



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Halász Dániel

**RÉZFÚVÓS HANGSZEREK
HANGKELTÉSÉNEK FIZIKAI
MODELLEZÉSE**

KONZULENS

Dr. Rucz Péter

BUDAPEST, 2020

Tartalomjegyzék

Kivonat.....	4
Abstract.....	5
1 Bevezetés	6
2 Rézfúvós hangszerek.....	7
2.1 A hangszer család általános jellemzői	7
2.1.1 Fúvóka	7
2.1.2 Egyenes cső.....	8
2.1.3 Táguló tölcsér	8
2.2 A hangkeltés fizikája	8
3 A hangkeltés modellezése	10
3.1 A rezonátor jellemzése a bemeneti impedanciával.....	10
3.1.1 Távvezeték analógia	10
3.1.2 Fali veszteségek	10
3.1.3 Bemeneti impedancia.....	12
3.2 Nemlineáris hullámterjedés: Menguy-Gilbert-modell.....	18
3.3 A gerjesztés modellezése	20
3.3.1 Az ajakra ható erő számítása	22
4 Numerikus megoldás	24
4.1 Konvolúció helyettesítése kvadratúrával	24
4.1.1 Kvadratúra-szabály	24
4.1.2 Gauss-Jacobi kvadratúra	25
4.2 Egydimenziós véges térfogat módszer a hullámterjedésre	29
4.2.1 Lineáris eset	29
4.2.2 Általános eset.....	31
4.2.3 Fluxus limiter.....	32
4.3 Newmark időlépéses séma.....	33
5 Eredmények.....	35
5.1 Hullámterjedés tesztelése különböző esetekben	35
5.1.1 Lineáris eset, állandó keresztmetszet.....	35
5.1.2 Lineáris eset, változó keresztmetszet.....	36
5.1.3 Lineáris eset, fali veszteségek hatása.....	37

5.1.4 Nemlineáris eset.....	40
5.1.5 Teljes terjedésmodell	43
5.2 Ajakmodell tesztelése	43
5.3 Teljes modell csatolással	45
6 Összefoglalás.....	49
Irodalomjegyzék.....	50

Kivonat

A rendelkezésre álló számítási teljesítmény folyamatos növekedésének és a numerikus módszerek elterjedésének köszönhetően egyre mélyrehatóbban tudunk foglalkozni az akusztikus hangszerek hangszintézisével, a hangkeltés folyamatának szimulálásával. Dolgozatomban különböző rézfúvós hangszerekhez készítek fizikai modellt (kürt, trombita, harsona). A hangszercsaládon belül a hangkeltés módja hasonló, a fő eltérést az egyes hangszerek között a rezonátor geometriája jelenti.

A rézfúvós hangszerek esetében a hangszertestbe zárt levegőoszlopot a játékos ajkainak mozgása és az ajkak közt átpréselt levegő gerjeszti. A csőben végigterjedő hullám a nyitott végről visszaverődik és visszahat a gerjesztésre, így módon az ajkak és a levegőoszlop csatolt rendszert alkot. A fizikai modellezés során kihívást jelent az ajkak és a légoszlop alkotta csatolt rendszer leírása, a hossz tengely mentén változó keresztmetszetű hangszertestben a fali veszteségek kezelése, illetve a nagy amplitúdók mellett megjelenő nemlineáris terjedési jelenségek figyelembevétele. Valóság-hű modell megalkotásához a fent említett problémák sikeres megoldása elengedhetetlen.

Jelen dolgozatban elkészítem három különböző rézfúvós hangszer geometriai modelljét és az ebből számított bemeneti impedanciafüggvényt összehasonlítom az irodalmi adatokkal. Bemutatom a hullámterjedés leírásához használt Menguy-Gilbert-modellt és a terjedés numerikus szimulációjához szükséges apparátust, továbbá ismertetem az ajakmodellezéshez használt egyszabadságfokú mechanikai oszcillátort és annak megvalósítását. A terjedésmodell és a gerjesztésmodell külön-külön implementálása után a két részegységet összekapcsolom és szimulálom a csatolt rendszer működését, vizsgálom a hangszer lesugárzását különböző paraméterek mellett.

Példaszámításokkal igazolom a modell megfelelő működését, valamint több teszt esetet is megvizsgálom a különböző paraméterek hangolásával és a geometria megváltoztatásával. A paraméterek változtatásának hatását szintetizált hangmintákon is bemutatom. Az eredményeket értékelem és javaslatot teszek a modell kibővítésére, továbbfejlesztésére.

Abstract

Thanks to the continuous increase in the performance of computers and the common use of numerical methods, we can examine sound synthesis and simulation of the sound production process of acoustical instruments in more and more details. In my study, I create a physical model, suitable for several brass instruments (horn, trumpet, trombone). Within this family of musical instruments, the actual process of the sound production is very similar, the main differences are due to the geometry of the resonator.

In the case of brass instruments, the air column enclosed in the body of the instrument is excited by the movement of the player's lips and the air forced through them. The wave propagating along the bore is reflected from the open end and reacts on the excitation, thus forming a coupled system of the lips and the air column. We face several challenges in physical modeling, including the definition of the coupled system created by the lips and the air column, treating the wall losses in a bore with varying cross-section along the longitudinal axis, or the consideration of nonlinear propagation occurring at high amplitudes. A successful solution to these problems is essential for creating a realistic model.

In this study I make a geometric model of three different brass instruments and compare the input impedance functions calculated from geometry with the data published earlier. I review the Menguy-Gilbert model used for describing the wave propagation and the mathematical apparatus required for numerical simulation of the propagation. I also describe the single-degree-of-freedom mechanical oscillator used for modeling the lips. After the implementation of the propagation model and the exciter model separately, I connect the two components and simulate the operation of the coupled system, and examine the radiation of the instrument under different parameters.

I verify the proper operation of the model with example calculations, and I examine several test cases by tuning the various parameters and changing the geometry. I also show the effect of changing the parameters by means of synthesized sound samples. I evaluate the results and make suggestions on expanding and improving the model.

1 Bevezetés

A fúvós hangszerek az aerofon hangszer család egy speciális rész halmazát testesítik meg. Aerofon hangszereknek nevezünk minden olyan hangszert, amely levegővel, levegő pótlással működik. Fúvós hangszerek esetén a hangszer működtetéséhez szükséges levegőt a játékos légző szervei biztosítják, ellentétben például az orgonával, amely szintén aerofon hangszer, azonban a sípok levegő pótlásáról egy mechanikai rendszer gondoskodik. A nyugati zenében a fúvós hangszereket, építési anyaguktól függetlenül, a „fafúvós” vagy a „rézfúvós” kategóriába szokás sorolni. A besorolás nem teljesen konzekvens, jellemzően a tölcséres fúvókájú hangszereket szokás a „rézfúvós” kategóriába sorolni, a többi hangszert pedig „fafúvós” címkézik.

A fúvós hangszerek hangkeltése a zenei akusztika és az áramlás akusztika mai napig is aktívan kutatott területe. Ennek oka a hangkeltési folyamat összetettsége, illetve a modellezéshez szükséges eszköztár sokszínűsége. Rendszeresen születnek a témában publikációk, melyek a hangkeltési mechanizmus újabb és újabb részleteit fedik fel. Jelen dolgozatban egy olyan csatolt számítógépes modellt és szimulációs rendszert építék fel, mely képes rézfúvós hangszerek hangjának fizikai modell alapján történő szintézisére. Az általam megalkotott modell figyelembe veszi az ajak és a légoszlop közti csatolást, a nagy amplitúdók esetén jellemző nemlineáris effektusokat és a fal veszteségekből adódó csillapítást. Az időtartománybeli szimuláció bemenetei a hangszer geometriája, a gerjesztés paraméterei illetve a gerjesztőjel, mely szájüregben uralkodó nyomás. A számítások kimenete pedig a lesugárzott hangnyomás.

A következő fejezetben áttekintem a rézfúvós hangszerek általános jellemzőit és a hangkeltés fizikai hátterét. A harmadik fejezetben a rézfúvós hangszerek hangkeltésének modelljét tekintem át. A számítógépes szimulációkhoz felhasznált módszereket a negyedik fejezet részletezi. Az ötödik fejezetben bemutatom az egyes részmodelleken és a teljes csatolt modellen végzett szimulációk eredményeit. A dolgozatot a hatodik fejezet rövid összegzése és kitekintése zárja.

2 Rézfúvós hangszerek

2.1 A hangszercsalád általános jellemzői

A dolgozat során több konkrét rézfúvós hangszer neve is fel fog merülni. Felépítésük sok szempontból nagyon hasonló, ezért a nagyobb részegységeket érdemes általánosságban áttekinteni. Alapvetően minden rézfúvós hangszer egy változó keresztmetszetű, többszörösen meghajlított csőből (vagy csövekből) áll, melynek egyik végén a fúvóka található, a másik vége pedig tölcsérszerűen kiszélesedik. Egyes hangszereken találunk billentyűket is, amik az aktuális csőhosszt képesek megváltoztatni, ezáltal más hangmagasságot eredményezve. A hangszerek közti különbség a cső meghajlításában, illetve keresztmetszete változásában keresendő. A továbbiakban említett részegységek tehát minden rézfúvós hangszerre értelmezhetőek, csak méretükben és pontos geometriájukban térnek el egymástól.

2.1.1 Fúvóka

A játékos ajkához közel eső részt hívják fúvókának, amely tölcsér- vagy csészeformájú. A fúvókához szorított ajkak rezgése gerjeszti a csőben lévő levegőoszlopot. A zenész ajkai feszességének, a rajta átpréselt levegő mennyiségének, sebességének (és természetesen a billentyűk pozíciójának) változtatásával képes módosítani a megszólaló hang magasságát. A fúvóka mellett, hogy a hangszer megszólaltatását könnyebbé, kényelmesebbé teszi, közreműködik abban is, hogy az egyik végén zárt rezonátorcsövekre jellemző, csak a páratlan rendszámú részhangokat tartalmazó rezonanciasort a természetes felhangsorhoz közelítse. Az ajkakkal lezárt fúvóka egy kis üregrezonátorként működik, és ahogy a játszott hang magassága közelít ennek az üregrezonátornak a saját frekvenciájához, a hangszer rezonátorcsöve akusztikailag fokozatosan meghosszabbodik, közelítve a fúvóka térfogatának megfelelő mértékben megnövelt csőhosszúságához. Az egyre magasabb rezonanciák így egyre inkább eltérnek lefelé eredeti magasságukhoz képest.



1. ábra: Kürtfúvókák

2.1.2 Egyenes cső

A fúvókához kapcsolódik egy közelítőleg konstans keresztmetszetű csőrész, amiben a gerjesztés hatására állóhullámok alakulnak ki. A hangkeltés nyelvcsip jellege miatt a cső akusztikailag egyik végén zártnak tekinthető. A rézfúvós hangszereknél említett cső meghajlítása a hangszer által lesugárzott hang jellegére nincs nagy hatással [5], éppen ezért a továbbiakban ettől eltekintünk.

2.1.3 Táguló tölcser

A rezonátor cső vége tölcserszerűen kitágul, ezzel elősegítve a hang lesugárzását a térbe, valamint nagy szerepe van a saját frekvencia hangolásában is. Ahogy azt Backus is megmutatta, a fúvókával, illetve az egyenes és táguló szakaszból álló ún. kompozit kürt kialakítású hangszertest közel harmonikus sajátfrekvencia-sort eredményez [6]. Ebben mindegyik részegységnek fontos szerepe van, a harmonicitás jelentősen romlik bármelyik egység elhagyásával. Ezt a jelenséget Handbauer Tamás korábbi szimulációs eredményei is igazolják [7].

2.2 A hangkeltés fizikája

A rézfúvós hangszerek hangkeltésénél a modellezendő akusztikai rezgőrendszer áll magából a játékosból, aki megszólaltatja a hangszert, és a hangszerből. A

hangkeltésnek két logikailag elkülöníthető részegysége van: a generátor és a rezonátor [8].

A generátor (maga a játékos) táplálja energiával a rendszert, ezzel fenntartva az oszcillációt. A játékos megfújja a hangszert, az ajkai rezgésbe jönnek, az ajkak rezgése megrezgeti a hangszerben lévő levegőoszlopot. A gerjesztés által elindított sűrűség- és nyomásváltozás a csőben hanghullámok formájában terjed.

A rezonátor nem más, mint maga a hangszertestbe zárt légoszlop. A nyitott végén a hullám reflexiót szenved el, az energia egy része visszaverődik, egy része lesugárzódik. A nyitott végről visszaverődő hanghullám visszahat a gerjesztésre és így csatolt rendszer alakul ki. A rezonátor elsődleges funkciója, hogy a betáplált energiát lesugározza a térbe. Ha energetikai szempontból vizsgálódunk, akkor állandósult állapotban a játékos által betáplált energia egy része hangként sugárzódik le a hangszer nyitott végéről, másik része pedig a rezonátor veszteségei miatt elvész. Így alakul ki az egyensúlyi állapot.

Vegyük sorra milyen paraméterek és hogyan befolyásolják a hangszer hangját. A cső hossza a hangmagassággal van kapcsolatban, a cső geometriája, illetve a reflexiók tulajdonságok pedig a hangszínnel. Ezek a tényezők együttesen figyelembe vehetők a hangszertest bemeneti impedanciájának számításával [9]. A rézfűvós hangszereknél a bemeneti impedancia kulcsfontosságú mennyiség, ennek részletes számítását egy későbbi fejezetben részletesen bemutatom.

Az ajkak közt megjelenő levegő térfogatsebessége gerjeszti a rezonátort. A rezonátor végén visszaverődik a nyomáshullám, ezért erő hat vissza a rezgő ajkakra. A gerjesztés akkor a leghatékonyabb, ha kis térfogatsebességhez nagy visszaható erő tartozik és az megfelelő fázisban hat az ajkakra, így erősítve annak rezgését. Ebből az okból kifolyólag a bemeneti impedancia maximumhelyei lesznek azok a frekvenciák, amin a hangszert meg lehet szólaltatni.

3 A hangkeltés modellezése

3.1 A rezonátor jellemzése a bemeneti impedanciával

3.1.1 Távvezeték analógia

A bemeneti impedancia számításához felhasználjuk a távvezeték analógiát. Ebben a szemléletmódban a cső megfeleltethető egy távvezetéknek, és bizonyos fizikai mennyiségek párhuzamba állíthatóak. A csőben tapasztalható nyomás megfelel a távvezetéken mérhető feszültségnek, a térfogatsebesség az áramnak, a cső végén lévő sugárzási impedancia a távvezeték lezáró impedanciájának, illetve az akusztikai hullámimpedancia az elektromos hullámimpedanciájának. A bemeneti impedancia a fentiek ismeretében számítható a villanytani összefüggés alapján:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_t + Z_0 j \tan(kh)}{Z_0 + Z_t j \tan(kh)} \quad (1)$$

ahol Z_{be} a bemeneti impedancia, Z_t a lezáró impedancia, Z_0 a hullámimpedancia, k a hullámszám és h a cső hossza.

Gyakorlatban a bemeneti impedancia számítását úgy végezzük el, hogy a hangszercsővet felosztjuk kis szakaszokra. A cső végéről indulunk, a legutolsó darabnak ismerjük a lezárását, a sugárzási impedanciát. A hullámimpedanciája számítható. Ebből megkomponálhatjuk az utolsó darabra a bemeneti impedanciát. Tovább lépünk az utolsó előtti darabra, melynek lezáró impedanciája az utolsó darab bemeneti impedanciája lesz. A hullámimpedancia változatlanul kiszámolható, és a bemeneti impedancia megkomponálható a kettő ismeretében. A módszert folytatva végighaladunk a csövön és az első darabra elvégzett számítás végeredményeként megkapjuk az egész csőre vonatkozó bemeneti impedanciát.

