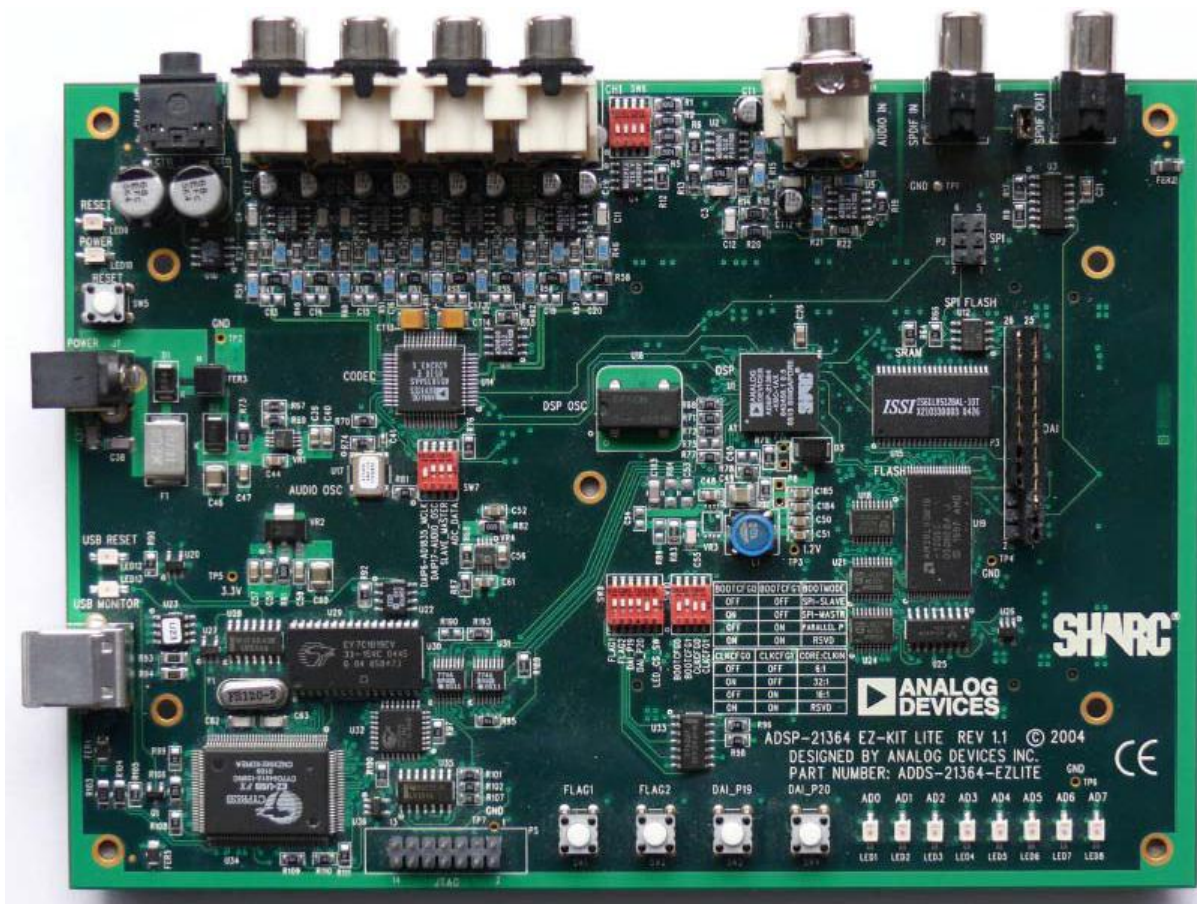
A szimulációkból levonható tanulságok megerősítik az elméleti megfontolások során megsejtett állításokat. Alacsony mértékű adatvesztés esetén bármelyik módszer működőképes, ezért szabadon választhatunk, célszerűen egy FFT-s módszert, mert számításigény szempontjából az a kedvezőbb. Koherens mintavételnél általában nem célszerű a kinullázós FFT-s eljárás alkalmazása, mivel ez nagyobb hibával képes a spektrum becslésére, azonban inkoherens mintavételnél a három közül ez a módszer adja a legpontosabb becslést.

Ha növekszik az adatvesztés mértéke, akkor a kimenethez társítható időállandó mértéke növekszik. Emellett, egyre kevesebb, a kinullázós FFT-s módszer által használható blokkot kapunk. Koherens mintavétel esetén az RBO és a visszaállítós FFT képesek a teljes spektrumkép becslésére, a kinullázós FFT leginkább a nagyobb amplitúdójú komponensek (csúcsok) meghatározására alkalmazható hatékonyan, akár inkoherens esetben is. A kinullázós FFT esetében a minimális érvényes hossz növelése a módszer pontosságát növeli, viszont a beállást lassítja.

10. A DSP-kártyás implementáció

A módszereket Sharc ADSP-21364 EZ-KIT Lite digitális jelfeldolgozó kártyán is implementáltam. Ez a fejlesztőkártya az ADSP-21364 jelfeldolgozó processzorral történő fejlesztés hatékony és gyors eszköze. A fejlesztőkártyán kialakításra került a jelfeldolgozó processzor minden olyan szükséges perifériája és környezete, amelyre a leggyakoribb feladatok elvégzésekor szükség lehet. Az analóg és digitális hang ki- és bemenetek, LED-ek, kapcsolók, nyomógombok azonnal hozzáférhetőek, így a szoftverfejlesztés mindenféle hardvertervezési lépés nélkül azonnal elkezdhető. A fejlesztőkártya tervezésekor igyekeztek a lehető legtöbb felhasználási lehetőséget kipróbálhatóvá, a processzor által nyújtott funkcionalitást pedig a lehető legmélyebben megismerhetővé tenni. A kártya a következő hardverelemeket bocsátja a fejlesztő rendelkezésére:

- Analog Devices ADSP-21364 processzor
- 512 kbit × 8 bit SRAM
- 1 Mbit × 8 bit flash memória
- 2 Mbit SPI7 által kezelhető flash memória
- Analóg hanginterfész (AD1835A kodek, 1 db sztereó bemenet, 4 db sztereó kimenet)
- Digitális hanginterfész (1 db bemenet, 1 db kimenet)
- 11 db LED (ebből 1 db „power”, 1 db „board reset”, 1 db „USB monitor”, 8 db általános célú)
- 5 db nyomógomb (1 db „reset”, 2 db DAI lábra, 2 db FLAG lábra kötve)
- Bővítőinterfész (párhuzamos port, FLAG-ek, DAI, SPI)
- JTAG emulátor port
- USB port a PC csatlakoztatásához.



18. ábra: A DSP-kártya felülnézeti képe

10.1. Az implementáció kérdései és korlátai

Az RBO DSP-kártyás megvalósításánál figyelembe vehetjük, hogy a bemenő jel valós, tehát a komplex Fourier-sorában érvényesül a konjugált szimmetria. Mivel az RBO állapotváltozói a forgatott Fourier-együtthatók, és a forgatás is (a rezonátorokat megfelelően párosítva) konjugált szimmetrikus, ez a szimmetria rájuk is érvényes. A DC rezonátor (és az esetleges 0,5 relatív frekvenciájú rezonátor) kivételével tehát az összes konjugált szimmetrikus rezonátorpárból elég a $0 < f < 0,5$ relatív frekvenciájút ténylegesen megvalósítani. Ekkor a kimenet-hoz ezek valós részét kétszeres szorzóval kell hozzáadni, hogy a nem megvalósított párjuk hatását is figyelembe vegyük. A visszacsatoló együtthatók számítása és a rendszer viselkedése változatlan marad.

