



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**  
Villamosmérnöki és Informatikai Kar  
Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

Bak Bálint

**ÁRAMKÖRI WORST-CASE  
ANALÍZISFELADATOK MEGOLDÁSÁNAK  
OPTIMALIZÁLÁSA**

TDK dolgozat

KONZULENS

**Dr. Orosz György**

BUDAPEST, 2023

# Tartalomjegyzék

<b>Kivonat.....</b>	<b>4</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Bevezetés .....</b>	<b>6</b>
1.1 Problémamegfogalmazás .....	6
1.2 A probléma matematikai megfogalmazása.....	9
1.3 Célkitűzés.....	10
<b>2. Irodalmi áttekintés.....</b>	<b>11</b>
2.1 Klasszikus módszerek.....	11
2.1.1 Extreme Value Analysis (EVA) .....	11
2.1.2 Monte-Carlo Analízis .....	13
2.1.3 Lineáris hibaterjedés .....	15
2.2 Újszerű módszerek.....	17
2.2.1 Intervallumaritmetika.....	17
2.2.2 Komplex intervallumaritmetika .....	18
2.2.3 Optimalizációs algoritmusok .....	19
<b>3. Áramkörreprezentációk.....</b>	<b>21</b>
3.1 Kapcsolási rajzok.....	21
3.2 Dinamikus leírás .....	21
3.3 Átviteli függvény .....	22
<b>4. Szeparálhatóság .....</b>	<b>25</b>
4.1 Matematikai megfogalmazás .....	25
4.2 Szeparálhatóság topológia alapján.....	27
<b>5. Szeparálhatóság átviteli függvény alapján .....</b>	<b>29</b>
5.1 Szeparálhatóság vizsgálata parciális törtekre bontással.....	29
5.2 Szeparálhatóság vizsgálata pólus-zérus alakkal .....	31
5.3 Numerikus átvitelek.....	32
<b>6. Intervallumaritmetika .....</b>	<b>38</b>
6.1 Kiterjesztés komplex intervallumokra .....	38
6.2 Alkalmazás.....	40
<b>7. Összehasonlítás.....</b>	<b>44</b>
<b>8. Összefoglalás, kitekintés.....</b>	<b>53</b>



# Kivonat

Modern alkalmazásokban, sok esetben a rendszerek biztonságkritikus funkcióit elektromos áramkörök látják el. Ennek következtében elvárás ezen elektromos rendszerekkel szemben, hogy azok megbízhatóan működjenek az alkalmazás teljes életciklusa során, minden lehetséges körülmény között. A funkcionalitást realizáló áramkör rendszerint egy komplex elektromos rendszer, amelynek működése sok paramétertől függ. Ez nagymértékben megnehezíti a rendszer analízisét, illetve annak a belátását, hogy az összes lehetséges üzemi körülmény között helyesen fog működni. Az ilyen jellegű analízisfeladatok során általában az áramkörök szélsőséges viselkedésének felderítése a cél, ezt hívják Worst-case analízisnek.

Ennek a dolgozatnak a célja azt vizsgálni, hogy a Worst-case analízisfeladatok hogyan végezhetőek el hatékonyabban, a probléma komplexitásának csökkentésével. A dolgozatban tárgyalni fogom, hogy a feladat hogyan dekomponálható kisebb részfeladatokra, amelyeknek az eredményeiből származtatni lehet az eredeti probléma megoldását. A probléma dekomponálása függhet attól is, hogy a rendszerrel kapcsolatban milyen előzetes ismeretekkel vagy modellekkel rendelkezünk. Ez lehet például egy átviteli függvény, dinamikus leírás vagy akár kapcsolási rajz is. Kérdés lehet egy ilyen feladat során, hogy a rendszerről alkotott modell analitikus vagy numerikus. Ennek a ténynek a feladat szempontjából releváns következményeiről is írok. A dolgozat a különböző algoritmusok és metodikák részletezésével zárul, melyeket MATLAB szimulációs környezetben is implementáltam.

## **Abstract**

In many cases, in today's modern applications the safety-critical tasks are executed by electronic circuits. For this reason, reliable operation is expected of these electronic systems under all possible operating conditions. Usually, the operation of these complex systems depend on lot of parameters and variables, hence demonstrating and proving that such a system fulfills it's role becomes a challenging problem. These analysis tasks are usually aimed at revealing the system's extreme working conditions, within it's specified operation limits. This domain of engineering is called Worst-case analysis.