3.1.2 Fali veszteségek

A bemeneti impedancia tényleges számítása előtt érdemes figyelembe venni még a fali veszteségeket. A fali veszteségek két fő komponensből tevődnek össze. Egyrészt

viszkózus veszteség, aminek oka, hogy a csőben haladó levegő súrlódik a cső falával, így a fal közvetlen közelében a részecskesebesség a kisebb, mint a cső többi részén. Másrészt termikus veszteség, mert az állandó hőmérsékletű csőfallal hőcsere történik, és ez veszteségként jelenik meg [10].

A kétféle veszteség figyelembe vehető egy módosított hullámszámmal k' -vel, melyet az alábbi módon definiálunk.

$$k' = k - j\alpha \quad (2)$$

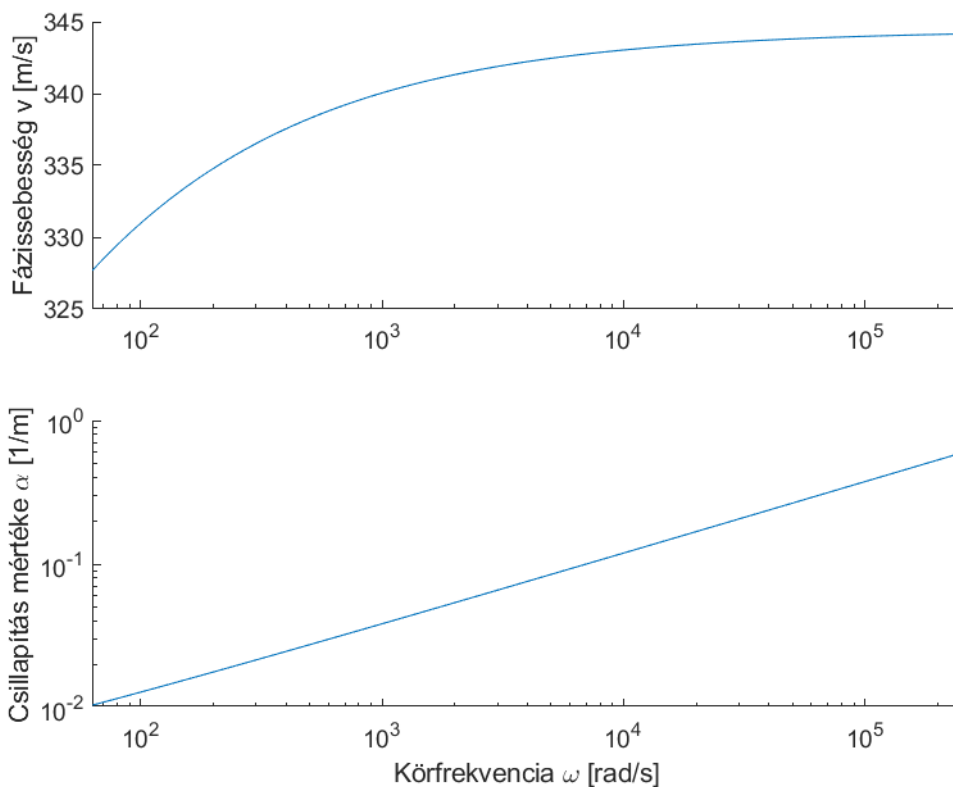
$$v = \frac{\omega}{\operatorname{Re}\{k'\}} \quad (3)$$

$$\alpha = -\operatorname{Im}\{k'\} \quad (4)$$

Az α mennyiség a csillapítási tényező, amely arányos a frekvencia gyökével és fordítottan arányos a cső sugarával, de függ a hőmérséklettől is, v pedig a hullám fázissebessége. A nyomáshullám terjedését leíró egyenletébe beírva a módosított hullámszámot látszik, hogy a fali veszteségek a hullámterjedésben egy exponenciális csillapító tagként jelennek meg.

$$p(x, t) = P_0 e^{-j(k-j\alpha)x} e^{j\omega t} = P_0 e^{-\alpha x} e^{-jkx} e^{j\omega t} \quad (5)$$

Tekintve, hogy k' valós része is frekvenciafüggő, ezért a hullámszám alapján számolt sebesség is frekvenciafüggő lesz. A sebesség és a csillapítási tényező értékét a frekvencia függvényében a 2. ábra mutatja, $T = 22^\circ\text{C}$ hőmérséklet mellett egy $r = 10$ mm állandó sugarú csőben.



2. ábra: A sebesség és a csillapítási tényező értékei frekvencia szerint

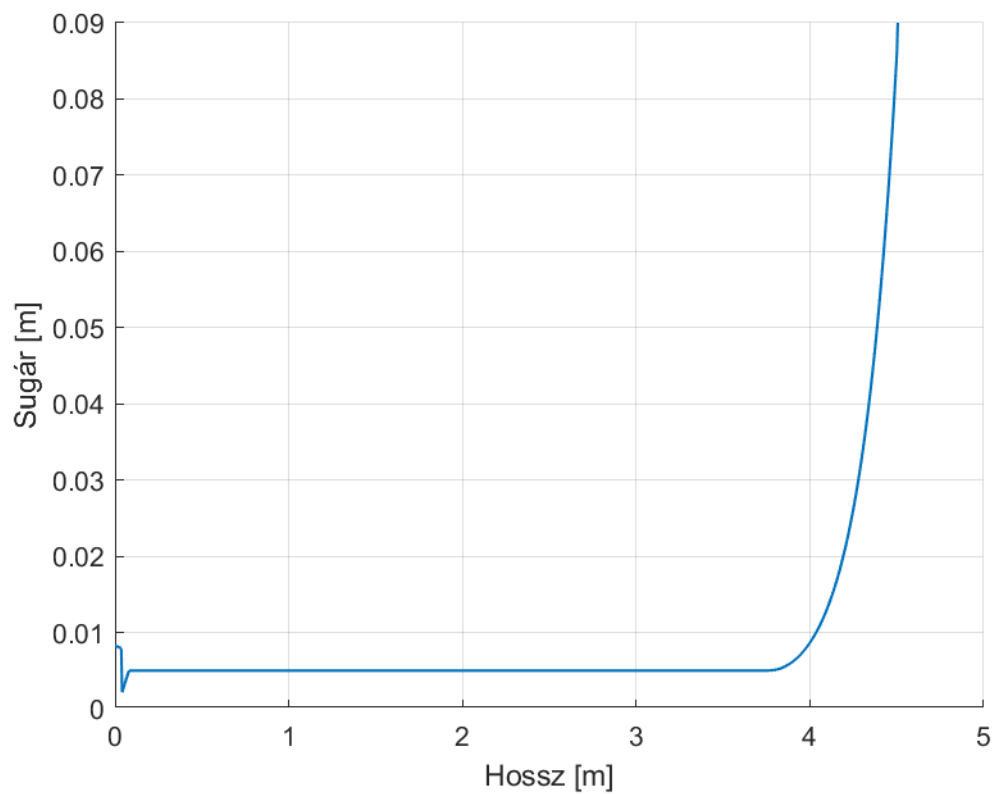
3.1.3 Bemeneti impedancia

A távvezeték analógia és a falis veszteségek tárgyalása után belefoghatunk a bemeneti impedancia számításába. A számításhoz egy szimpla egyenes cső, valamint több konkrét rézfúvós hangszer geometriáját is implementáltam. Név szerint egy trombita, egy kürt és egy harsona geometriáról van szó.

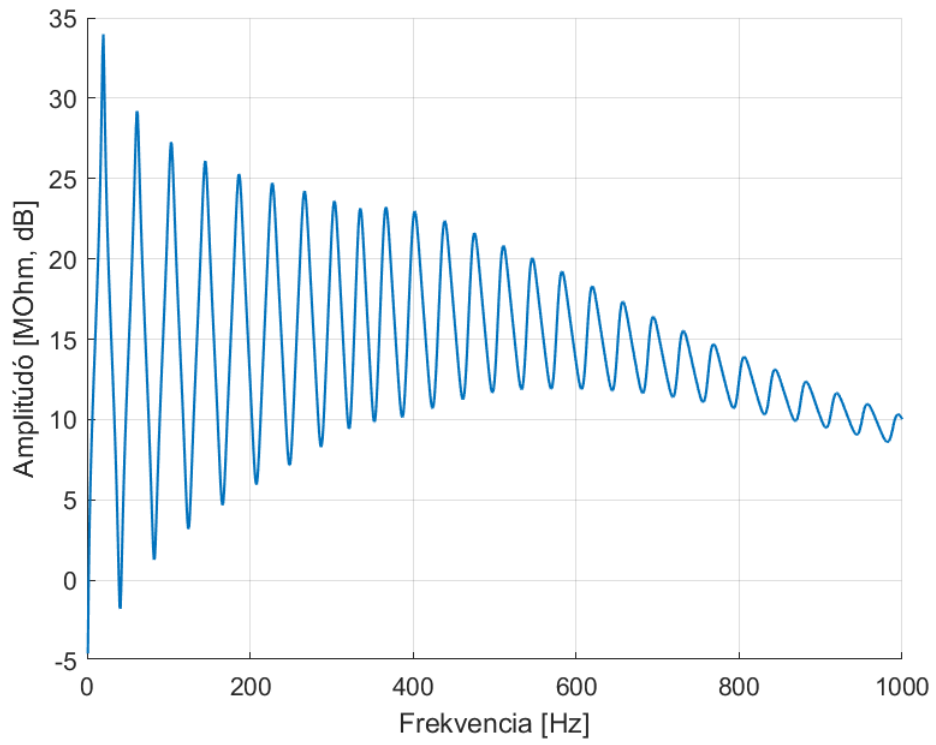
A három hangszer geometriáját hasonló megközelítéssel, négy különböző csőszakaszt használva alkottam meg. Mind a három hangszer tölcéses végén cosh függvényt használtam, mely katenoid kürtöt ír le [11]. Középen az állandó keresztmetszetű résznél konstans függvényt vettem. A fúvókánál a keresztmetszet először lineárisan összeszűkül, majd gyökfüggvény szerint kitágul. A három eltérő hangszergeometriát ebből a négy különböző függvényből komponáltam meg. A hangszerek méretei természetesen eltérőek és a függvényeket is más-más arányban használtam a hangszerek teljes csőhosszához képest. A térbeli felbontás mindegyik esetben az adott hangszer L hosszúsága, valamint $N = 1000$ paraméter mellett $dL = L/N$. A modell az ilyen dL hosszú egyenes csőszakaszokból épül fel. A számítás során a

sugárzási impedancia értékét zérusnak vettem, ami annyira nem áll távol a valóságtól. A tapasztalat azt mutatja, hogy a sugárzási impedancia hatása csupán magas frekvencián számottevő.

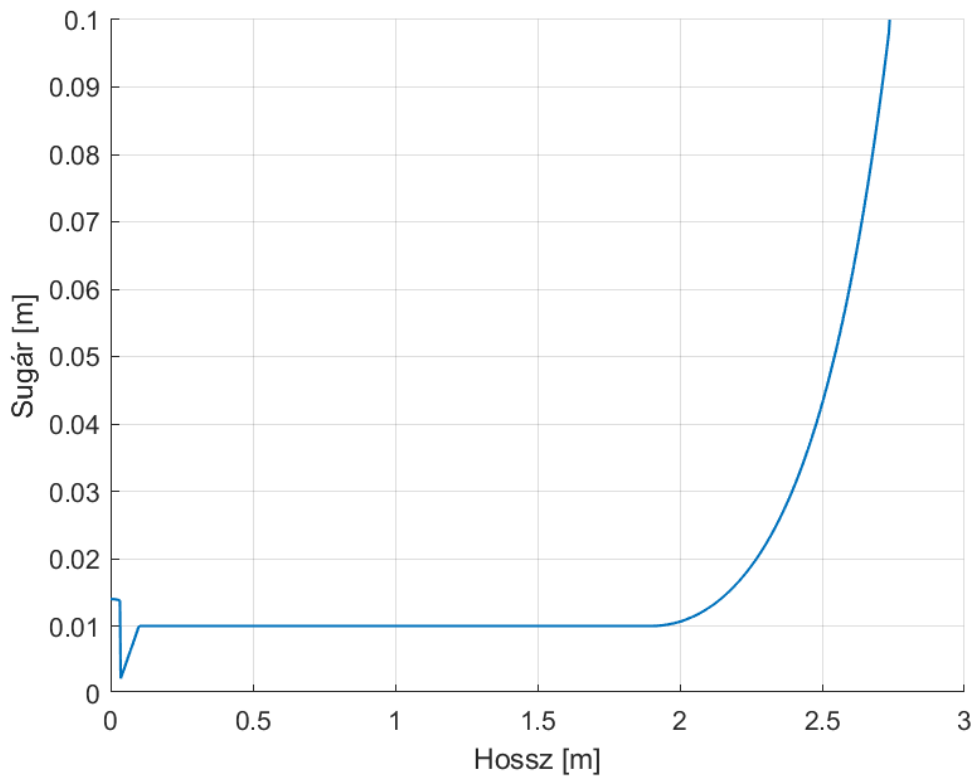
A korábban ismertetett módon számoljuk a bemeneti impedanciát. A 3-8 ábrák a különböző hangszergeometriákat mutatják, vagyis a cső sugarát a hossz függvényében, valamint a hangszerek bemeneti impedanciáját a frekvencia szerint.