Mivel a rezonátorpozíciók konstansok, az állapotváltozós leírás mátrixai és a visszacsatoló együtthatók is konstans értékek, tehát a mérés előtt kiszámíthatók. A rendszermátrix diagonálmátrix, ezért nem szükséges mátrixszorzást megvalósítani.

Az FFT-s módszerek esetén a komplex spektrumok átlagolása miatt lépten-nyomon jelentkezik a fázisforgatás-visszaforgatás feladata. Ez túl sok számításba nem kerül, hiszen az ehhez szükséges komplex exponenciálisok előre kiszámíthatók, és ezekkel kell végigszorozni a spektrumot, tehát a forgatás lineáris komplexitású. Viszont, ha a bemeneti adatokat egy N méretű körpufferbe gyűjtjük, akkor az azonos kezdőfázisú (ez alatt az alapharmonikus kezdőfázisát értem) értékek a puffer azonos pontjaira kerülnek, ezzel automatikusan megoldva az összes oda-vissza forgatási problémát.

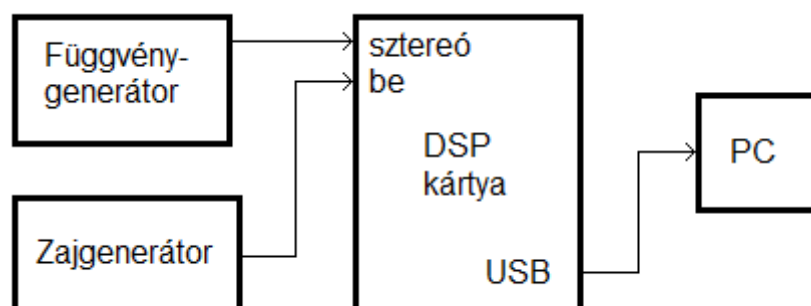
Nem feltételezhetjük, hogy egy mintavételi periódusidő alatt a blokkot teljesen feldolgozzuk, és az hibás működéshez vezetne, ha közben a bemeneti pufferben az egyik értéket átírnánk. Szándékosan nem dobhatjuk el az újabb mintákat, ezért a blokk feldolgozását úgy kell kezdeni, hogy egy ideiglenes tömbbe átmásoljuk az összes mintát.

Az implementációnak két alapvető korlátja van: a számítási és a memóriakapacitás. A módszerek összehasonlításakor kifejtett okok miatt nem meglepő, hogy a rezonátoros struktúra esetén a számítási igény, míg az FFT-s módszereknél a memóriakapacitás jelentette a korlátot. A maximális pontszámú implementáció, amelyet készíteni tudtam, az RBO esetén 1024, az FFT alapú megoldások esetén 4096.

10.2. A mérési elrendezés

A mérések során egy függvénygenerátor adta jelet, melynek a spektrumát szeretnénk becsülni, ezt a DSP kártya sztereó bemenetének egyik csatornájára kötöttem. A mért spektrumokat a DSP kártyához kapcsolódó fejlesztőkörnyezet segítségével kérdeztem le.

Az adatvesztést úgy szimuláltam, hogy a DSP kártya sztereó bemenetének másik csatornájára egy zajgenerátor jelét vezettem, melyet minden mintavételkor a program összehasonlított egy adatvesztési határral, és ha a zaj értéke ennél nagyobb volt, akkor adatvesztés történt. Ezzel a módszerrel véletlen, független adatvesztést állítottam elő.



19. ábra: A mérési elrendezés

Az előbb leírt indikátorfüggvény-generálási eljárás egyszerű és kényelmes, azonban egy adott adatvesztési arányhoz tartozó értékhatárt megtalálni körülményes feladat; a programba előre beírva, kézi beállítással nehézkesen, több próbálkozásból oldható csak meg. Ezért az adatvesztési határt a mérés előtt egy, a DSP kártyán megvalósított szabályozási mechanizmus állította be, hogy a mérés során az adatvesztési arány (körülbelül) a mérésre előírt érték legyen. Az eljárás alapötlete az, hogy visszacsatolt szabályozási hurkot alakítunk ki: mérjük, hogy adott értékhatár mellett mekkora az adatvesztési arány, és a cél adatvesztési arány ismeretében korrigáljuk a határt. Addig, amíg az adatvesztési határt nem sikerült beállítani, a tényleges mérés nem kezdődött el.

Mindhárom vizsgált algoritmussal, többféle bemeneti jel és adatvesztési arány kombinációjával végeztem méréseket, közülük néhányat kiemelek a következő fejezetben. A mérési idő minden esetben öt másodperc volt, az exponenciális átlagolások időállandóit fél másodpercre állítottam be, hogy (adatvesztés nélküli esetben) az állandósult állapot mindenképpen beálljon. Az összes mérésre jellemző paramétereket táblázatba gyűjtve:

Paraméter	Érték
Mintavételi frekvencia	48 kHz
Mérési idő	5 s
Exponenciális átlagolási időállandó	0,5 s

10. táblázat: Az összes mérésre azonos paraméterek

10.3. Mérési eredmények

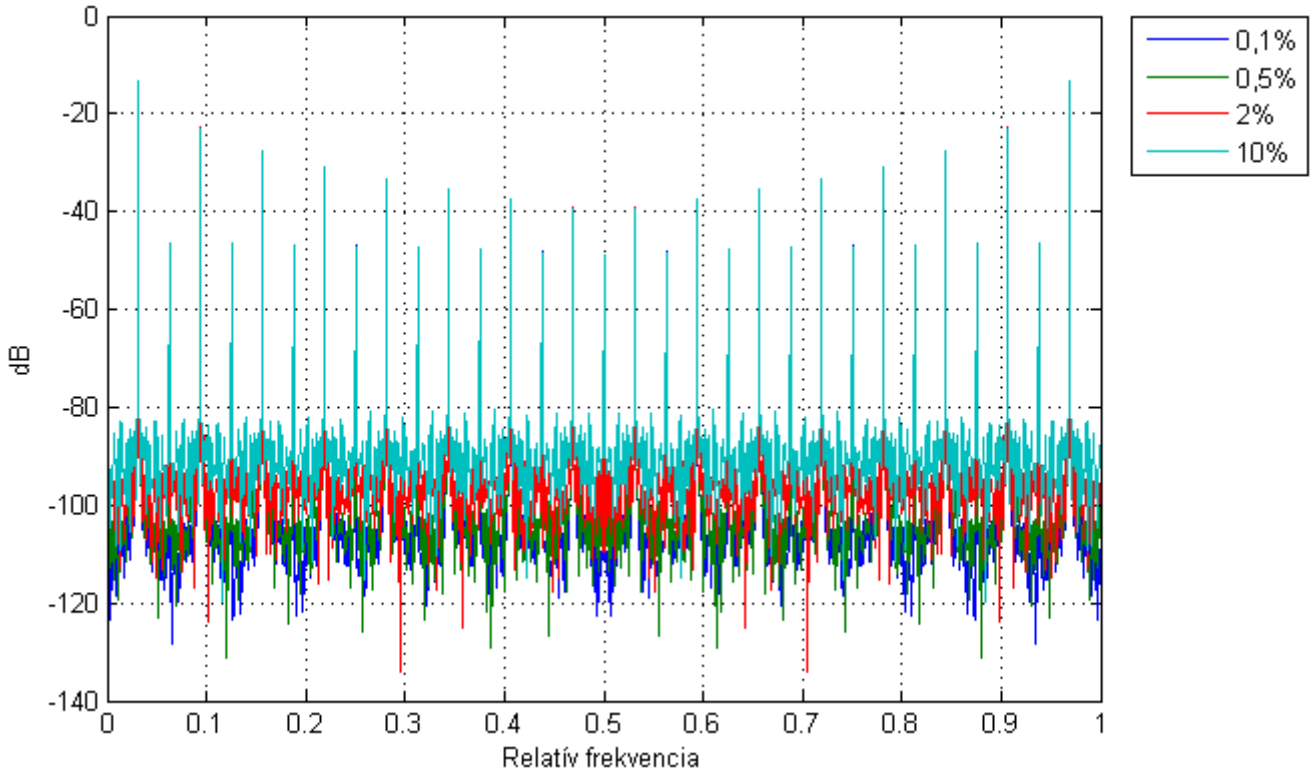
Az első mérésben egy 1 Vpp, 1,5 kHz négyszögjel spektrumát mértem az RBO-val, 0,1%, 0,5%, 2% és 10% beállított adatvesztési arányok mellett, 1024-es pontszámmal. A tényleges adatvesztési arányok ettől maximum $\pm 0,03\%$ -kal tértek el. A paraméterek az alábbi táblázatban is láthatók. A mért spektrumokat a 20. ábra mutatja, ennek kinagyított részlete a 21. ábra.