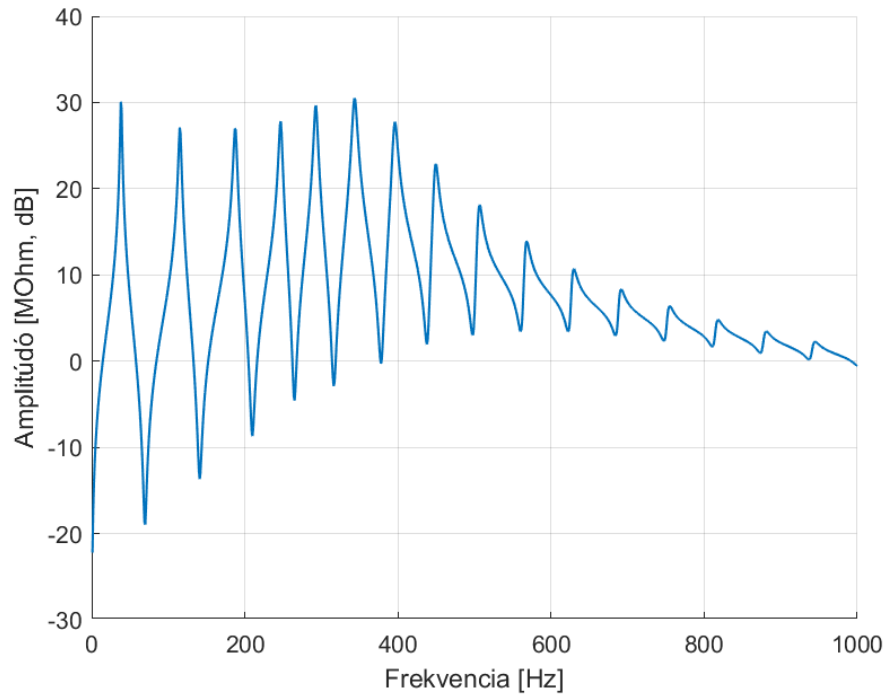
3. ábra: Kürt geometriája



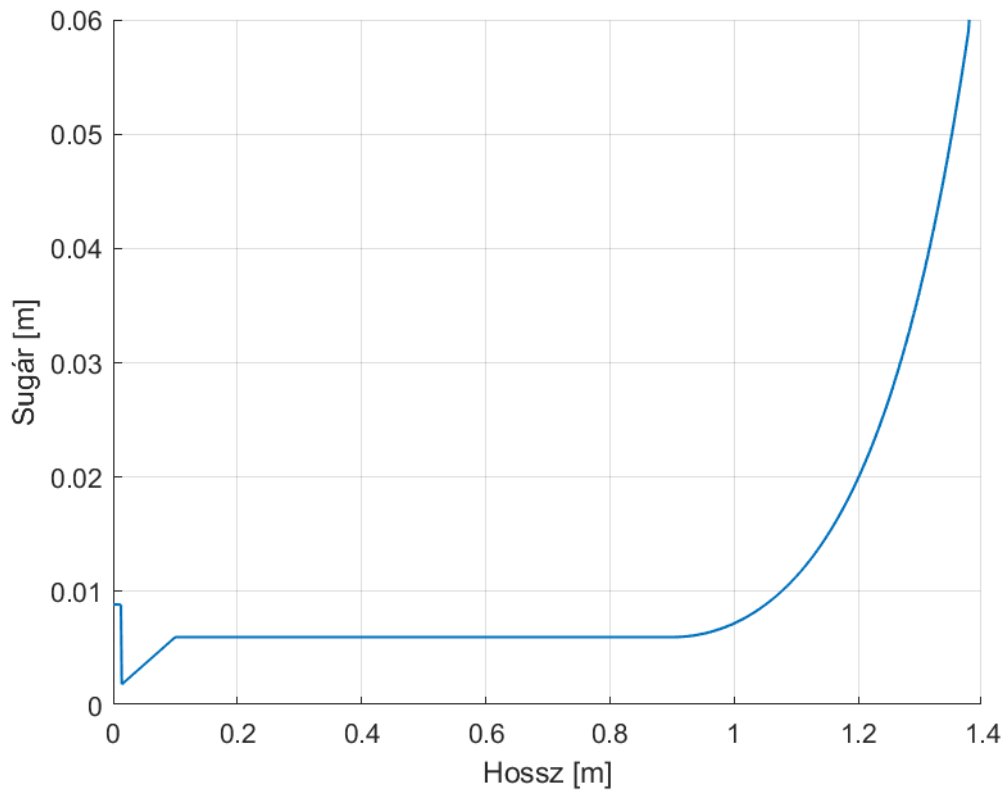
4. ábra: Kürt bemeneti impedanciája



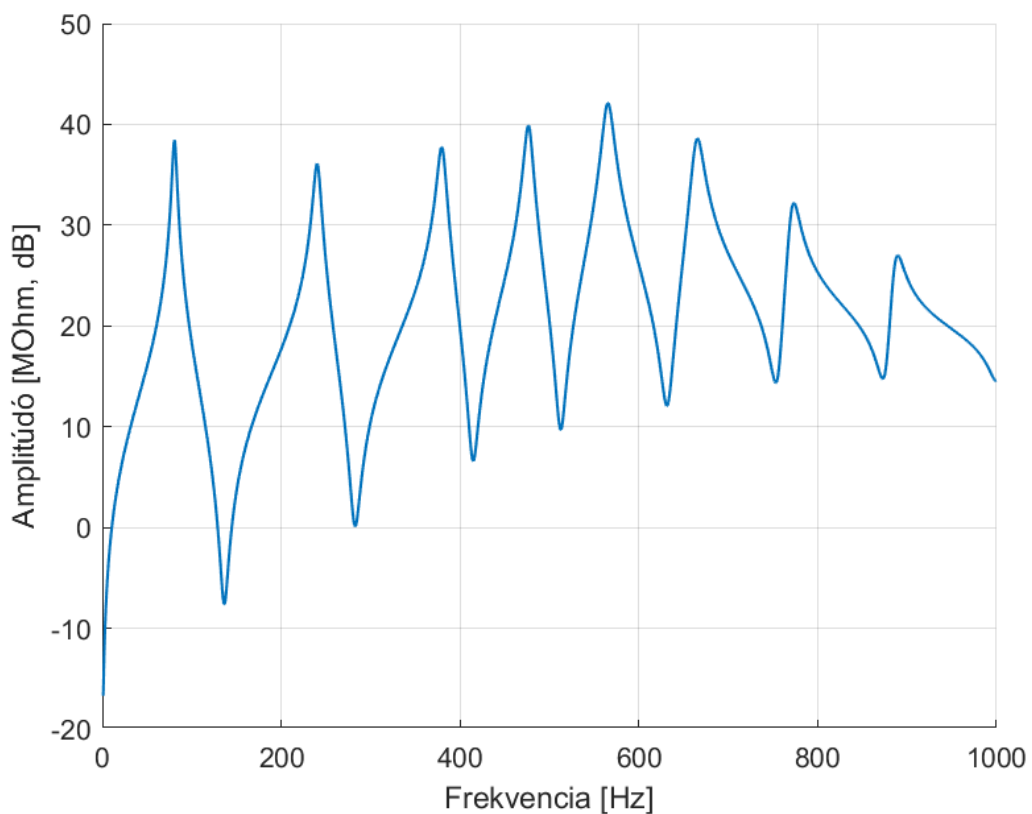
5. ábra: Harsona geometriája



6. ábra: Harsona bemeneti impedanciája



7. ábra: Trombita geometriája



8. ábra: Trombita bemeneti impedanciája

A kialakuló első módus zeneileg értelmetlen. A második móduson lesz az alaphang, majd az impedanciacsúcsok a harmonikus felhangsört követik, a 2:3:4:5: ... arányokkal. Tehát amennyiben az alaphang frekvenciája $2f_0$, akkor a felhangok $3f_0$, $4f_0$, $5f_0$ stb. szabály szerint követik egymást. A fal veszteségek hatása az impedanciacsúcsok lekerekedésében és a későbbi csúcsok ellaposodásában jelentkezik. Az eredményeimet a következő 1-3. táblázatokban is összefoglaltam:

1. táblázat: Kürt bemeneti impedanciacsúcsai

f [Hz]	Erősítés [MΩ, dB]	f [Hz] ([2] forrás eredményei)
20	33.99	23.2
61	29.2	64.8
103	27.27	103.7
145	26.1	144.7
186	25.27	181.9
227	24.73	220.3
267	24.22	256.2

2. táblázat: Harsona bementi impedanciacsúcsai

f [Hz]	Erősítés [MΩ, dB]	f [Hz] ([2] forrás eredményei)
38	30.09	38.3
115	27.11	113.2
187	26.99	174
247	27.82	233.2
293	29.67	296
343	30.5	350.9
396	27.75	410.1

3. táblázat: Trombita bementi impedanciacsúcsai

f [Hz]	Erősítés [M Ω m, dB]	f [Hz] ([2] forrás eredményei)
81	38.45	83.5
240	36.12	234.2
379	37.72	353.1
476	39.89	469.1
566	42.1	591.6
665	38.59	702.7
774	32.18	812.5

Az implementált hangszer geometriák alapjául a [2]S. Bilbao – J. Chick: Finite difference time domain simulation for the brass instrument bore, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **134**, No. 5 (2013), p. 3860-3871, PACS 43.75.Fg[JW], <http://dx.doi.org/10.1121/1.4822479> forrás szolgált, ezért a bemeneti impedancia eredményeimet is összehasonlítottam a cikkben találhatóakkal. A forrásban sajnos csak a mért frekvenciaértékek kapnak pontos említést, a különböző frekvencián mért erősítés értékek nincsenek számszerűsítve, így azokkal nem tudtam összehasonlítani az én eredményeimet. A frekvencia értékek azonban egészen jó fedést mutatnak. A nagyobb eltérések oka, hogy csak közelítőleg ugyanazt a geometriát használtuk a számolásnál. Sajnos a forrás nem említi a pontos geometriai méreteket, így csupán a geometriát ábrázoló grafikonról tudtam leolvasni a közelítőleges paramétereket.

3.2 Nemlineáris hullámterjedés: Menguy-Gilbert-modell

A hullámterjedés modellezéséhez egy olyan modellt kerestem, ami figyelembe veszi a fal veszteségeit, a változó keresztmetszetet és a nemlineáris hullámterjedést is

tartalmazza. A nemlinearitás kulcsfontosságú, mert a kutatások szerint ez nagy hatással van a rézfúvós hangszerek sajátos hangzására [12]. Így esett a választás a Menguy-Gilbert-modellre [16], amely időtartományban értelmezendő és a fentemlített jelenségeket mind tartalmazza. A modell tömeg-, lendület- és energiamegmaradásból indul ki, majd munkaponti sorfejtéssel a másodrendű tagokat még megtartja. A vizsgált hullámteret leegyszerűsíti és csupán kimenő (+ irányba terjedő) és beérkező (- irányba terjedő) hullámokat tárgyal, amik egymással nem lépnek kölcsönhatásba. A modell bár egy egydimenziós egyenletre vezet, de tartalmazza a fallal való kölcsönhatást a hullámfrontok keresztmetszeti átlagolásának segítségével. A modellt leíró egyenlet a következő:

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\pm a u^\pm + b \frac{(u^\pm)^2}{2} \right) \pm \frac{a}{s} \frac{dS}{dx} u^\pm = \pm c \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \frac{\partial u^\pm}{\partial x} + d \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} \quad (6)$$

A kék rész az a együtthatóval a lineáris hullámterjedést reprezentálja. A piros rész a b együtthatóval a nemlineáris hullámterjedésért, a fekete tag a változó keresztmetszetért felel. A lila rész a c együtthatóval a fali veszteség, a zöld rész a d együtthatóval a különböző egyéb belső veszteségek. A modell azt feltételezi, hogy a csőben síkhullámok terjednek, melyek a terjedés során egymástól függetlenek. A pozitív és negatív irányba terjedő u^\pm sebesség-hullámokat a cső végén történő reflexió, illetve a gerjesztés hatása kapcsolja össze.

A fali veszteséget leíró tagnál megjelenik egy $-1/2$ -es derivált tag. Ennek a kifejtése konvolúcióhoz vezet. Konvolúcióhoz a változók időtörténetét azonban el kellene tároljuk, melynek következtében eggyel növekedne a probléma dimenziója és még jobban számításigényessé tenné a folyamatot. Az $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}$ operátor egy $w(t)$ kauzális függvényre az alábbi módon definiálható:

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}} * w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} w(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} (\omega) = \frac{1}{\sqrt{j\omega}} = \chi(\omega) \quad (8)$$

Annak érdekében, hogy a konvolúciót elkerüljük, segédváltozókat vezetünk be, és numerikus kvadrátúra szabállyal (súlyok, alappontok) közelítjük az integrál értékét. A frekvenciatartományban felírt alakból látható, hogy a $\frac{1}{2}$ -es derivált megjelenése a fali veszteségeknek a frekvencia gyökével fordítottan arányos függése a felelős. Ez a függés vonja maga után a k hullámszám, a v sebesség és az α veszteségi tényező frekvenciafüggését.

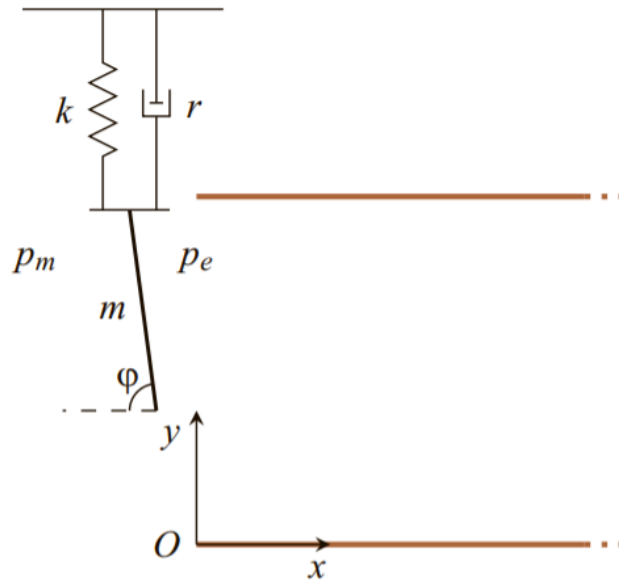
3.3 A gerjesztés modellezése

A játékos ajkait egy mechanikai oszcillátorként értelmezzük, amely a rezonátor bemenetéhez csatlakozik. Az itt ismertetett rendszerben csak a játékos felső ajkát modellezzük és annak csupán a függőleges elmozdulását vesszük figyelembe. A statikus alsó ajak és a modellezett felső ajak interakciójától eltekintünk, ezek semmilyen kölcsönhatásba nem lépnek egymással. A vonatkozó szakirodalomban léteznek bonyolultabb modellek is, itt azonban erre az egyszerűsített modellre szorítkozom [19].

A felső ajkat egy vékony, merev téglalapként értelmezzük, amely h magas és l széles, valamint φ szöget zár be az x-tengellyel. Így a felső ajak vertikális felülete:

$$A = h l \sin\varphi \quad (9)$$

Az m tömegű felső ajak fölé egy rugó (k rugóállandó) és egy csillapítás (r együttható) van felfüggesztve, melyek az ajak merevségét és csillapítását reprezentálják. A játékos szájában a nyomás p_m , a rezonátor bemeneténél p_e . A gerjesztés fizikai modelljét a 9. ábra mutatja.



9. ábra: A gerjesztés fizikai modellje

A rezonátor bemeneténél mérhető p_e nyomás a csőben odafelé terjedő nyomáshullám és a visszavert nyomáshullám szuperpozíciója.

$$p_e = p_e^+ + p_e^- \quad (10)$$

Az m tömegű ajakra ható erők kifejezésével felírható az ajak mozgása differenciálegyenletként (mozgásegyenlet).

$$m \ddot{u} = F - ku - r\dot{u} \quad (11)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldásához a Newmark időlépéses sémát fogom alkalmazni, melyet részletesen tárgyalok a következő fejezetben.

3.3.1 Az ajakra ható erő számítása

A (11) egyenletben látható ajakra ható F erő az úgynevezett aeroakusztikus erő, és a (12) egyenlet szerint definiálandó, vagyis az ajakra ható erők eredőjét a szájüregben és a rezonátorban uralkodó nyomások különbsége adja.

$$F = A(p_m - p_e) \quad (12)$$

Az A értéke számítható a (9) összefüggés alapján, a $p_m(t)$ a játékos szájában lévő nyomás, ami a modellünk bemeneti paramétereként szolgál, tehát ismert az idő függvényében. Az erő számításához a p_e értékét kell meghatároznunk.

Feltételezzük, hogy a játékos ajkai közt átpréselt levegőfolyam jóval gyorsabban épül fel, mint a rezgés egy periódusa, a levegő összenyomhatatlan és a viszkozitás elhanyagolható a játékos szájában és az ajkak között. Következésképpen, érvényesek a Bernoulli- és a tömegmegmaradás egyenletei. A Bernoulli-egyenlet megadja, hogy ha veszünk két eltérő nyomású térrészt (esetünkben p_m és p_e), és biztosítjuk a levegő útját a két térrész között, akkor a levegő mekkora sebességgel fog megindulni egyik térrészből a másik felé, annak érdekében, hogy a nyomás kiegyenlítődjék. A törvényt matematikailag megfogalmazható a (13) egyenlet szerint.

$$v = \sqrt{\frac{2(p_m - p_e)}{\rho_0}} \quad (13)$$

Figyelembe vesszük továbbá, hogy amennyiben teljes reflexióról beszélünk, abban az esetben a kifelé menő p_e^+ megegyezik a beérkező p_e^- értékével, tehát a (14) egyenlet érvényes.

$$p_e = p_e^+ + p_e^- = 2 p_e^- \quad (14)$$

A Bernoulli-törvényt, a teljes reflexiónál érvényes (14) egyenletet és a nyomás (15) definícióját felhasználva meghatározható p_e értéke (16).

$$p = \frac{\rho c U}{S} = Z U \quad (15)$$

$$p_e = \begin{cases} 2p_e^- - \frac{\xi}{2} \Psi y (\Psi y - \sqrt{\Psi^2 y^2 + 4 |p_m - 2p_e^-|}) & , \quad \text{ha } y > 0 \\ 2p_e^- & , \quad \text{ha } y \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

Az egyenlet jobb átláthatóságának érdekében bevezetett változók definíciója a (17) és (18) egyenletben látható, ahol Z_c a (20) egyenlet szerint van definiálva, $S(0)$ pedig a légoszlop bemeneti keresztmetszete.

$$\xi = \text{sgn}(p_m - p_e) = \text{sgn}(p_m - 2p_e^-) \quad (17)$$

$$\Psi = l Z_c \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} = l \sqrt{2\rho_0} \frac{c}{S(0)} \quad (18)$$

$$Z_c = \frac{\rho_0 c}{S} \quad (19)$$

A p_e meghatározása után a (12) egyenlet alapján számítható az ajakra ható erő.

4 Numerikus megoldás

4.1 Konvolúció helyettesítése kvadraturával

A 3.2 fejezetben ismertettem a hullámterjedéshez használt Menguy-Gilbert-modell alapfeltevéseit és az ebből következő matematikai problémát. Adott a modell egyenlete (6), aminek bal oldala jellegét tekintve nagyon hasonlít egy hullámegyenlethez, a jobb oldala reprezentálja a fal- és egyéb belső veszteségeket. Azt már tudjuk, hogy a fal- veszteségek miatt jelenik meg a terjedési sebesség frekvenciafüggése. Az ezt leíró speciális operátort definiáltam a (7) egyenletben és Fourier-transzformáció segítségével megadtam az értékét a frekvencia tartományban a (8) egyenletben.

A célunk a konvolúció nélkülsége, hogy elkerüljük a különböző változók időtörténetének eltárolását, ezért egy alternatív megközelítést használunk fel a $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t)$ összefüggés értelmezésére.

A megközelítés lényege, hogy ahelyett, hogy egy függvényről tárolnánk el sok mintát, inkább több különböző függvényt használunk. Így a (7) képlet idő szerinti integrálját át tudjuk írni egy úgynevezett $\varphi(t, \theta)$ függvény θ szerinti integráljára (20), ahol a $\varphi(t, \theta)$ függvény a (21) egyenlet szerint definiálandó és kielégíti a (22) feltételeket.

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) = \int_0^\infty \varphi(t, \theta) d\theta \quad (20)$$

$$\varphi(t, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-(t-\tau)\theta^2} w(\tau) d\tau \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\theta^2 \varphi + \frac{2}{\pi} w \\ \varphi(0, \theta) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

4.1.1 Kvadratura-szabály

A (20) egyenletben szereplő integrált numerikusan közelítjük, melyhez a kvadratura-szabályt használjuk fel. A kvadratura-szabály általános definícióját egy $f(x)$ függvényre a (23) összefüggés írja le.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (23)$$

Az ilyen fajta integrálközelítéssel hiba nélkül integrálhatók a legfeljebb $2N - 1$ rendű polinomok. Lényege, hogy kiszámítunk alappontokat a határozott intervallumon belül, az integrálandó függvény jellegétől függően. Minden x_i alapponthoz meghatározunk egy w_i súlyt. Ezek megválasztása szintén az adott formulától függ. A kvadratura közelítés tehát a képlet szerint, az alappontokon felvett függvényértékek w_i szerint súlyozott összege.

A (20) egyenlet integráljának kvadratura-szabály szerinti közelítése a (24) összefüggésben látható, ahol L darab alappontunk van, μ_l a kvadratura súly és θ_l a konkrét alappont. Ennek a három paraméternek a megválasztása kulcsfontosságú a közelítés pontosságára nézve.

$$\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} w(t) \cong \sum_{l=1}^L \mu_l \varphi(t, \theta_l) = \sum_{l=1}^L \mu_l \varphi_l(t) \quad (24)$$

A módszer alkalmazása során az L darab különböző φ_l segédfüggvényt fogjuk használni, ahelyett, hogy a teljes időtörténetet eltárolnánk.

4.1.2 Gauss-Jacobi kvadratura

A megközelítés matematikáját részletesen tárgyalja a [3] forrás, én a levezetést nélkülözöm, csupán a (25) képletben látható eredményt használom fel. Esetünkben az $\alpha = 1/2$ eset áll fenn.

$$(j\omega)^\alpha = 2 (-1)^{[\alpha]} \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(j\omega)^{[\alpha]}}{j\omega + p^2} p^{\bar{\alpha}} dp, \quad (25)$$

ahol $\bar{\alpha} = 2\alpha - 2[\alpha] + 1$.

A súlyok és alappontok megválasztása sokféle megközelítés szerint történhet. Polinomok esetén az ideális alappontokat a Gauss-Legendre kvadratúra adja. A Gauss-Jacobi kvadratúra ennek egy módosított változata, melyben egy rögzített alakú, előre ismert súlyfüggvénnyel szorozzuk az integrálandó függvényt. A Gauss-Jacobi kvadratúra az alábbi alakú integrált közelíti.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (1-x)^\alpha (1+x)^\beta g(x) dx = \sum_{i=1}^N w'_i g(x'_i), \quad (26)$$

ahol az előre nem definiált függvényünk a $g(x)$.

A következőkben egy helyettesítést vezetünk be annak érdekében, hogy a (25) egyenlet $[0, \infty]$ integrálját határozott integrálként kezelhessük.

$$p = \frac{(1-\bar{q})^2}{(1+\bar{q})^2}, \quad \bar{q} = \frac{1-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}, \quad \frac{dp}{d\bar{q}} = -4 \frac{(1-\bar{q})}{(1+\bar{q})^3} \quad (27)$$

A fenti helyettesítéseket alkalmazva a (25) egyenlet integrálja átírható a (28) szerint.

$$\int_0^\infty \frac{p^{\bar{\alpha}}}{j\omega + p^2} dp = 4 \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\bar{q})^{2\bar{\alpha}+1} (1+\bar{q})^{-(2\bar{\alpha}-1)}}{(1+\bar{q})^4 \left(j\omega + \frac{(1-\bar{q})^4}{(1+\bar{q})^4}\right)} d\bar{q} \quad (28)$$

A Gauss-Jacobi kvadratúra szabályt (26) az $(1-\bar{q})^{\bar{\gamma}} (1+\bar{q})^{\bar{\beta}}$ súlyfüggvénnyel számítjuk, ahol $\bar{\gamma} = 2\bar{\alpha} + 1$ és $\bar{\beta} = -(2\bar{\alpha} - 1)$.

Ily módon a kvadratúra felhasználható a (25) egyenlet integráljának közelítésére az alábbi módon, ahol $\bar{\lambda}_j$ reprezentálja a súlyt és \bar{q}_j az alappontot.

$$\int_0^\infty \frac{p^{\bar{\alpha}}}{j\omega + p^2} dp = \sum_{j=1}^L \frac{4\bar{\lambda}_j (1+\bar{q}_j)^{-4}}{j\omega + \left(\frac{(1-\bar{q}_j)}{(1+\bar{q}_j)}\right)^4} \quad (29)$$

A (6) egyenletben található $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}$ formula ezek alapján helyettesíthető a (24) egyenletben ismertett közelítés szerint, feltéve, hogy a $\varphi(t, \theta)$ függvény kielégíti a (22)-ben szereplő differenciálegyenleteket.

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\pm a u^\pm + b \frac{(u^\pm)^2}{2} \right) \pm \frac{a}{s} \frac{ds}{dx} u^\pm = \pm c \sum_{l=1}^L \mu_l \varphi_l + d \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} \quad (30)$$

A (6) egyenlet Fourier-transzformációja vezetett a (8) egyenlet által leírt $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}$ frekvenciatartománybeli meghatározásához. Tekintve, hogy a (30) egyenlet gyakorlatilag a (6) egyenlet csak közelítéssel élve, ezért ennek Fourier-transzformációjával egy közelítést kaphatunk a $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}$ frekvenciatartománybeli értékére.

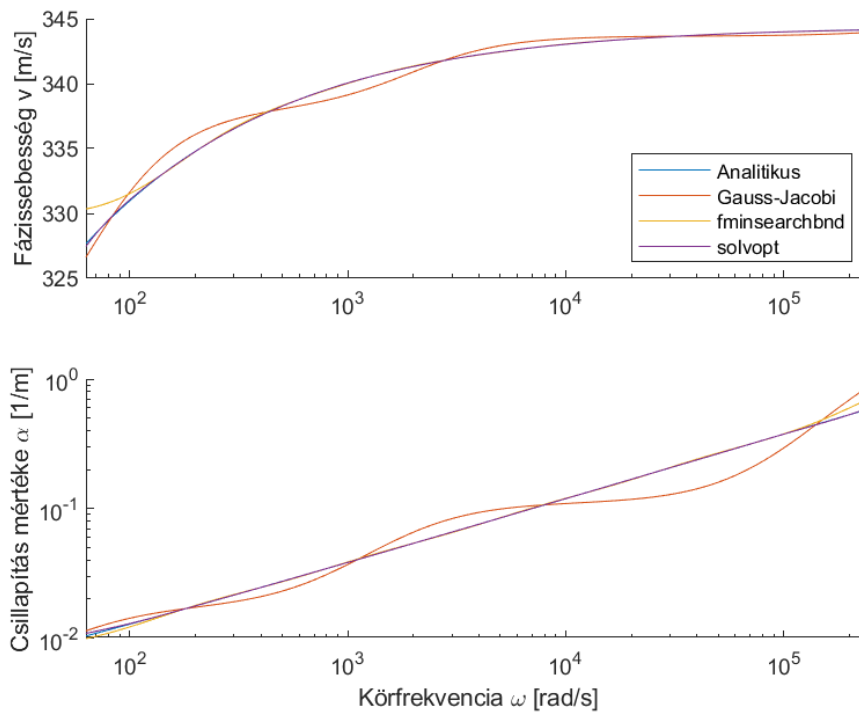
$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^L \frac{\mu_l}{\theta_l^2 + j\omega} \quad (31)$$

A (8) képletben ismertett analitikus $\chi(\omega)$ értékből számolhatunk k hullámszámot, amelyből a v sebesség értéke meghatározható. Ugyanez megtehető $\tilde{\chi}(\omega)$ alapján is. Célunk, hogy a kvadratúra közelítés paramétereit jól megválasztva az analitikus sebesség értékhez minél közelebbi értéket kapjunk. Ehhez az optimalizálandó költség függvény a (32).

$$\zeta(\{(\mu_l, \theta_l)\}_l; L, K) = \sum_{k=1}^K \left| \frac{\tilde{\chi}(\omega_k)}{\chi(\omega_k)} - 1 \right|^2 = \sum_{k=1}^K \left| \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^L \mu_l \frac{(j\omega_k)^{1/2}}{\theta_l^2 + j\omega_k} - 1 \right|^2 \quad (32)$$

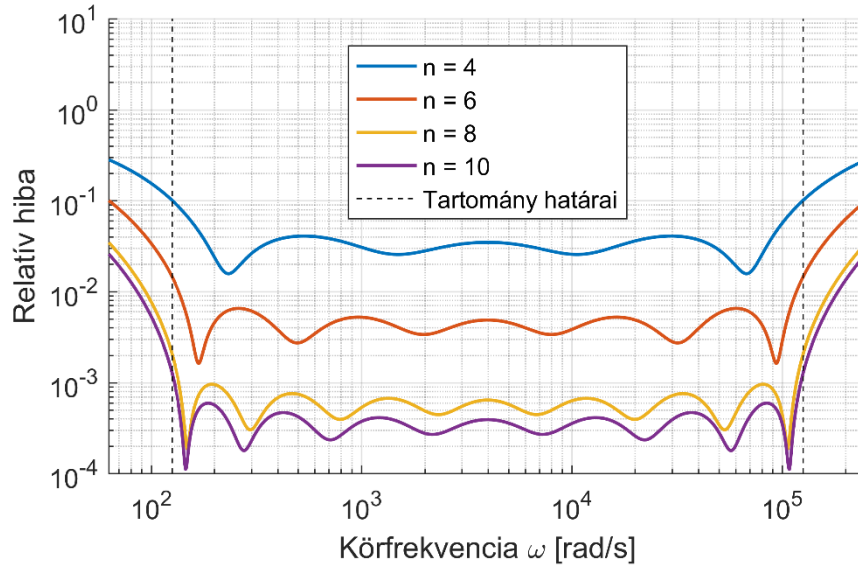
Az optimalizálás eredményét a 10. ábra mutatja egy $r = 10$ mm sugarú állandó keresztmetszetű Jól összehasonlítható az analitikus sebességérték, valamint a Gauss-Jacobi kvadratúra és az optimalizált kvadratúrák, `fminsearchbnd` és `solvopt` optimalizációs eljárások segítségével számolt sebességek értéke. Az `fminsearchbnd` a költségfüggvény értékét minimalizálja, betartva a változókra megadott tartománykorlátokat, a `solvopt` pedig az optimalizálásban további kényszereket is képes figyelembe venni. Az ábráról szemmel is jól leolvasható, hogy az eredeti Gauss-Jacobi kvadratúrával elért közelítés az alappontok és súlyok optimalizálásával jelentősen

javítható. Az is megfigyelhető, hogy a legjobb eredményt a solvopt megoldása adja, amely szinte tökéletes fedésben van az analitikus értékekkel.



10. ábra: A sebesség és a csillapítási tényező értékei frekvencia szerint

Az itt ábrázolt eredményeket $n = 8$ fokszámú kvadratúra közelítéssel értem el. A 11. ábra jól mutatja, hogy ekkora rendű közelítés már kiváló eredményt ad, és a fokszám további növelése már nem adna szignifikánsan jobb eredményt. A grafikon a különböző fokszámú kvadratúra közelítések hibáját mutatja. Az optimalizáláshoz kiválasztott frekvenciatartományt $20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ kHz}$ -nek választottam.



11. ábra: A különböző kvadratúra fokszámok relatív hibái

4.2 Egydimenziós véges térfogat módszer a hullámterjedésre

4.2.1 Lineáris eset

A terjedést leíró eredeti Menguy-Gilbert-modell egyenlet a (6). Először az egydimenziós, lineáris esetet vizsgáljuk az $u(x, t)$ mennyiségre. Lineáris esetről a nemlinearitás együtthatója $b = 0$, eltekintünk a fal- és egyéb belső veszteségektől tehát $c, d = 0$. Állandó keresztmetszetet vizsgálunk, így a változó keresztmetszetet leíró tag, ami a keresztmetszet deriváltjával arányos, szintén kiesik. Ez gyakorlatilag a Menguy-Gilbert-modell legegyszerűbb esete. A térbeli- és időbeli koordináták x és t . A mennyiség terjedését egy állandó a terjedési sebesség írja le, a mozgását pedig a Menguy-Gilbert-modellből kiolvasott parciális differenciálegyenlet, ami esetünkben az alábbi alakot ölti.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

Annak érdekében, hogy a parciális differenciálegyenlettel megjelenő peremérték problémákat numerikusan meg tudjuk oldani, áttérünk diszkrét időre. Az időlépés Δt és az n -edik időlépés értelmezése $t_n = n \Delta t$. Az u mennyiség felsőindexében szereplő érték

azt jelzi, hogy az adott időléptékben értelmezett a függvény. Másodrendű Taylor-sor segítségével kifejezzük u^{n+1} értékét u^n segítségével.

$$u^{n+1} \approx u^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (34)$$

A (33) egyenletet behelyettesítjük (34)-be.

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n - a \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = u^n - a \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \\ &u^n - a \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (35)$$

Először éltünk a behelyettesítéssel, majd felcseréltük a térbeli és az időbeli deriválás sorrendjét, majd miután ezzel újabb behelyettesítésre adódott lehetőség, ismét megtettük. A térbeli koordinátát is diszkrétizáljuk, miszerint $x_i = i \Delta x$, ahol Δx a két szomszédos rácspont közötti távolságot jelenti. A (35) egyenlet térbeli deriváltjai átírhatóak a Lax-Wendroff-séma alapján, amely egy numerikus módszer a parciális differenciálegyenletek megoldására és másodrendű közelítésre pontosan működik térben és időben egyaránt.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} [u_{i+1}^n - u_{i-1}^n] + \frac{a^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n] \quad (36)$$

A (36) egyenlet átláthatóságának javításának érdekében érdemes bevezetni a Lax-Wendroff fluxust, amely az alábbi módon értelmezendő.

$$F_{LW}(i) = au_i + \frac{a}{2}(u_{i+1} - u_i) - a^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_i) \quad (37)$$

Így a (36) egyenlet értelmezése fluxusokkal.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{LW}(i) - F_{LW}(i-1)] \quad (38)$$

4.2.2 Általános eset

A (33) egyenletben bemutatott lineáris parciális differenciálegyenlet formáját szeretnénk továbbvinni, ezért az átláthatóság kedvéért bevezetünk egy úgynevezett $f(u)$ fluxus függvényt. A fluxus függvény $f(u) = au$ a lineáris esetet adja vissza. Az általános esetet leíró differenciálegyenlet ennek segítségével a következőképpen írható.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

Az előző pontban leírtakhoz hasonlóan először itt is u^{n+1} értékét próbáljuk közelíteni u^n értékéből kiindulva egy másodrendű Taylor-sor segítségével.