Paraméter	Érték
Bemenet	1 Vpp, 1,5 kHz négyszögjel
Eljárás	RBO
Pontszám	$N = 1024$
Mintavétel	Koherens
Adatvesztési arány	0,1%, 0,5%, 2% és 10%

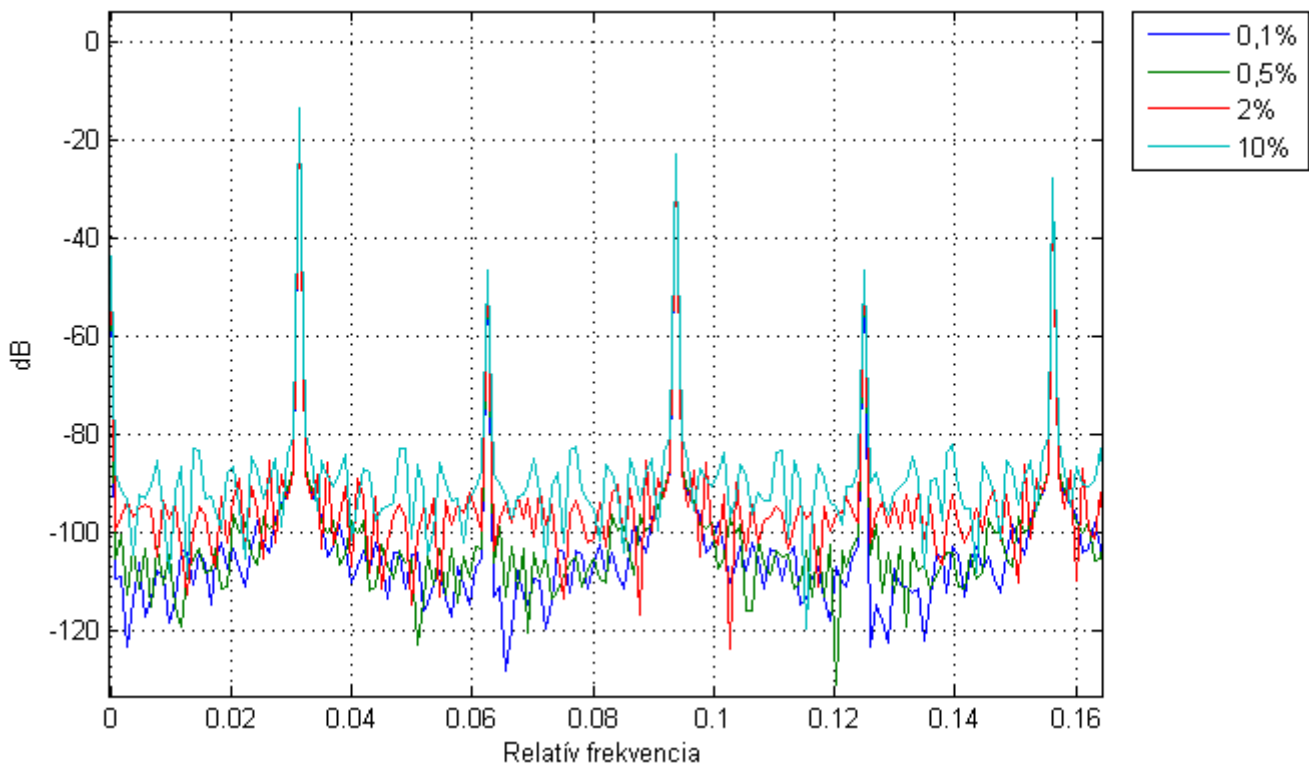
11. táblázat: Az első mérés paraméterei

A függőleges tengelyen nem az adott komponens voltban kifejezett amplitúdóját ábrázoltam, hanem ennek DSP kártyán digitálisan reprezentált értékét (a két számérték között homogén, lineáris kapcsolat van). A vízszintes tengely a relatív frekvenciát ábrázolja, mely a frekvenciának a mintavételi frekvenciához viszonyított értéke. Ezek az összes mérési eredményt tartalmazó grafikonra érvényesek. Érdeemes megjegyezni, hogy növekvő adatvesztés esetén a

zajszint növekedni látszik, ezt okozhatja a kimenet időállandójának adatvesztéstől való függése. Ami a négyszögjelet illeti, a spektrumát bármelyik adatvesztési arány esetén jól lehetett mérni. A komponensek „szoknyáit” numerikus problémák (lebegőpontos számábrázolás) okozzák.