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n - \Delta t \frac{\partial f(u)}{\partial x} - \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(u)}{\partial x} = u^n - \Delta t \frac{\partial f(u)}{\partial x} - \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \\ &= u^n - \Delta t \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

A jobb oldalon megjelenő $\frac{\partial f}{\partial u}$ kifejezést az f függvény Jacobi-mátrixának nevezik. Vektortérben u a megoldás függvény, $f(u)$ a vektorértékű fluxus függvény és $J = \frac{\partial f}{\partial u}$ a Jacobi-mátrix. A lineáris esetenél tárgyalt lépéshez hasonlóan itt is Lax-Wendroff sémát alkalmazunk a térbeli deriváltak kifejezéséhez.

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)] + \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{1}{\Delta x} \left[J_{i+1/2} \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{\Delta x} - J_{i-1/2} \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Amennyiben élünk az $u_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i\pm 1})$ helyettesítéssel, úgy értelmezhető a Jacobi-mátrixok értéke is.

$$J_{i\pm 1/2} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{i\pm 1/2} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad (42)$$

Fluxusokat tekintve (41) ugyanúgy írható le, mint a (36), azonban a fluxus definíciójához felhasználjuk a Jacobi-mátrixokat.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{LW}(i) - F_{LW}(i-1)] \quad (43)$$

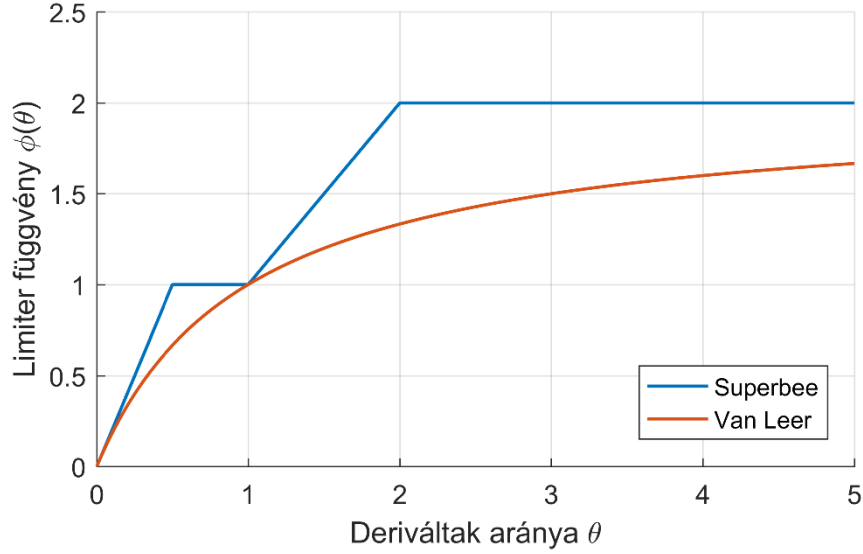
$$F_{LW}(i) = f(u_i) + \frac{1}{2} [f(u_{i+1}) - f(u_i)] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} J_{i+1/2} [f(u_{i+1}) - f(u_i)] \quad (44)$$

4.2.3 Fluxus limiter

Amennyiben a nemlinearitást is figyelembe vesszük a hullámterjedésnél, úgy létrejöhetnek olyan hullámok, például lökéshullám, melyeknél u értéke nagyon hirtelen változik meg. Ilyen esetekben a derivált értékét nagyon nehéz becsülni, és a deriváltak becslésének hibája a numerikus megoldást instabillá teheti, ezért érdemes valamilyen szabály szerint korlátozni a megengedett legnagyobb meredekséget. Meg kell vizsgálnunk, hogy amennyiben két meredekség aránya túl nagy, akkor egy alacsonyabb rendű, durvább közelítést alkalmazunk $\frac{\partial u}{\partial x}$ becslésére. A fluxus limiter pontosan ezt teszi. A deriváltat attól függően becsli, hogy mennyire „sima” az u görbéje. A fluxus limitert egy úgynevezett $\phi(\theta)$ limiter függvény segítségével definiáljuk. A limiter függvény értékészlete $[0,2]$ kell legyen annak érdekében, hogy elnyomja az oszcillációt, és ϕ_i értéke az i -edik pontban mért gradiensek arányán múlik. A gradiensek arányát a θ változó jeleníti meg.

$$\theta_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \quad (45)$$

A gradiensek aránya alapján hangolhatjuk a $\phi(\theta)$ függvény értékét, erre több elterjedt választás is ismert. A 12. ábra bemutatja a Van Leer és Superbee limiter függvényeket. Látható, hogy mindkét függvény értékészlete a $[0, 2]$ tartományba esik.



12. ábra: Superbee és Van Leer limiter függvények

A limitált fluxus a $\phi(\theta)$ függvényt használja és a (46) egyenlet alapján értelmezhető, de szokás a (47) alakban is írni.

$$F_{lim}(i) = f(u_i) + \phi(i) \left\{ \frac{1}{2} [f(u_{i+1}) - f(u_i)] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} J_{i+1/2} [f(u_{i+1}) - f(u_i)] \right\} \quad (46)$$

$$F_{lim}(i) = F_{Upwind}(i) + \phi(i) [F_{LW}(i) - F_{Upwind}(i)] \quad (47)$$

Itt az F_{Upwind} közelítés egy elsőrendű közelítés, ami minden esetben stabil. Így a fluxus limiter segítségével a pontosság rovására javítjuk a numerikus séma stabilitását.

4.3 Newmark időlépéses séma

A 3.3 fejezetben bemutatam a gerjesztés fizikai modelljét. A modellt (11) egyenlet írja le, amely egy differenciálegyenlet. Ennek megoldásához fogjuk a Newmark időlépéses sémát használni [20].

A Newmark módszer matematikai közelítést ad egy időben másodrendű differenciálegyenlet megoldására. A megoldandó egyenlet a fizikai modell mozgásegyenlete (11). A módszer változó időléptéket megenged, alap feltételezése, hogy a változók értékei n időpillanatban ismertek, így a módszer tudja közelíteni a változók

$n + 1$ időpillanatban érvényes értékeit. A séma két kulcsfontosságú paraméterrel dolgozik, ezek β és γ . A paraméterek lineáris súlyozást definiálnak explicit és implicit közelítések között, így segítségükkel finomhangolható a közelítés. A séma esetében tipikus választás szokott lenni a $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, a továbbiakban ezzel a választással élek.

A kiinduláskor ismertek a paraméterek értékei n időpillanatban. Az $n + 1$ időpillanatban y_{n+1} és deriváltjának \dot{y}_{n+1} -nek az értékét a következő összefüggésekkel közelítjük.

$$y_{n+1} = y_n + dt \dot{y}_n + \frac{dt^2}{2} [2\beta \ddot{y}_{n+1} + (1 - 2\beta)\ddot{y}_n] \quad (48)$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + dt [\gamma * \ddot{y}_{n+1} + (1 - \gamma)\ddot{y}_n] \quad (49)$$

A két mennyiség becsült értékét, visszahelyettesítjük a (11) mozgásegyenletbe y_{n+1} és \dot{y}_{n+1} helyére, majd rendezzük az egyenletet, ahogy azt a (50) egyenlet is mutatja.

$$\ddot{y}_{n+1} = \frac{F_{n+1} - k \left(y_n + dt \dot{y}_n + \frac{dt^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{y}_n \right) - r (\dot{y}_n + dt (1 - \gamma) \ddot{y}_n)}{m + k \frac{dt^2}{2} 2\beta + r dt \gamma} \quad (50)$$

A (50) egyenlet megoldásával meghatározott \ddot{y}_{n+1} értékét visszahelyettesítjük a (48), (49) egyenletekbe, így kapva meg a következő időlépéshez tartozó mozgásmennyiségeket.

A (11) mozgásegyenletben, mint minden mozgásegyenletben, erők szerepelnek. A jobb oldal második tagja a fizikai modellben ismertett rugótól származik, a harmadik tag pedig a csillapításhoz köthető. Az ajak egyensúlyi pozícióját egy konstans erő fogja reprezentálni, ezért a mozgásegyenletben ez is szerepelni fog, így a (50) egyenletben is figyelembe kell veyük. A felső ajak, amit modellezünk, ugyanis nem teljesen záródik az alsó ajakhoz nyugalmi helyzetben, van egy minimális rés közöttük, melynek magassága y_{eq} . Ennek a modellezésére egy konstans erőhatást használunk, melyet az F_{eq} erő hivatott reprezentálni és az alábbi módon definiálható.

$$F_{eq} = k y_{eq} \quad (51)$$

5 Eredmények

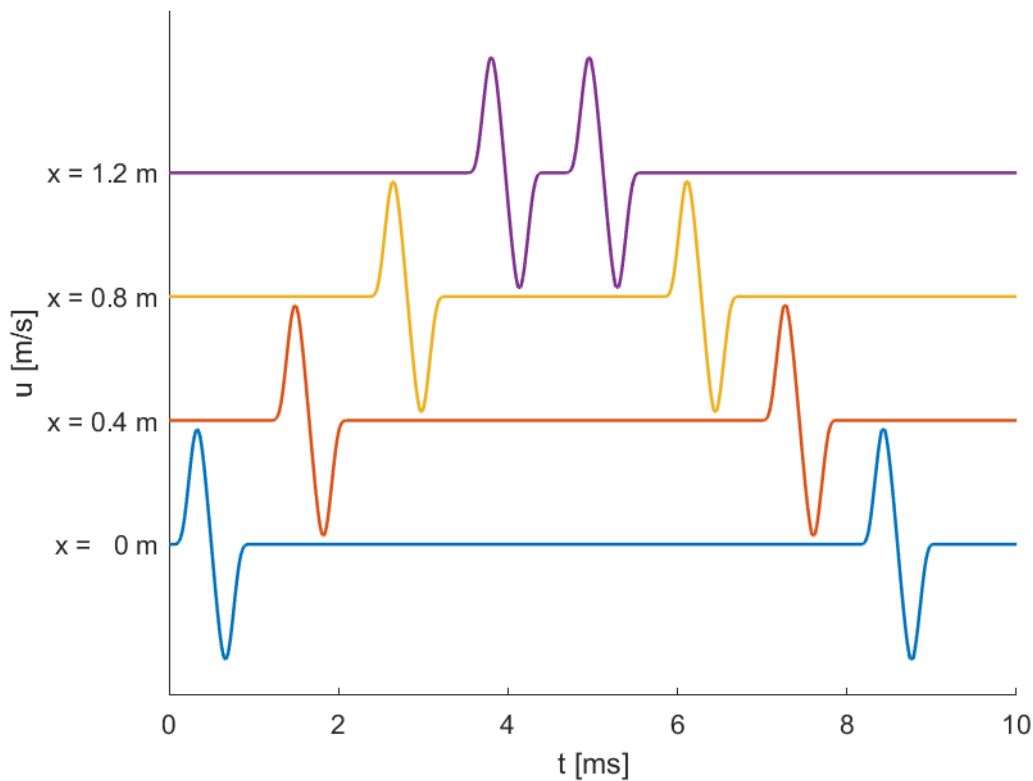
Ebben a fejezetben az eddig tárgyalt modelleket és módszereket alkalmazom a gyakorlatban és kiértékelem az így született eredményeket. Első körben megnézzük a terjedés és a gerjesztés modellek működését külön-külön, majd végül a teljes modellt vizsgáljuk meg működés közben. A fejezetek felépítésénél, a különböző tesztesetek bemutatásánál arra törekszem, hogy a legegyszerűbbtől haladjak az egyre összetettebbek felé, az egyes paraméterek hatását különállóan is bemutatva, hogy jól megértsük, hogy a konkrét paraméter az eredmény milyen aspektusát és hogyan befolyásolja.

5.1 Hullámterjedés tesztelése különböző esetekben

A hullámterjedésnél használt Menguy-Gilbert-modellt vizsgálom működés közben. A modellt a korábban tárgyalt (6) egyenlet írja le, melynek összetevő tagjai a modell különböző aspektusait reprezentálják. Az a együttható a lineáris hullámterjedésért, a b együttható a nemlinearitásért, a c együttható a fal veszteségekéért, a d együttható pedig a különböző egyéb belső veszteségekéért felel. Ezen kívül az egyenlet bal oldalán megjelenő $\frac{dS}{dx}$ tag ábrázolja a változó keresztmetszetet. A tesztesetek vizsgálata során tehát az a , b , c , d paraméterek hangolásával és a keresztmetszet változásának milyenségével fogunk kísérletezni. Minden teszt $T = 24^\circ\text{C}$ hőmérsékleten egy $L = 1.4$ m hosszú csőben került megvalósításra.

5.1.1 Lineáris eset, állandó keresztmetszet

A legegyszerűbb eset, a hullámterjedés lineáris, tehát a értéke a levegőben és az adott hőmérsékleten érvényes hangsebesség, a nemlinearitásért felelő b együttható zérus, valamint eltekintünk a veszteségektől is ($c, d = 0$). A folyamatot egy $R = 7$ mm sugarú állandó keresztmetszetű csőben vizsgáljuk. A 13. ábra ábrázolja a kimenő és a beérkező hullámot az idő függvényében, szemléltetve a függőleges tengelyen az aktuális csőhosszt is.



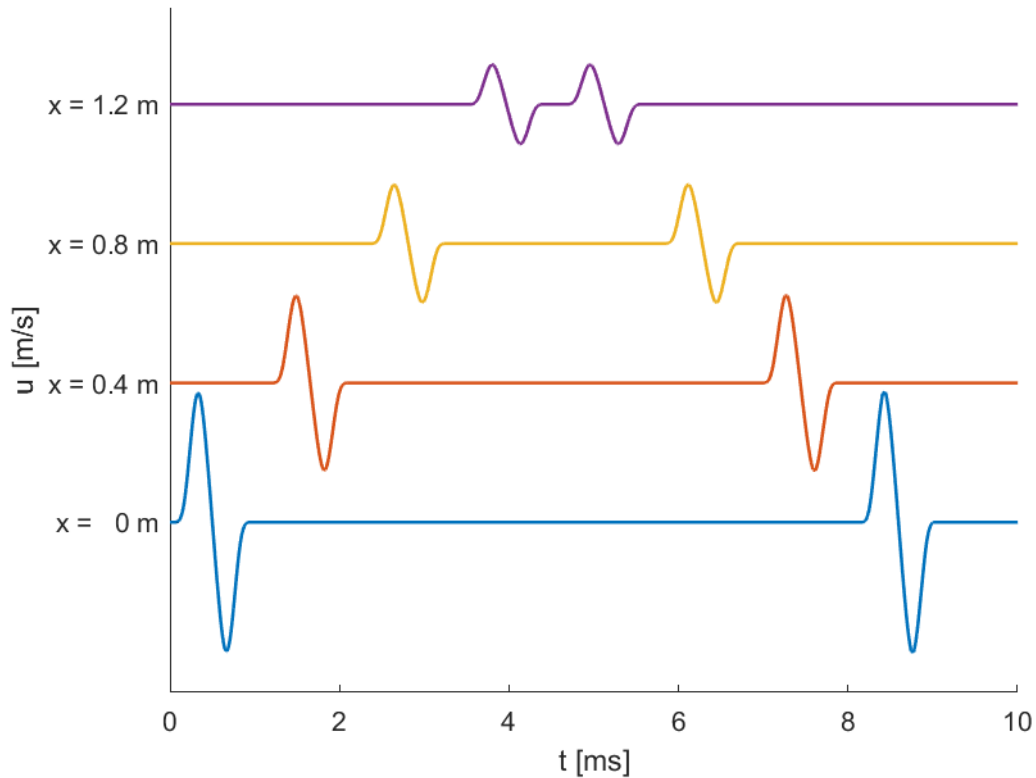
13. ábra: Hullámterjedés lineáris esete állandó csőkeresztmetszet mellett

A grafikonon megfigyelhető, hogy a hullámcsomag megőrizte eredeti alakját, amely a lineáris hullámterjedés kizárólagosságának köszönhető. Továbbá megállapítható, hogy a hullám amplitúdója nem csökkent, állandó maradt, mely az állandó keresztmetszetnek és a veszteségek elhanyagolásának köszönhető. A teszt során a térbeli felbontásunk az $L = 1.4$ méteres cső és $N_x = 1600$ értéke mellett $dx = \frac{L}{N_x}$. Az időbeli felbontásnál fontos megjegyezni, hogy az analitikus értékhez képest akkor kapunk zérus hibát amennyiben $dt = dx/a$ értéket választjuk. Ha ennél kisebb időlépést választunk, a hiba növekszik, nagyobb időlépés esetén pedig a módszer instabillá válik.