20. ábra: 1 Vpp 1,5 kHz négyszögjel, RBO különböző adatvesztésekkel, $N=1024$

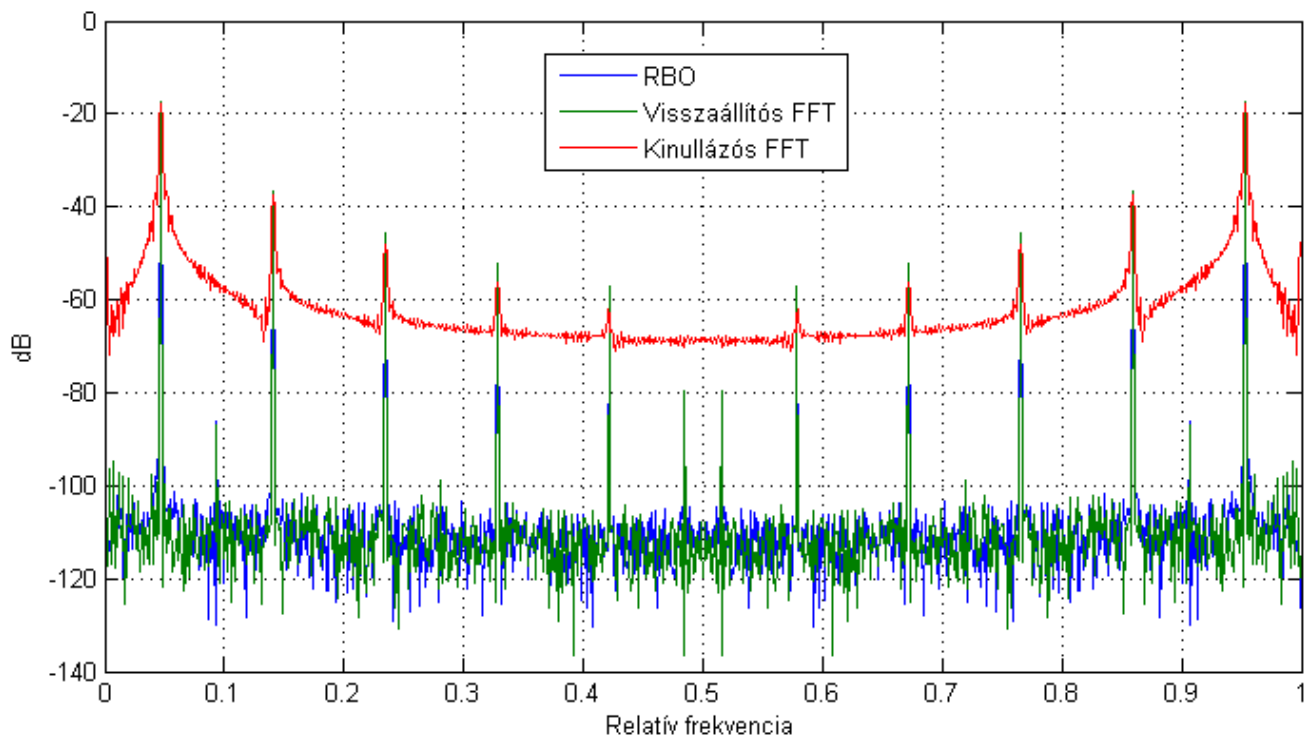


21. ábra: Az előző ábra nagyított részlete

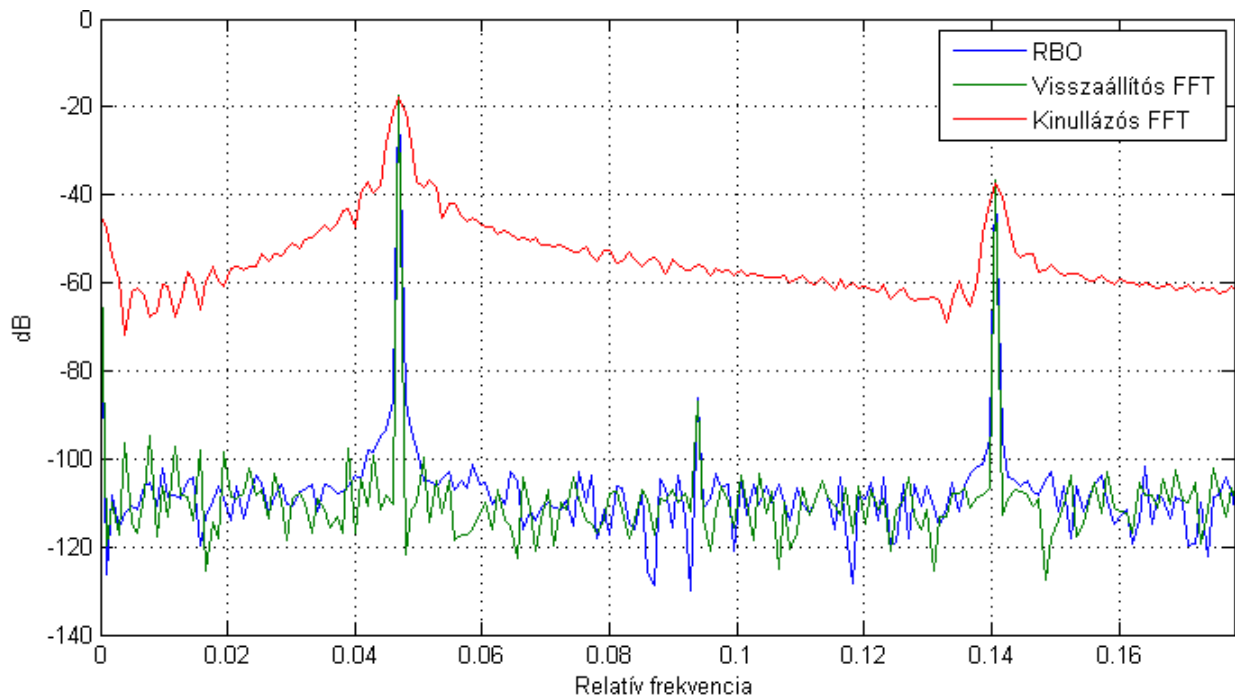
A második mérésben egy 1 Vpp, 2,25 kHz háromszögjel spektrumát mértem mindhárom vizsgált eljárással, 1024-es pontszámmal. Az adatvesztési arány 0,5% volt. A 23. ábra mutatja a mért amplitúdóspektrumot és ennek nagyított részletét. A paraméterek táblázata és az ábrák:

Paraméter	Érték
Bemenet	1 Vpp, 2,25 kHz háromszögjel
Eljárás	Mindhárom
Pontszám	$N = 1024$
Mintavétel	Koherens
Adatvesztési arány	0,5%

12. táblázat: A második mérés paramétere



22. ábra: 1 Vpp, 2,25 kHz háromszögjel, 0,5% adatvesztés



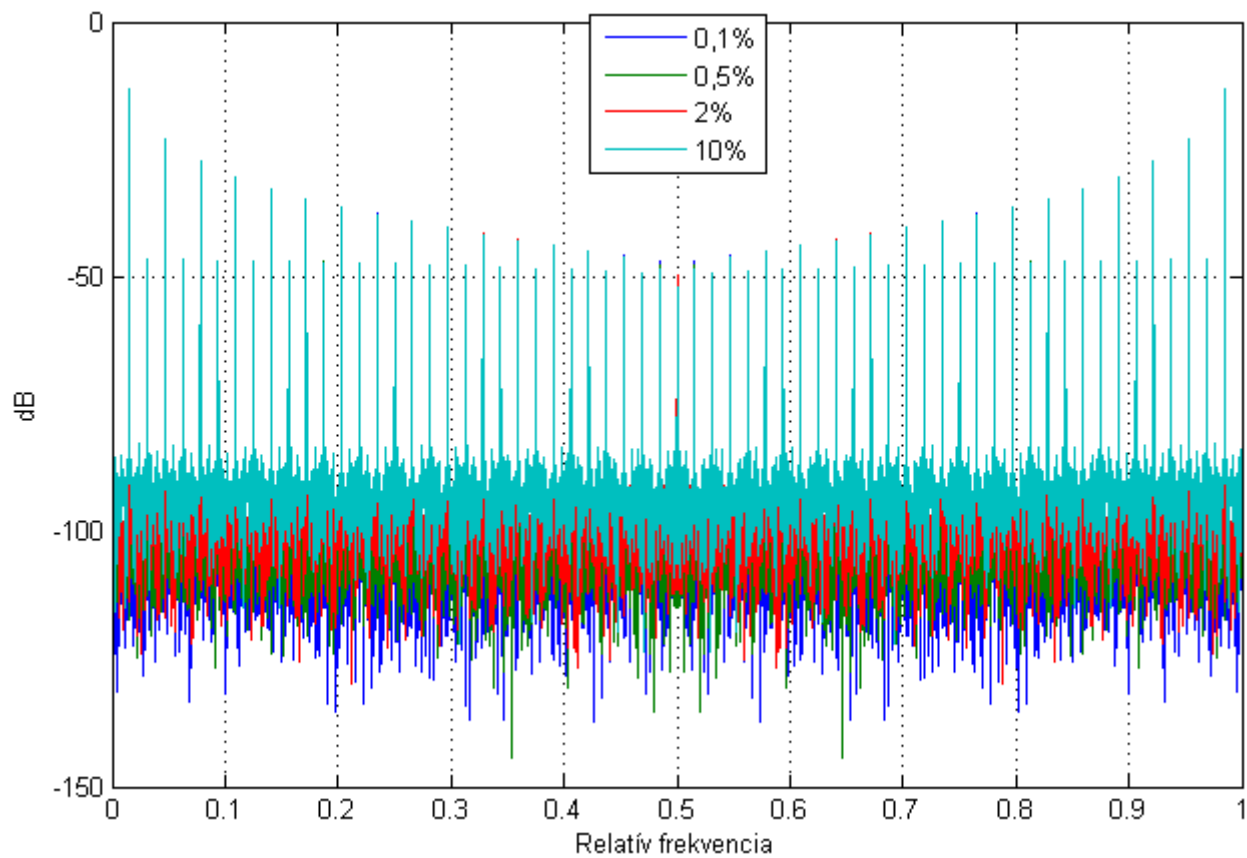
23. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete

Jól látható a kinullázós FFT-re jellemző szivárgás. Mindhárom módszer jól becsli a komponensek amplitúdóját. Most is látható az RBO-nál a csúcsok közelében a szoknya, viszont a visszaállítós FFT esetén ez nem jelentkezik. Utóbbi két módszer zajszintje megegyezik az első mérésben 0,5%-os adatvesztési arány esetén mérttel.

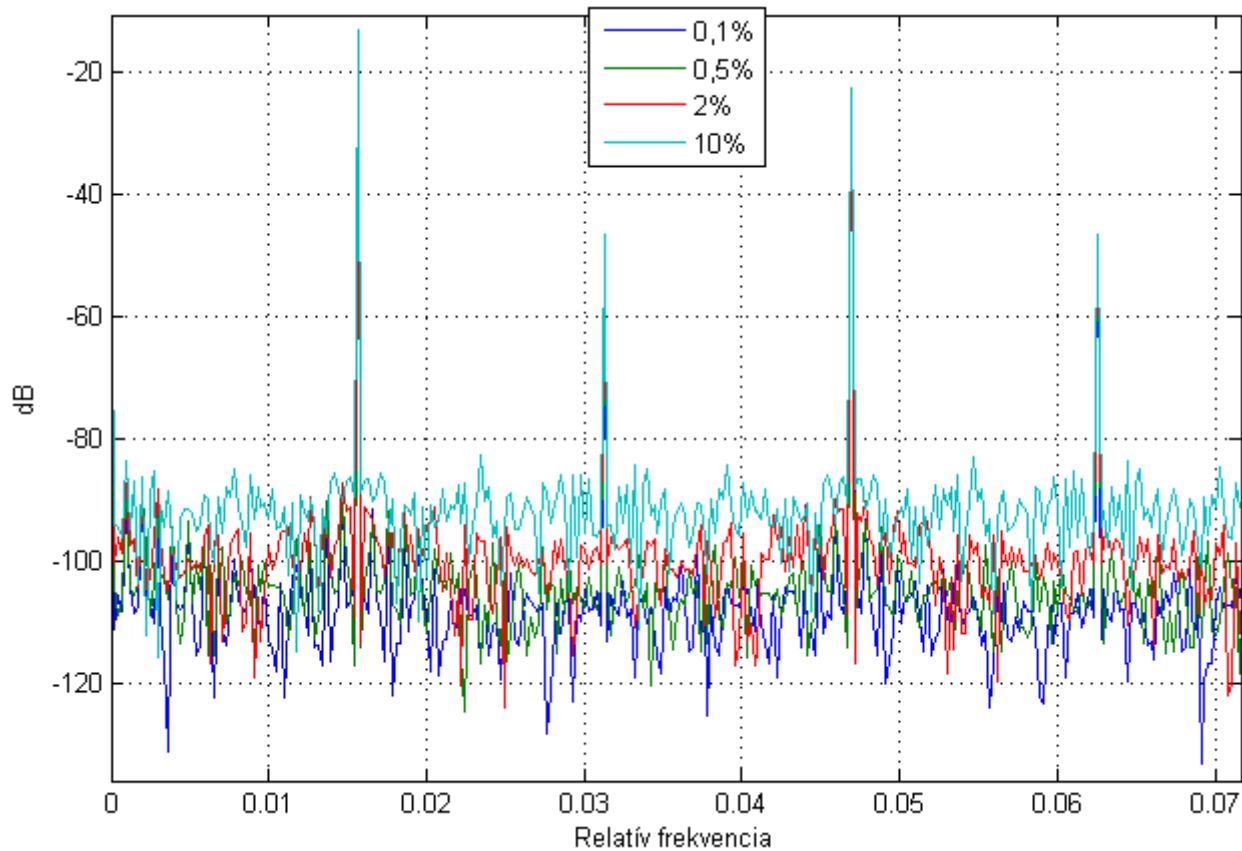
A harmadik mérésben egy 1 Vpp 750 Hz négyszögjelet mértem a visszaállítós FFT-s eljárással ablakozás nélkül, 0,1%, 0,5%, 2% és 10% adatvesztési aránnyal, 4096-os pontszámmal. Az eredményt mutatja a 27. ábra. Egyértelműen látszódnak a négyszögjel komponensei, a csúcsok élesen kiemelkednek. A zajszint egyenletes és közelítőleg annyi, mint az első mérésben. A táblázat és az eredmények:

Paraméter	Érték
Bemenet	1 Vpp, 1,5 kHz négyszögjel
Eljárás	Visszaállítós FFT
Pontszám	$N = 4096$
Mintavétel	Koherens
Adatvesztési arány	0,1%, 0,5%, 2% és 10%

13. táblázat: A harmadik mérés paramétere



24. ábra: 1 Vpp 750 Hz négyzetjel, visszaállítós FFT, nincs ablakozás, $N = 4096$, különböző adatvesztések



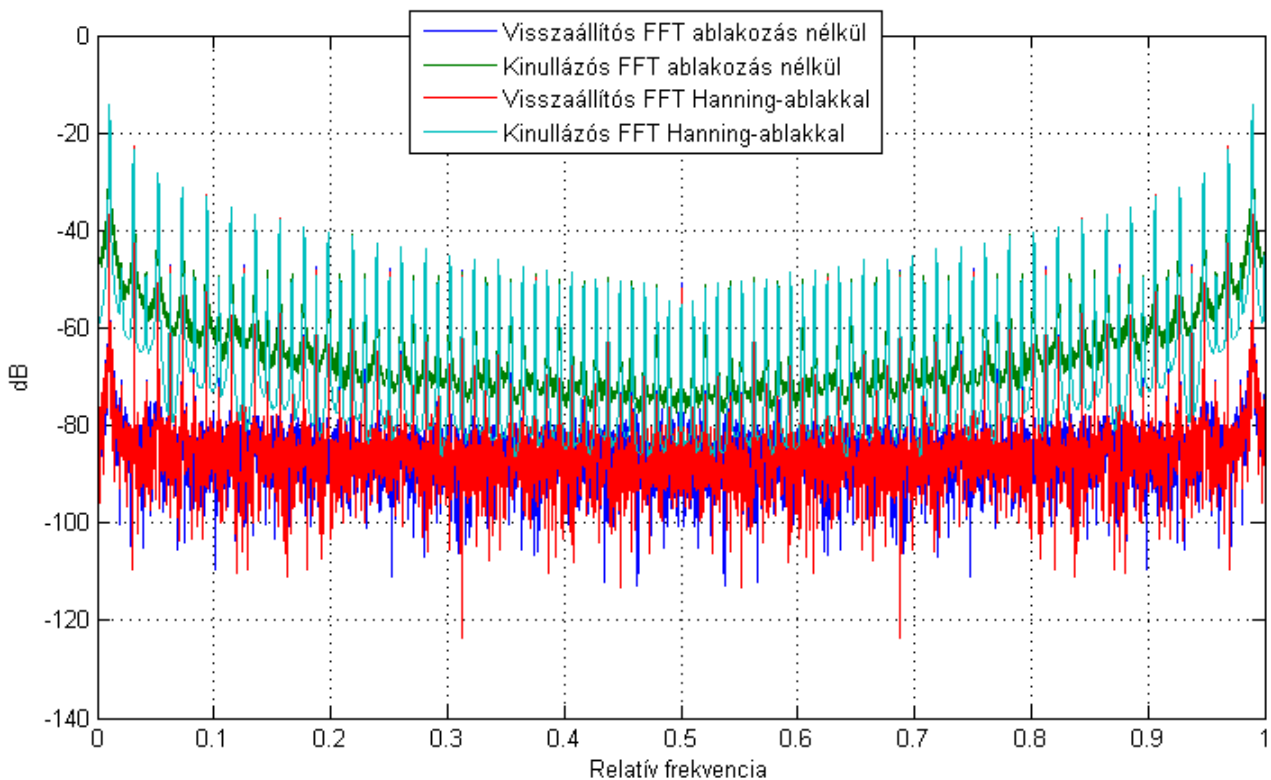
25. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete

A negyedik mérésben egy 1 Vpp 500 Hz négyyszögjel mértem különböző FFT-s eljárásokkal (visszaállító és kinullázós, illetve ablakozás nélkül és Hanning-ablak kombinációi), 4096-os pontszámmal. Ennek az eredményét mutatja a 27. ábra. Az 500 Hz egy olyan frekvencia, amelyre nézve a mintavétel inkoherens, viszont a harmadik felharmonikusára nézve a mintavétel koherens. Az adatvesztési arány 0,1%. Ez tekinthető az inkoherens mintavételre vonatkozó szimulációhoz készített mérésnek is. A paraméterek táblázatos formában:

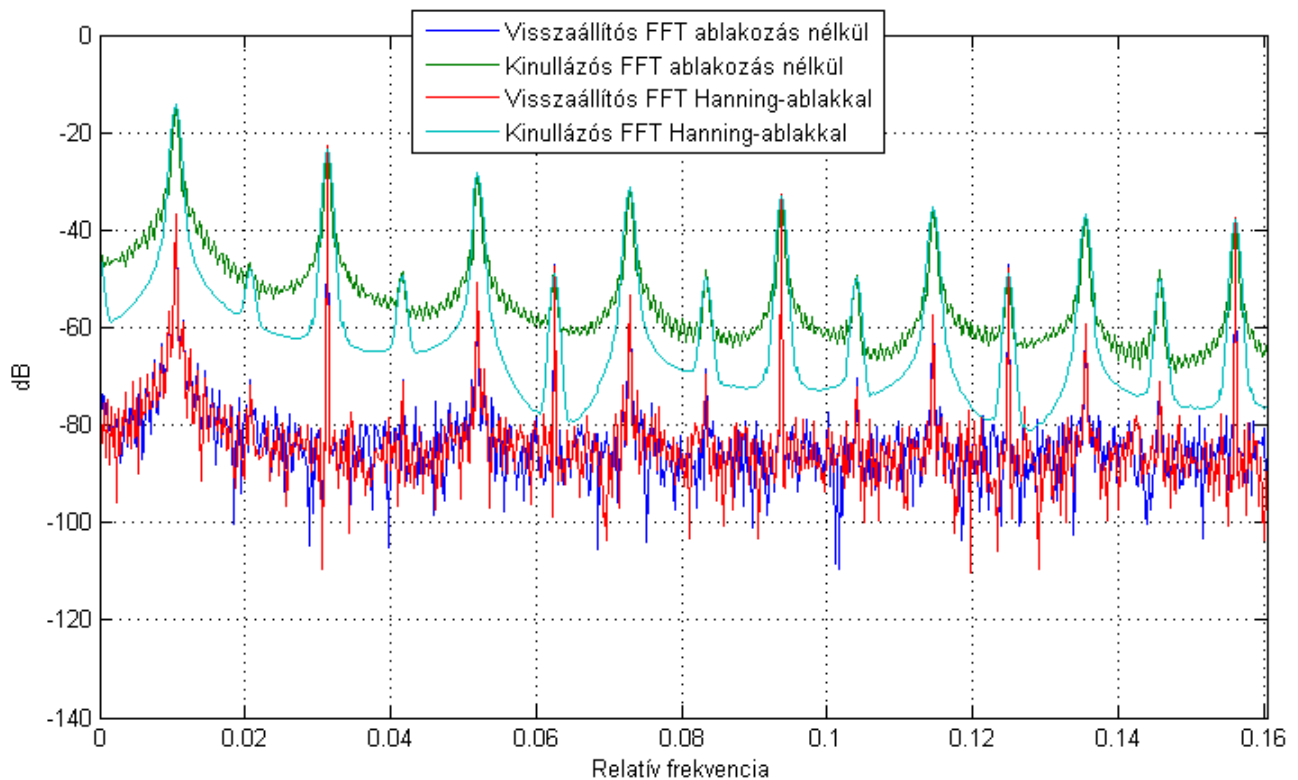
Paraméter	Érték
Bemenet	1 Vpp, 500 Hz négyyszögjel
Eljárás	FFT-s eljárások
Pontszám	$N = 4096$
Mintavétel	Inkoherens
Adatvesztési arány	0,1%

14. táblázat: A negyedik mérés paraméterei

A mérés a szimuláció alapján várt eredményt hozta: a kinullázós megoldással helyesen lehetett becsülni a komponensek amplitúdóit, míg a visszaállítóval csak minden harmadikét. A zajszint nagyobb, mint az előző esetben, ennek oka valószínűleg az inkoherens mintavétel. Az ablakozás a visszaállító FFT becslésén nem tud javítani, ahogyan azt az átlagolásról szóló részben kifejtettem. A kinullázós FFT becslése „kisimult” az ablakozás hatására, illetve az ablakozás javított az amplitúdóbecslésen is.