5.1.2 Lineáris eset, változó keresztmetszet

A modell paraméterek értékei hasonlóak az előző pontban ismertetett lineáris esetéhez, csupán az állandó keresztmetszeten változtatunk. A $\frac{dS}{dx}$ tag értéke ezúttal nem zérus. A cső hossza változatlan, a már korábban használt $R = 7$ mm sugár ezúttal a cső

keskenyebbik végén áll majd csak fent és exponenciálisan kitágul úgy, hogy a cső végén a sugár éppen a keskeny végén mért kétszerese legyen.

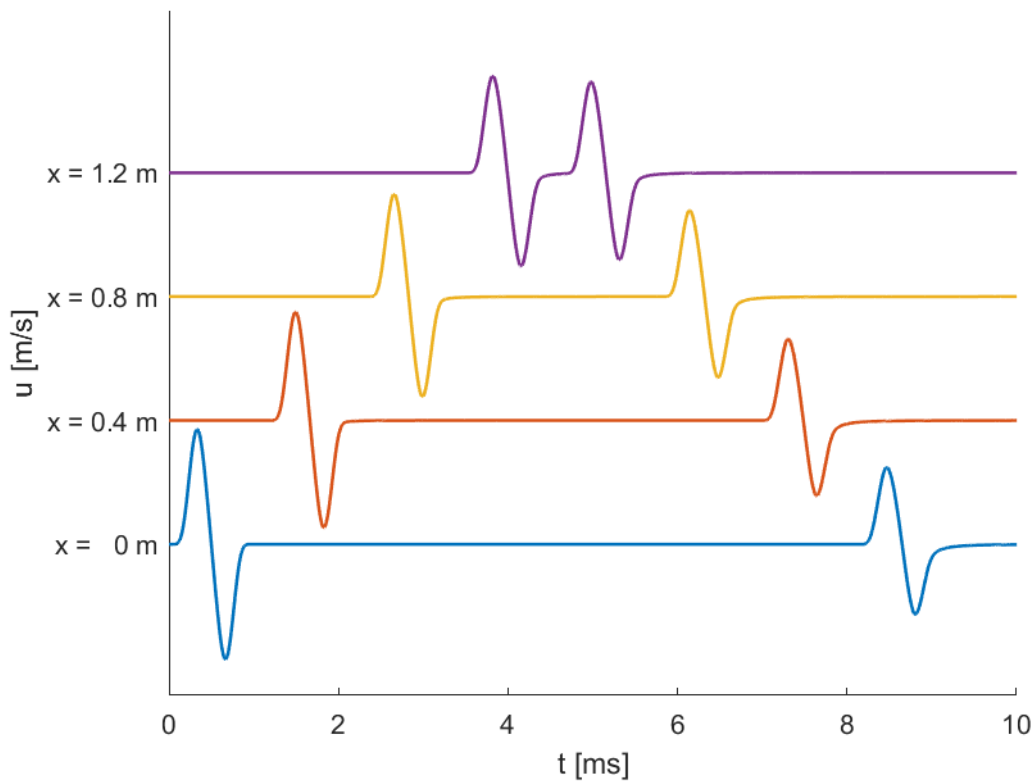


14. ábra: Hullámterjedés lineáris esete táguló csőkeresztmetszet mellett

A szimuláció futása során megfigyelhető, hogy a kimenő hullám amplitúdója csökken, ahogy fokozatosan tágul ki a cső, majd eléri a minimumát a cső legvégén. Itt a hullám visszaverődik, innentől beszélünk beérkező hullámról, és amplitúdója elkezd növekedni ahogy kezd összeszűkülni a keresztmetszet.

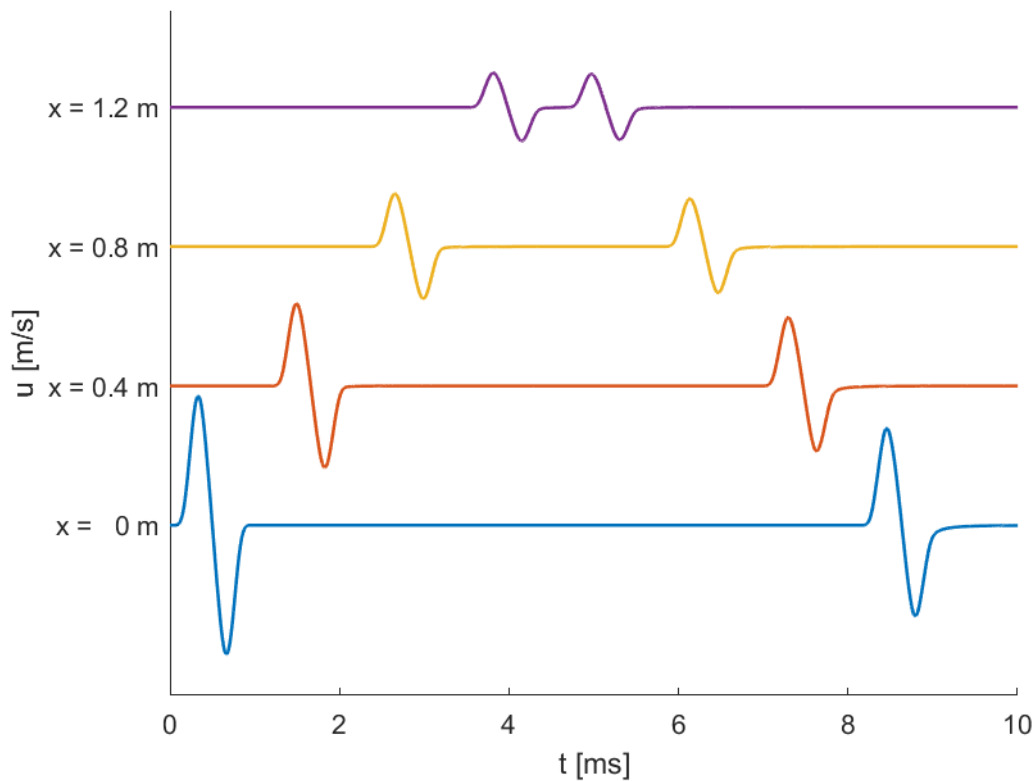
5.1.3 Lineáris eset, fali veszteségek hatása

A hullámterjedésünk továbbra is lineáris, így szeretnénk megvizsgálni a fali veszteségek hatását a hullámalakra. A tesztet elvégezzük az 5.1.1 fejezetben megismert állandó keresztmetszetű csőre és az 5.1.2 fejezetben ismertetett változó keresztmetszetű csőre egyaránt.



15. ábra: Hullámterjedés lineáris esete állandó csőkeresztmetszet mellett fali veszteségekkel

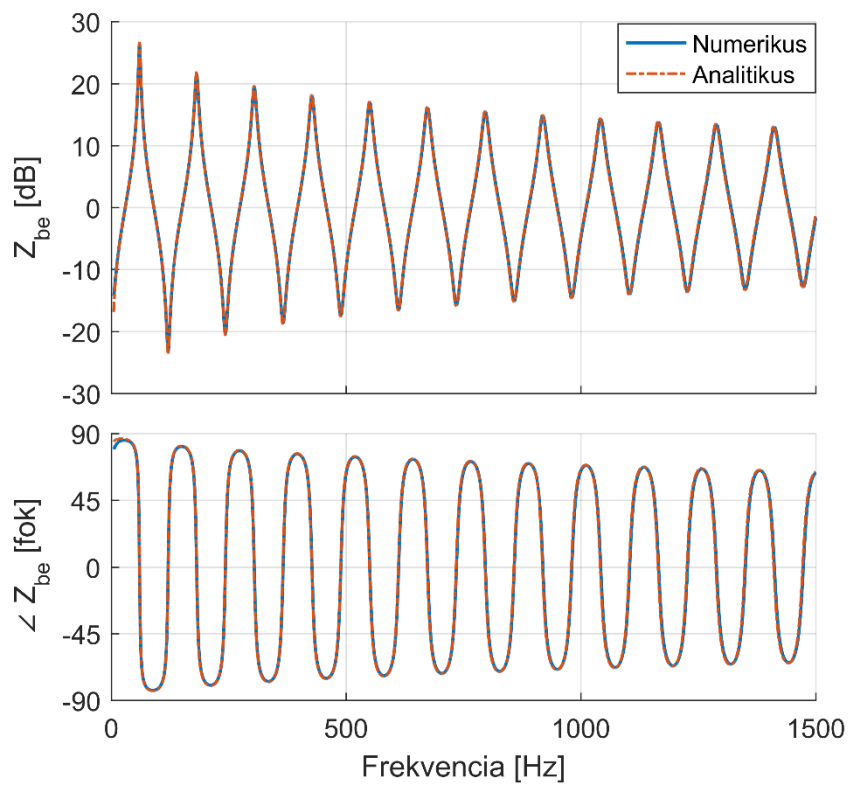
Állandó keresztmetszet mellett a hullám amplitúdója monoton csökken, ahogy egyre nagyobb távolságot tesz meg. A fali veszteségek okozta amplitúdó csökkenés, azonban kevésbé szignifikáns, mint a szűkülő keresztmetszet okozta amplitúdó növekedés. Ezt szemlélteti a 16. ábra, ugyanis a kimenő hullám amplitúdója csökken ahogyan azt elvárnánk, hiszen a fali veszteség és a táguló keresztmetszet hatása egymást erősíti, azonban a beérkező hullám amplitúdója még mindig növekszik. A tanulság tehát, hogy egy ilyen exponenciálisan táguló cső esetében a szűkülő keresztmetszet okozta amplitúdó növekedés intenzívebb, mint a fali veszteségek okozta csökkenés. Az is jól látszik, hogy állandó keresztmetszetenél a fali veszteségek hatására a hullámalak is megváltozik, a visszafelé érkező hullámnak már egészen megnyúlik a hátsó része. A jelenség magyarázata a terjedési sebesség frekvenciafüggése, így a fali veszteségeket figyelembe véve a terjedésre diszperzió jellemző.



16. ábra: Hullámterjedés lineáris esete változó csőkeresztmetszet mellett fali veszteségekkel

Most már tudjuk, hogy a fali veszteségeknek és a változó keresztmetszetnek milyen hatásai vannak a hullámalakra. A d együtthatóval megjelenített belső veszteségeket nem tárgyalom önálló bekezdésben. Ennek hatását is megvizsgáltam külön, de a jelenléte nagyon minimálisan befolyásolja csak a hullámalakot. Ennek oka, hogy a hangszertestben a fali veszteségek hatása sokkal nagyobb, mint a szabadtéri terjedésnél is jelen lévő belső veszteségeké. A teljes modell vizsgálatánál természetesen a d együtthatóval is kalkulálni fogunk a teljesség kedvéért, de külön nem szeretném bemutatni.

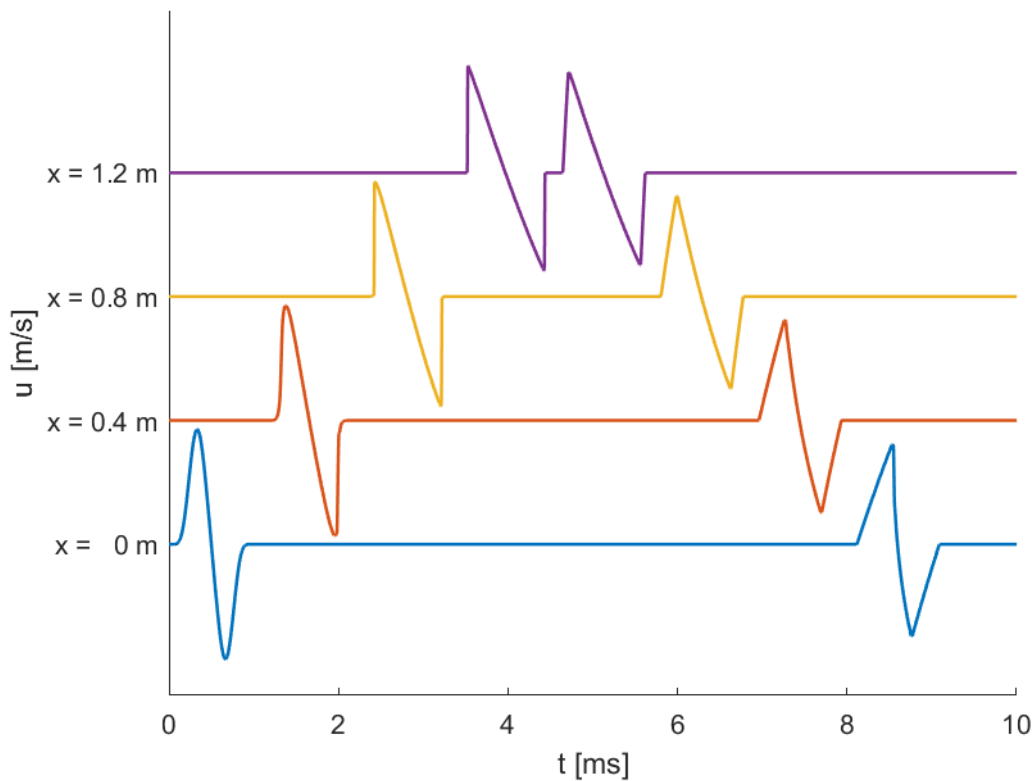
A terjedésmodell helyes működését alátámasztja a numerikus, időtartománybeli megoldással számított bemeneti impedancia összehasonlítása a frekvenciatartományban számított analitikus értékkel, melyet a 17. ábra szemléltet és jól látszik rajta a két megoldás közötti minimális eltérés.



17. ábra: Bemeneti impedancia értékei lineáris terjedés esetén, fali veszteségekkel, állandó keresztmetszet mellett

5.1.4 Nemlineáris eset

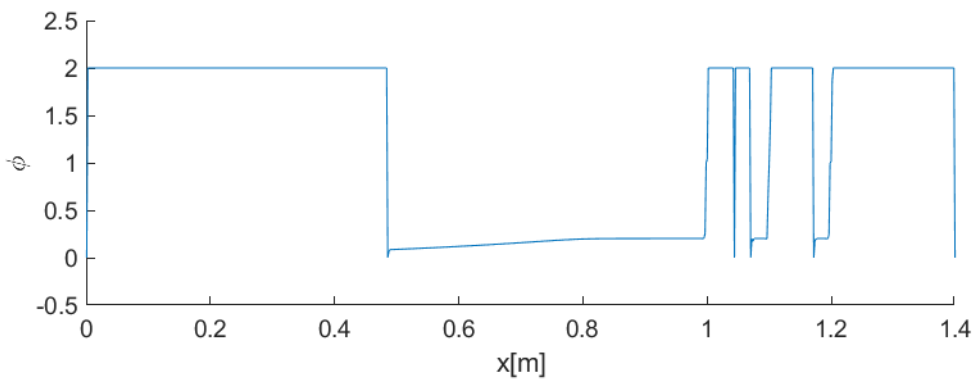
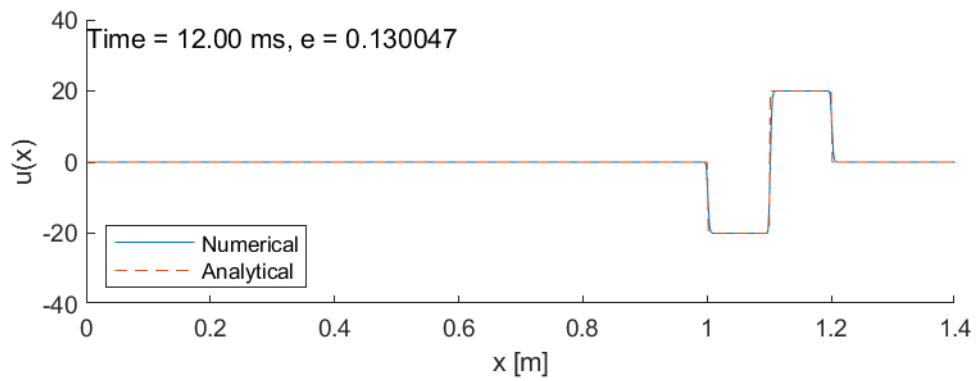
A nemlineáris hullámterjedésért a Menguy-Gilbert-modellben a b együttható felel. Hatását külön szeretnénk vizsgálni, ezért a veszteségektől most eltekintünk, csupán az a és b együtthatónak adunk értéket.