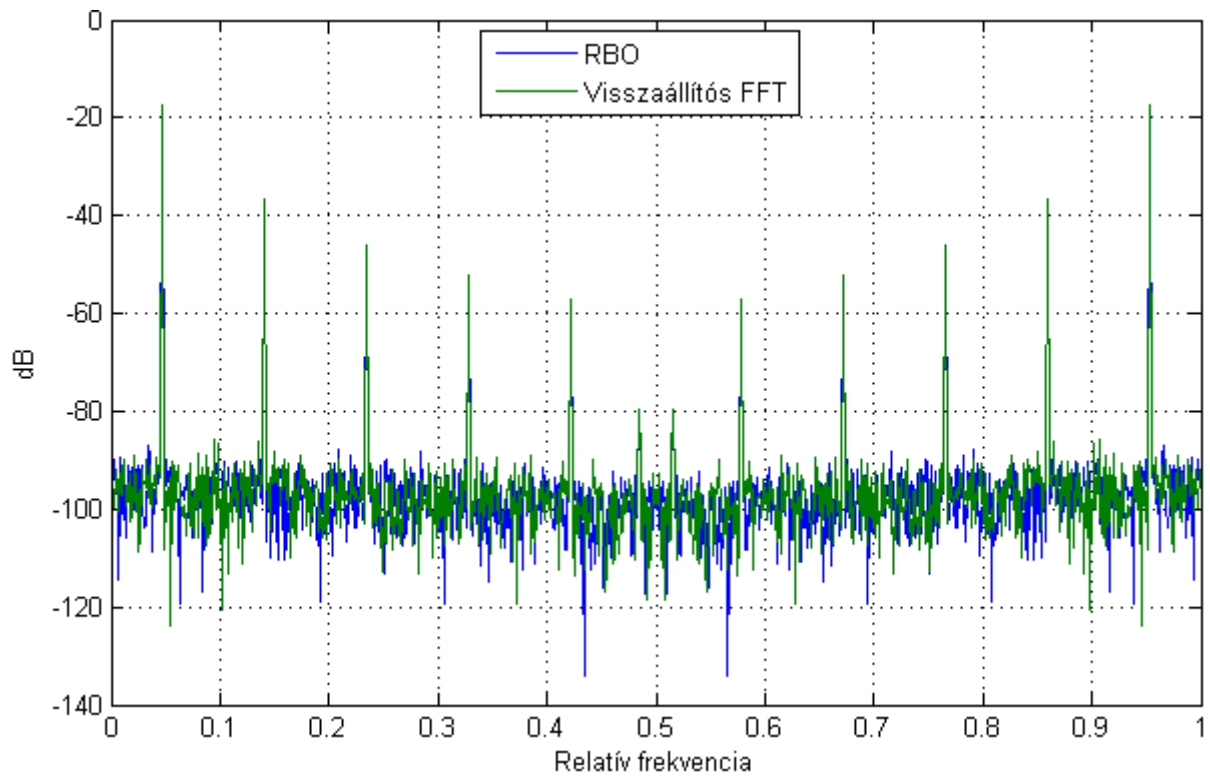
26. ábra: 1 Vpp, 500 Hz négyyszögjel, 0,1% adatvesztés, $N = 4096$



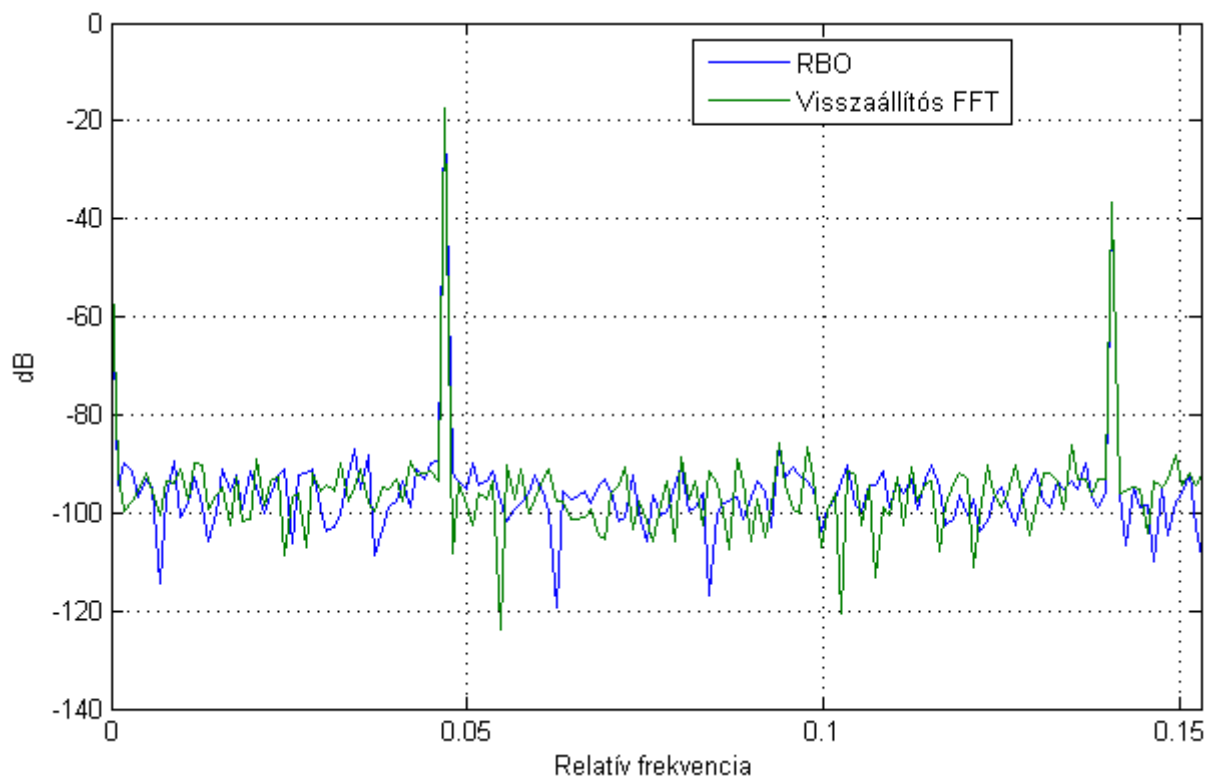
27. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete

Több mérést végeztem még, ezeknek a tapasztalatait szövegesen összegzem. A kinullázós FFT-s megoldásnál jelentkezik, hogy még viszonylag alacsony adatvesztési arány (0,5%) esetén is annyira kevés érvényes FFT-blokk marad, hogy a módszer beállási ideje a mérési időnél jóval hosszabb. Nagyobb pontszám esetén ez a hatás még erősebben jelentkezik.

A visszaállítós FFT-s módszer az összes mérésben az RBO-val gyakorlatilag azonos eredményeket produkált, például egy 2,25 kHz, 1 Vpp háromszögjel és 10%-os adatvesztési arány melletti mérési eredményt mutatja a 28. ábra, ennek kinagyított részlete a 29. ábra. Jól látható a két módszer által becsült komponensek azonos amplitúdója és az azonos zajszint.



28. ábra: 2,25 kHz, 1 Vpp háromszögjel, 10% adatvesztés, $N = 1024$



29. ábra: Az előző ábra kinagyított részlete

A kritikus adatvesztési arányt is megmértem, az eredmények a következő táblázatban láthatók:

<i>N</i>	Mért kritikus veszteség (minta) ($N\gamma_{krit}$)	Számított kritikus veszteség (minta) ($N\gamma_{krit}$)
128	2	8,75
256	2	10
512	2	11,25
1024	2	12,5
2048	3	13,75
4096	3	15

15. táblázat: A kritikus veszteség mért és számított értékei

Az oszlopokban a kritikus adatvesztési arányhoz tartozó, blokkon belüli adatvesztések számát tüntettem fel. Első látásra úgy tűnhet, hogy a mérés vagy számítás helytelen volt, azonban megvizsgálva a két oszlopban lévő értékek arányát, körülbelül ötszörös a különbség. Ebből arra következtethetünk, hogy a kritikus adatvesztési arányra vonatkozó összefüggés jellegében, egy konstans szorzótól eltekintve erre az alkalmazásra is helyes eredményt ad.

Lényeges szempont, hogy IFFT-ből a DSP-kártyához gyárilag optimalizált rutint használtam, míg rezonátoros visszaállításból sajátot. Ezt – elsősorban a rövidebb fejlesztési idő végett – a fejlesztőkörnyezetben C nyelven írtam meg, melyet a fordítóprogram, ahogy tudott, lefordított. Ez azt jelenti, hogy a mérésben használt rezonátoros algoritmus valószínűleg sokkal kevésbé volt hatékony, mint lehetett volna. Ezek együtt magyarázhatják a számított értéktől való eltérést, erre utal a mért és számított kritikus veszteségek közötti konstans szorzó is. Az RBO hatékony, assembly alapú megvalósításával valószínűleg elérhető az elméleti megfontolások alapján várt kritikus veszteség. Tanulásként megfogalmazható, hogy adott alkalmazásban érdemes megmérni a kritikus és a várható adatvesztési arányt, majd az alapján választani, hogy melyik visszaállítási módszert használjuk.