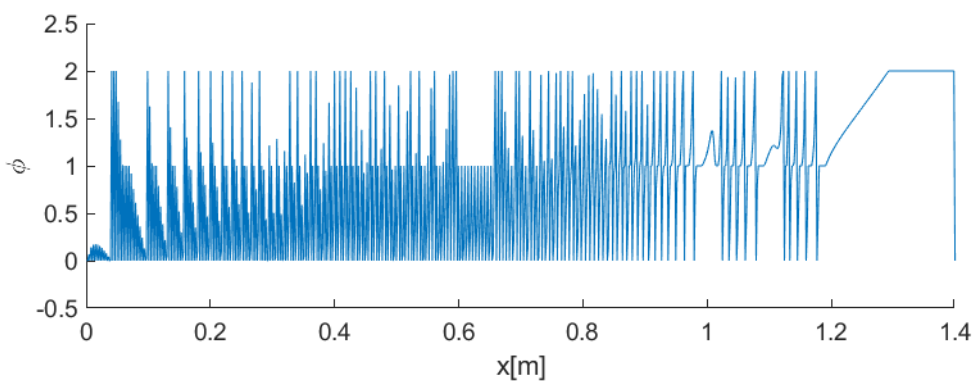
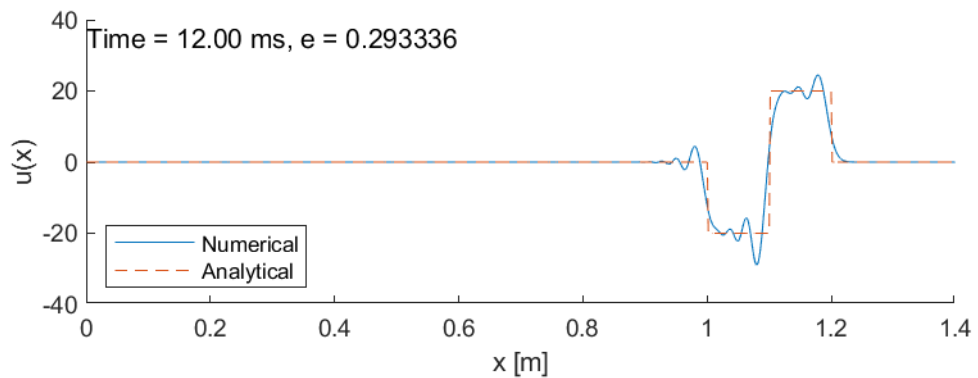
18. ábra: Hullámterjedés nemlineáris esete állandó csőkeresztmetszet mellett veszteségek nélkül

Az ábra alapján elmondható, hogy a nemlinearitás a hullám amplitúdójára is hatással van, a megtett távolsággal arányosan csökkenti azt. Ami azonban szembeűnőbb, hogy az eredeti hullámcsomag nagy mértékben eldeformálódott. A kifelé menő lekerekített hullámalak átalakul egy fűrészfog jellegű hullámmá a cső vége felé vezető úton, a visszaverődés után tovább torzul a hullámalak. A kutatások szerint a rézfűvóshangszereknél a nemlinearitásnak kulcsfontosságú jelentősége van, ugyanis ez adja a hangszer egyedi éles hangszínét. A fenti ábrán megfigyelhető jelenségek alakváltozása természetesen függ a hullám amplitúdójától is, nagyobb amplitúdójú hullámok nagyobb mértékű torzítást szenvednek el.

A nemlineáris hullámterjedés tesztelésénél szeretnék kitérni a fluxus limiter használatára. Érdekes megvizsgálni két különböző esetet, amikor a fluxus limiterrel számolunk, és amikor anélkül próbáljuk egy hullám terjedését szimulálni. A minél láthatóbb eredmény érdekében ennél a szimulációnál négyszög gerjesztést használok, hiszen abban az esetben a gradiens még radikálisabban változik.



19. ábra: Négyzög gerjesztés terjedése fluxus limiter használatával

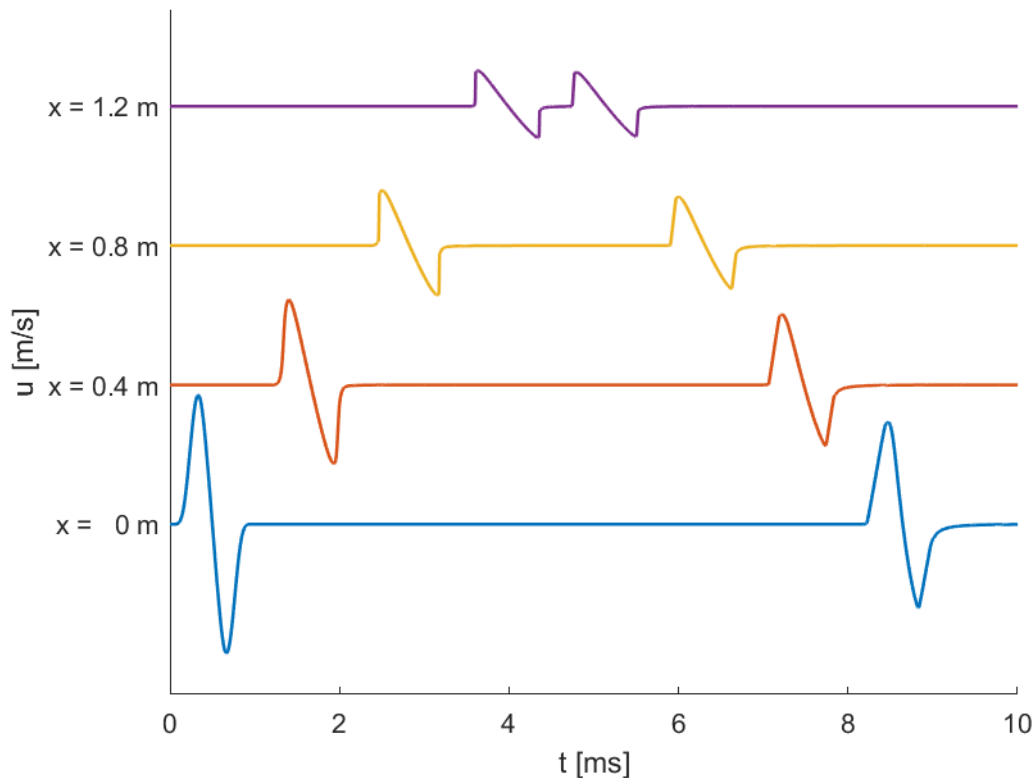


20. ábra: Négyzög gerjesztés terjedése fluxus limiter használata nélkül

A különbség remekül látszik az ábrán. A fluxus limiter mellőzésénél a négyzög gerjesztés hirtelen meredekségét képtelen lekövetni a numerikus megoldás, túllövés és oszcilláció jellemzi a numerikus közelítést. Ellenben a limiter használatakor szinte tökéletesen fedésben van a numerikus és az analitikus megoldás.

5.1.5 Teljes terjedésmodell

A teljes terjedésmodell tesztjében megfigyelhető minden korábban tárgyalt jelenség szuperpozíciója. A végeredményben látható a fali veszteségek okozta amplitúdócsökkenés, a változó keresztmetszet okozta amplitúdócsökkenés odafelé és amplitúdónövekedés a visszafelé irányban. Továbbá a nemlinearitás miatt teljesen eldeformálódó hullámforma is. Az oszt eredményét a 21. ábra szemlélteti.

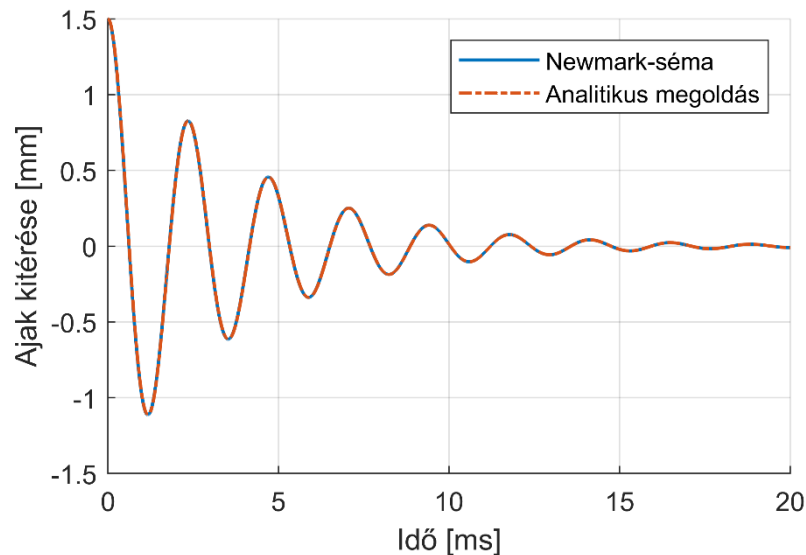


21. ábra: Hullámterjedés teljes modellje: változó csőkeresztmetszet mellett veszteségekkel és nemlinearitással

5.2 Ajakmodell tesztelése

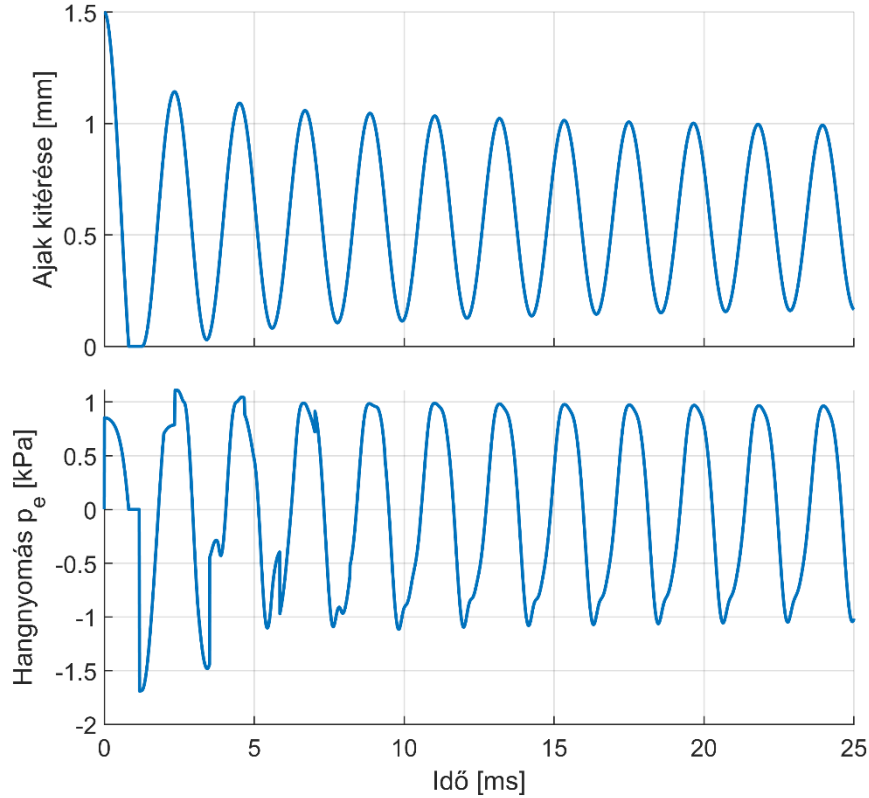
Az ajakmodell tesztelésénél megvizsgáljuk mennyire működik jól az ismertett Newmark metódus. Ehhez vegyünk egy egyszerű rezgő rendszert, szimuláljuk egy m

tömegű rugóra erősített test rezgését csillapítással, hiszen végsősoron az ajakmodellünk is így működik. Hasonlítsuk össze a Newmark sémával számolt elmozdulás függvényt az analitikus eredménnyel. Az eredményt a 22. ábra mutatja. A hiba a később használt időlépés paraméterekkel számszerűsítve kevesebb mint 2%, és a grafikonon is jól fedésben van a két függvény, tehát a Newmark módszer jól használható.



22. ábra: Newmark metódus eredményének összehasonlítása az analitikus értékkel

Érdeemes továbbá megvizsgálni, hogyan működik az ajakmodell egy egyszerű egyenes cső rezonátorral és mesterséges visszacsatolással. A mesterséges visszacsatolást úgy kell érteni, hogy beállítunk egy reflexiós együtthatót attól függően, milyen mértékű visszaverődést szeretnénk, és a visszaverődő p^- nyomáshullámot a kifelé menő p^+ korábbi értéke és a reflexiós együttható szorzataként állítjuk elő. Vagyis az időtartományban eltoltt Dirac-delta a reflexiós függvényünk. Egy ilyen szimulációról született a 23. ábra, ahol az ajak kitérése látható, valamint a rezonátorban lévő hangnyomás. A reflexiós tényezőt -0.99 -nek választottam. Érdeemes megfigyelni, ahogy az önfenntartó oszcilláció létrejön és beáll az állandósult állapotú, konstans amplitúdójú rezgés, melynek periódusideje a visszacsatolás periódusidejével egyezik meg, valamint a tényt, hogy bár az ajak rezgése szinuszos, addig a nyomáshullám már kezd eltorzulni és nemlineáris jelleget ölteni. Utóbbi jelenség oka, hogy az ajak pozíciója és a kiáramló levegő sebessége között nemlineáris az összefüggés.



23. ábra: Az ajak kitérése és a rezonátorban lévő nyomás az idő függvényében

5.3 Teljes modell csatolással

A teljes modell alatt a gerjesztésmodell és a terjedésmodell összekapcsolást értjük. A terjedés modelljében minden tényezőt figyelembe veszünk, tehát a nemlinearitás, a fali veszteségek és a változó keresztmetszet is a részét képezi. A tesztek során vizsgáljuk a korábbi szimulációkban használt egyenes csövet.

A szimulációhoz használt ajakparamétereket a 4. táblázat mutatja. A csövet konstans 8kPa nyomással gerjesztjük és ábrázoljuk a lesugárzott nyomásértékeket időben, valamint a lesugárzott hangnyomásszint spektrumát. A lesugárzott nyomásérték számításának módját az (52) képlet adja meg, ahol $D_{rec} = 10\text{ m}$ a cső kimenetétől számított önkényes távolság, S pedig a cső keresztmetszete a kimeneten.