11. Összefoglalás, kitekintés

Munkám során az adatvesztés esetén használható spektrumbecslési módszereket vizsgáltam. A dolgozat egyik célja volt a két általam alaposabban vizsgált, már létező eljárás összehasonlítása, melyre korábban nem került sor. A vizsgálat alapjául szolgáló megadtam az adatvesztés egy lehetséges matematikai leírását, és ennek felhasználásával néhány adatvesztési modellt.

Először egyesével megvizsgáltam a rezonátoralapú megfigyelőt és az FFT-blokkokat nullákkal lezáró eljárást. Az RBO fő előnye az eljárás rugalmassága, emellett az adatvesztést jól tűri, viszont a számításigénye nagyobb. Az FFT-s módszerekről általánosságban kijelenthető, hogy gyorsabbak, azaz kevesebb művelet szükséges a végrehajtásukhoz, de ez blokkos adatfeldolgozással párosul, amely miatt az adatvesztés kezelése problémás.

A dolgozat fontos pontja az új módszer bemutatása, amely a visszaállító FFT-s eljárás. Ennek célja volt az FFT sebességével megvalósítani az RBO előnyös adatvesztéstűrését. Ez (bizonyos korlátozásokkal) sikerült, a módszer lehetővé teszi (a valós idejű alkalmazásokban leggyakrabban megvalósított FFT algoritmusok használatát feltételezve) kettőhatvány pontszám és egyenletes rezonátorelrendezés esetén a koherensen mintavett jelek spektrumának hatékony számítását.

A módszereket összehasonlítottam elméleti megfontolások alapján, kipróbáltam szimulációval és implementáltam a digitális jelfeldolgozó kártyán is. A szimulációs és mérési eredmények többnyire alátámasztották az elméleti megfontolásokat, máshol (pl. kritikus adatvesztési arány) új problémára világítottak rá.

A dolgozat készítése során felmerültek további lehetőségek, melyek irányába a munka folytatható. Ilyen feladat lehet más adatvesztési modellek (például többállapotú Markov-láncok), illetve a beállási idő adatvesztési aránytól való függésének általánosabb vizsgálata. Az RBO assembly alapú megvalósításával lehetővé válna a kritikus adatvesztési arány kiszámított értékének elérése, ennek méréssel történő validálása. Az RBO [4] és a kinullázós FFT [20] használatával végeztek méréseket adatvesztési modellek identifikációjára, hasonló kísérleteket a visszaállító FFT használatával is lehetne végezni. Érdekes eredményekre vezethet a dolgozatban ismertetett módszerek alaposabb összehasonlítása egyéb módszerekkel. Eddig csupán elméleti megfontolások alapján (numerikus problémák, számításigény) vettem össze őket, fontos lenne gyakorlati tapasztalatot szerezni működésükről.

Irodalomjegyzék

- [1] L. Sujbert, Gy. Orosz, „FFT-based Spectrum Analysis in the Case of Data Loss,” *IEEE TRANSACTION ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT*, vol. 65, no. 5, pp. 968–976, May 2016.
- [2] Sujbert L, „Periodikus zavarhatások csökkentésének aktív módszerei” Ph.D. értekezés 95 p., 1997.
- [3] Gy Orosz, L. Sujbert, G. Péceli, „Analysis of Resonator-Based Harmonic Estimation in Case of Data Loss”, *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT* 62:(2) p. 510-518., 2013
- [4] Sujbert L, G Péceli, Gy Simon, „Resonator Based Non-Parametric Identification of Linear Systems”, *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT* 54:(1) p. 386-390., 2005.
- [5] Péceli G, „A Common Structure for Recursive Discrete Transforms”, *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS* 33:(10) p. 1035-1036. (1986)
- [6] F. Nagy, „Measurement of signal parameters using nonlinear observers,” *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT* vol. IM-41,p. 152-155, Febr. 1992.
- [7] Liu, G.P., „Predictive Controller Design of Networked Systems With Communication Delays and Data Loss”, *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS II: Express Briefs*, p. 481 - 485 June 2010.
- [8] Srinivasan Keshav, „Methods and apparatus for achieving and maintaining optimum transmission rates and preventing data loss in a processing system network”, US5627970A szabadalom, 1997. máj. 6
- [9] G. Germano, E.J. Hoffman, „A study of data loss and mispositioning due to pileup in 2-D detectors in PET”, *IEEE TRANSACTIONS ON NUCLEAR SCIENCE*, p. 671 - 675, Apr 1990
- [10] Olivier Verscheure, Pascal Frossard and Maher Hamdi, „MPEG-2 Video Services over Packet Networks: Joint Effect of Encoding Rate and Data Loss on User-Oriented QoS”, NOSSDAV 98, p. 257-264, Cambridge, July 1998
- [11] Hoi-Kwong Lo, Hoi Fung Chau, „Quantum cryptographic system with reduced data loss”, US5732139A szabadalom, 1998. márc. 24.

- [12] Piet M. T. Broersen, Stijn de Waele, Robert Bos, „Application of Autoregressive Spectral Analysis to Missing Data Problems”, *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT*, vol. 53., no. 4, August 2004
- [13] Piet M. T. Broersen, Stijn de Waele, Robert Bos, „Estimation of Autoregressive Spectra with Randomly Missing Data”, *IMTC 2003 – INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT TECHNOLOGY CONFERENCE*, 20-22 May 2003
- [14] N. R. Lomb, „Least-Squares Frequency Analysis of Unequally paced Data”, *ASTROPHYSICS AND SPACE SCIENCE* 39 (1976), pp. 447-462
- [15] Jeffrey D. Scargle, „Studies in Astronomical Time Series Analysis. III. Fourier Transforms, Autocorrelation Functions, and Cross-Correlation Functions of Unevenly Spaced Data”, *THEORETICAL STUDIES BRANCH, SPACE SCIENCE DIVISION, NASA-AMES RESEARCH CENTER*, vol. 343 pp.874-887, No.2, 1989
- [16] G. Plantier, S. Moreau, L.Simon, J.-C. Valière, A. Le Duff, H. Bailliet, „Nonparametric spectral analysis of wideband spectrum with missing data via sample-and-hold interpolation and deconvolution”, *DIGITAL SIGNAL PROCESSING*, 22 (2012) pp. 994-1004
- [17] Simonyi Ernő, "Digitális szűrők. A digitális jelfeldolgozás alapjai", *MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ*, Budapest, 1984.
- [18] F. Harris, “On the use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform”, *IN PROC. IEEE*, vol. 66, no. 1, pp. 51-83, Jan. 1978.
- [19] Péceli G, „Valós idejű jelkiértékelés mérési eljárásokban”, akadémiai doktori értekezés, *BME*, Budapest, 1989., 211 p.
- [20] L. Sujbert, G. Orosz, „FFT-based Identification of Data Loss Models”, *21ST IMEKO TC-4 INTERNATIONAL SYMPOSIUM AND 19TH INTERNATIONAL WORKSHOP ON ADC MODELLING AND TESTING*, Budapest, Hungary, 2016.09.07-2016.09.09., pp. 146-151.