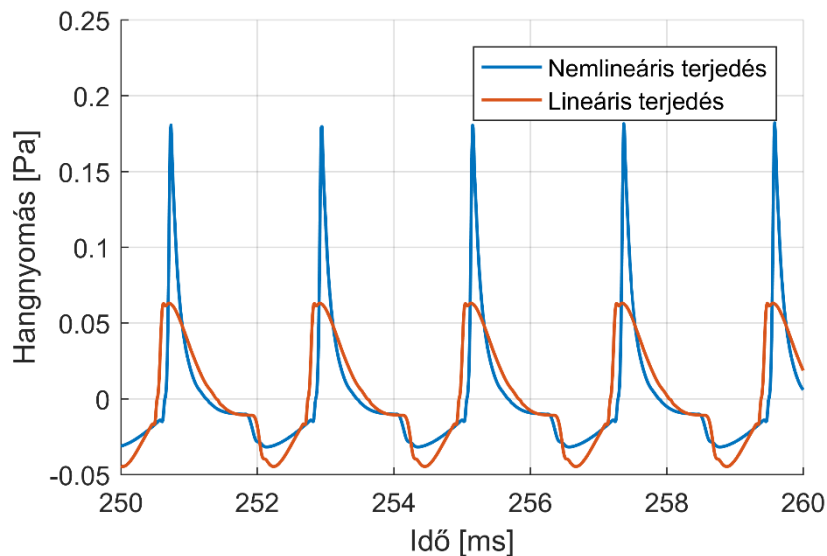
$$p_{rec} = \frac{\rho_0 S}{4\pi D_{rec}} \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \quad (52)$$

4. táblázat: Ajakparaméterek

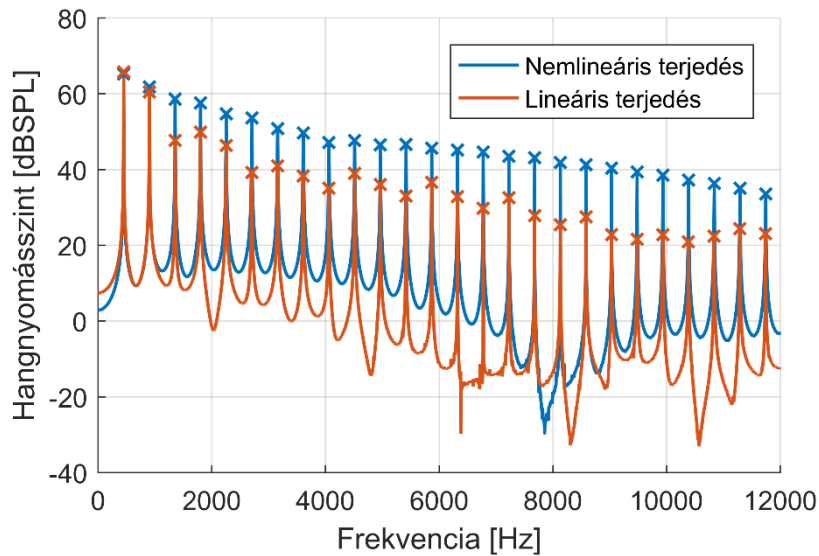
m [kg]	k [N/m]	r [Ns/m]	A [m ²]	l [m]	p_m [kPa]
$1.78 \cdot 10^{-4}$	1278.8	$9.43 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}	10^{-2}	8

Az (52) egyenletben a hangszertest nyitott végét pontforrásnak (lélegző gömbnek) tekintjük, mely forrásmodell esetén a lesugárzott hangnyomás a felület gyorsulásával arányos. Így a cső végén kialakuló sebesség idő szerinti deriváltjával számolunk. Utóbbi deriváltat numerikusan értékeljük ki. Az elvégzett szimulációkban azt tapasztaltam, hogy az $u(L, t)$ függvény elég sima ahhoz, hogy az alkalmazott időlépés mellett a derivált numerikus kiértékelése ne okozzon problémát.

A szemléltetés végett egy ábrán ábrázoltam a lineáris terjedéssel ($b = 0$) és a nemlineáris terjedéssel számított megoldást is. A szimulációnál használt térbeli felbontás $N_x = 400$ értéke mellett $dx = \frac{L}{N_x}$, valamint az időbeli felbontás $dt = 0.9 \frac{dx}{a}$. Megjegyzendő, hogy a nemlineáris modell esetén dt értéke nem növelhető tovább, mert a stabilitáshoz a $dt < \frac{dx}{a+b \max(u)}$ feltételnek (Courant–Friedrichs–Lewy-feltétel) kell teljesülnie.



24. ábra: A lesugárzott hangnyomás az idő függvényében

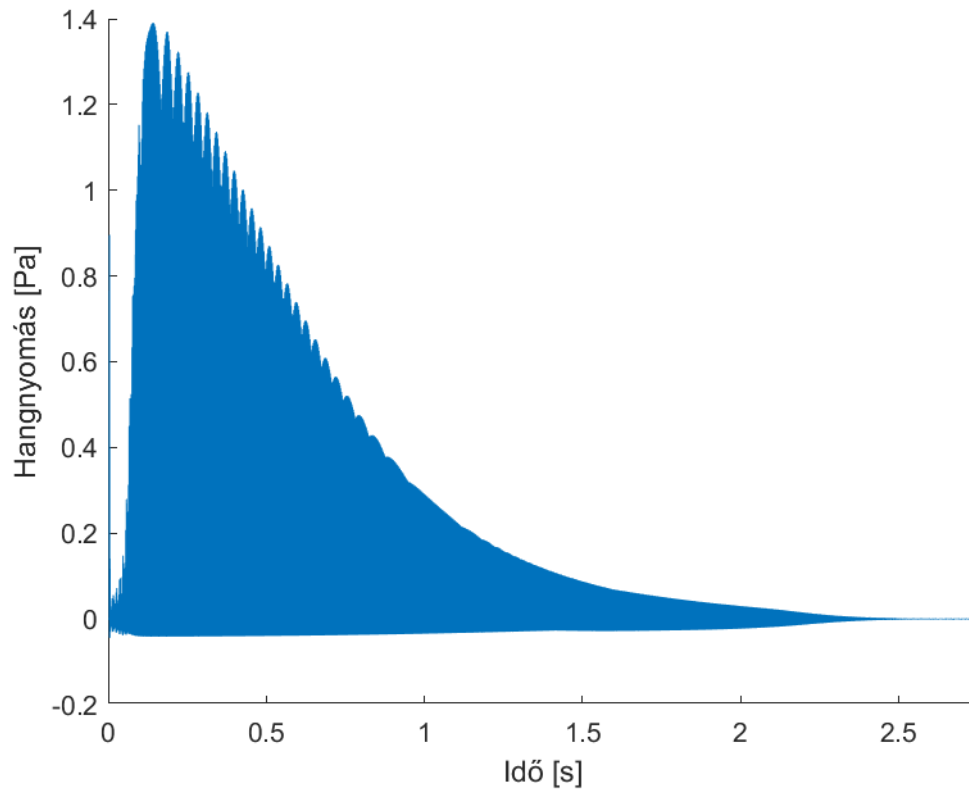


25. ábra: A lesugárzott hangnyomás spektruma

A 24. ábra jól mutatja, hogy lineáris terjedés esetén a nyomáshullám csúcsai lekerekítettebbek, míg nemlineáris terjedés esetén tuskébb a függvény és a periódusban a maximumértékek is nagyobbak. Megfigyelhető az is, hogy a két jel frekvenciája jó közelítéssel azonos. Ez a frekvencia ebben az esetben 426 Hz, ami az ajak sajátfrekvenciájához közeli érték. A 25. ábra spektrumképen látjuk, hogy a nemlineáris terjedés esetén sokkal intenzívebbek a felhangok, ami a kimentett hangminta hangszínén is jól hallható. A nemlineáris terjedés modell esetén a felhangok amplitúdója sokkal lassabb ütemben csökken, mint a lineáris modell esetében. Az is megfigyelhető, hogyha burkológörbét illesztenénk a kétféle terjedésmóddal számított spektrumára, akkor a nemlineáris esetben ez a görbe monoton csökkenő jellegű lenne, azonban a lineáris modellel a burkoló valamelyest hullámzik.

Az előző eset egy statikus szimulációt mutatott, melyben a gerjesztő nyomás értéke az időben állandó volt. Ekkor rövid tranziens után állandósult állapot alakult ki a szimulációban. A következő vizsgálatban a gerjesztő nyomás értékét ezután megváltoztattam a konstans 8 kPa értékről úgy, hogy a gerjesztőnyomás a kezdeti 8 kPa értékről lineárisan 0 Pa-ra csökkenjen az idő függvényében, majd megvizsgáltam, hogyan működik a rendszer változó nyomásérték hatására. A szimulált időtartamot 4 s-nak választottam. A 26. ábra jól bemutatja, hogyan alakul ki a rezgés, majd hogyan cseng

le, miután megszűnik a gerjesztő nyomás. A kezdeti tranziens szakasz hossza, míg a lesugárzott nyomás amplitúdója eléri a maximum értéket, kb. 0,2 s. Amikor a gerjesztő nyomás egy bizonyos küszöbérték (ez esetben kb. 3 kPa) alá csökken az oszcilláció megszűnik. Ez látható az ábrán $t = 2,5$ s környékén. A szimulált hangminta meghallgatásával jól hallható a hangszín és a hangosság folyamatos változása az idő függvényében.



26. ábra: Lesugárzott nyomás értéke az időfüggvényében, csökkenő gerjesztőnyomás esetén

6 Összefoglalás

Dolgozatomban elkészítettem három különböző rézfúvós hangszer geometriai modelljét. A modellek segítségével számított bemeneti impedancia értékek összhangban vannak a szakirodalmi eredményekkel, a geometriák jól használhatóak. A hullámterjedés modellezésére jó választásnak bizonyult a Menguy–Gilbert-modell, amely képes a nemlineáris hullámterjedést és a fal veszteségek hatását is figyelembe venni. A modell hátránya, hogy a síkhullámú közelítés a változó keresztmetszetek helyes leírásához csak erős korlátokkal alkalmazható. A terjedést leíró nemlineáris differenciálegyenlet időtartománybeli megoldáshoz használt véges térfogat módszer, valamint a fluxus limiter alkalmazása biztató eredményeket mutatott a szimulációnál. A terjedésmodellt olyan esetekkel is megvizsgáltam, melyeknél lehetőségem volt analitikus megoldáshoz hasonlítani a szimulációk eredményeit. A gerjesztéshez használt fizikai modell felállítás után a mozgásegyenlet megoldásához a Newmark időlépéses módszert alkalmaztam, melyet szintén validáltam. A terjedés és gerjesztés összekapcsolásával kapott csatolt modell tesztelésénél összehasonlítottam a lineáris és a nemlineáris terjedési esetet és megvizsgáltam a lesugárzott hangot. Ebben az esetben nagyon jól megfigyelhető volt a nemlineáris terjedésmodell hatása. Ezt a megfigyelést megerősíti a szakirodalomban is tárgyalt elmélet, miszerint a rézfúvós hangszerek sajátos hangzásához nagyban hozzájárul a nemlineáris hullámterjedés, melynek nagy gerjesztő nyomások esetén van a legnagyobb hatása a lesugárzott hangra. A dolgozatban bemutatott szimulációk során született hangmintákat a szóbeli előadásom alkalmával fogom bemutatni.

A jelenlegi modell továbbfejlesztéséhez több irányban is el lehet indulni. A jelenlegi implementációban a szimuláció közepesen számításigényes folyamat: egy másodperc szimulációja néhány percet vesz igénybe egy átlagos asztali számítógépen. A szimulációs kód optimalizálásával eddig azonban még nem foglalkoztam. A kód teljesítményelemzésével, a számításigényes műveletek azonosításával, egyszerűsítésével feltehetően a kód teljesítményét lehetne javítani. Emellett lehetőség van még valóságghű sugárzási impedancia figyelembe vételére, illetve a gyorsan táguló csőszakaszok alternatív módon való számítására is. Ebben az irányban már tettem lépéseket, de a kezdeti eredményeket a dolgozatban nem mutattam be.

Irodalomjegyzék

- [1] https://www.wikiwand.com/hu/T%C3%B6lcs%C3%A9res_f%C3%BAv%C3%B3k%C3%A1j%C3%BA_hangszerek (utoljára megtekintve: 2020. augusztus)
- [2] S. Bilbao – J. Chick: *Finite difference time domain simulation for the brass instrument bore*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. **134**, No. 5 (2013), p. 3860-3871, PACS 43.75.Fg[JW], <http://dx.doi.org/10.1121/1.4822479>
- [3] C. Birk – C. Song: *An improved non-classical method for the solution of fractional differential equations*, *Comput Mech* (2010) 46:721–734, DOI 10.1007/s00466-010-0510-4
- [4] http://www.inf.u-szeged.hu/~kgelle/sites/default/files/upload/11_numerikus_integralas_0.pdf (utoljára megtekintve: 2020. szeptember)
- [5] S. Félix and J.-P. Dalmont. „*Effects of bending portions of the air column on the acoustical resonances of a wind instrument*” J. Acoust. Soc. Am. **131**(5) pp. 4164–4172. (2012) DOI: [10.1121/1.3699267](https://doi.org/10.1121/1.3699267)
- [6] J. Backus. „*Input impedance curves for the brass instruments*” J. Acoust. Soc. Am. **60**(2) pp. 470–480. (1976) DOI: [10.1121/1.381104](https://doi.org/10.1121/1.381104)
- [7] T. Handbauer. „*Trombita waveguide modellezése*” BME VIK szakdolgozat, 2012. URL: <https://diplomaterv.vik.bme.hu/hu/Theses/Trombita-waveguide-modellezese>
- [8] M.E. McIntyre, R.T. Schumacher and J. Woodhouse. „*On the oscillations of musical instruments*” J. Acoust. Soc. Am. **74**(5) pp. 1325–1345. (1983) DOI: [10.1121/1.390157](https://doi.org/10.1121/1.390157)
- [9] R. Caussé, J. Kergomard and X. Lurton, X. „*Input impedance of brass instruments – Comparison between experiment and numerical models*” J. Acoust. Soc. Am. **75**(1) pp. 241–254. (1984) DOI: [10.1121/1.390402](https://doi.org/10.1121/1.390402)
- [10] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens and J.V. Sanders. „*Fundamentals of Acoustics*” John Wiley & Sons. (2000) 4th edition, chapter 8.
- [11] N.H. Fletcher and T.D. Rossing. „*The physics of musical instruments*” Springer. (1998) 2nd edition, chapter 8.
- [12] T. Ebihara and S. Yoshikawa. „*Nonlinear effects contributing to hand-stopping tones in a horn*” J. Acoust. Soc. Am. **133**(5) pp. 3094–3106. (2013). DOI: [10.1121/1.4798669](https://doi.org/10.1121/1.4798669)

- [13] A. Hirschberg, J. Gilbert, R. Msallam and A. P. J. Wijnands. „*Shock waves in trombones*” J. Acoust. Soc. Am. **99**(3) pp. 1754–1758 (1996) DOI: [10.1121/1.414698](https://doi.org/10.1121/1.414698)
- [14] P. L. Rendón, R. Ezeta, A. Pérez-López: *Nonlinear sound propagation in trumpets*. Acta Acust. united Ac. **99** pp. 607–614 (2013) DOI: [10.3813/AAA.918640](https://doi.org/10.3813/AAA.918640)
- [15] M. Campbell, J. Chick, J. Gilbert, J. Kemp, A. Myers, M. Newton. „*Spectral enrichment in brass instruments due to nonlinear sound propagation; a comparison of measurements and predictions.*” Proceedings of ISMA, Le Mans (2014).
- [16] J. Gilbert, L. Menguy, M. Campbell: „*A simulation tool for brassiness studies*” J. Acoust. Soc. Am. **123** pp.1854–1857. (2008) DOI: [10.1121/1.2872342](https://doi.org/10.1121/1.2872342)
- [17] L. Menguy, J. Gilbert. „*Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes; solutions and experiments.*” Acta Acust. united Ac. **86**(5) pp. 798–810. (2000)
- [18] S. Adachi and M. Sato, M. „*Time-domain simulation of sound production in the brass instrument*” J. Acoust. Soc. Am. **97**(6) pp. 3850–3861. (1995) DOI: [10.1121/1.412398](https://doi.org/10.1121/1.412398)
- [19] S. Adachi and M. Sato. „*Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model*” J. Acoust. Soc. Am. **99**(2) pp. 1200–1209. (1996) DOI: [10.1121/1.414601](https://doi.org/10.1121/1.414601)
- [20] N. M. Newmark. “*A method of computation for structural dynamics,*” ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division **85**, pp. 67–94 (1959).