This paper focuses on how can such a worst-case analysis problem be solved more efficiently by reducing the task's complexity. I will discuss how a task can be decomposed into smaller and simpler tasks which are easier to execute, and whose results can be used to obtain the original problem's solution. The possibility of the decomposition depends on how the system is represented and what sort of an a-priori knowledge is available. I will discuss the possibilities depending on the different forms of the representation. Depending on the problem, the model of the system can be a numerical model or an analytical one. This also influences the possibilities of decomposition which I will discuss. The document ends with the summary of the available methods and algorithms for these problems, which I implemented in the MATLAB programming environment.

# 1. Bevezetés

Modern alkalmazásokban sok esetben a rendszerek biztonságkritikus funkcióit elektromos áramkörök látják el. Ennek következtében elvárás ezen elektromos rendszerekkel szemben, hogy azok megbízhatóan működjenek az alkalmazás teljes életciklusa során, minden lehetséges körülmény között. A funkcionalitást realizáló áramkör rendszerint egy komplex elektromos rendszer, amelynek működése sok paramétertől függ. Ez nagymértékben megnehezíti a rendszer analízisét, illetve annak a belátását, hogy az összes lehetséges üzemi körülmény között helyesen fog működni. Az ilyen jellegű analízisfeladatok során általában az áramkörök szélsőséges viselkedésének felderítése a cél, ezt hívják Worst-case analízisnek. A gyakorlati példákban sokszor elég a rendszer egy adott jellemzőjének a szélsőértékeit vizsgálni. Erre egy példa lehet egy alkatrész disszipációja vagy egy kapcsolat erősítése/fázistolása egy bizonyos frekvencián.

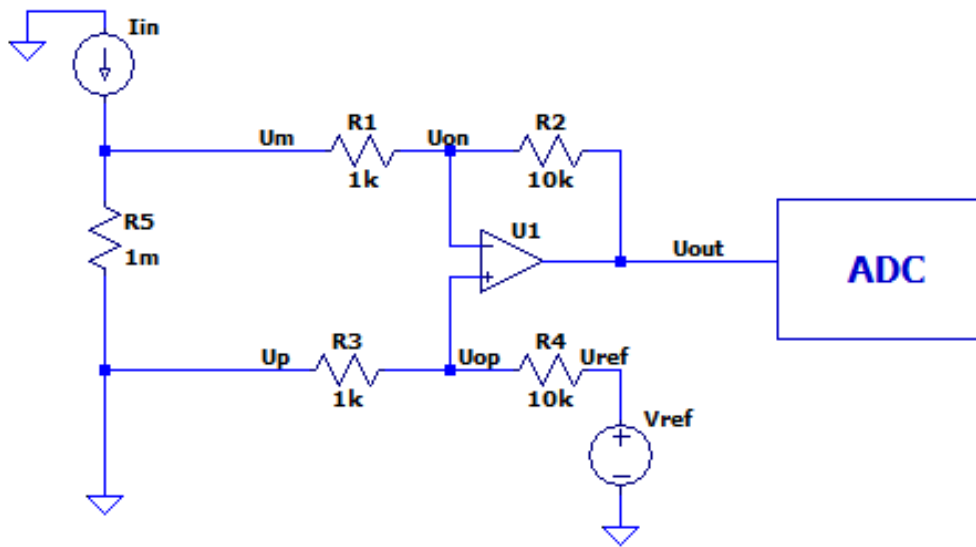
## 1.1 Problémamegfogalmazás

Rendelkezésünkre áll tehát egy rendszer, amelyet szeretnénk megismerni olyan értelemben, hogy annak egy működési paraméterét vagy paramétereit behatároljuk korlátok közé. Ez lesz szükséges ahhoz, hogy tervezni lehessen majd vele, illetve integrálható legyen más nagyobb rendszerekbe. A rendszerrel kapcsolatban rendelkezésünkre állnak bizonyos a priori ismeretek. Ilyen például, ha ismerjük a rendszer frekvenciafüggő átvitelét vagy dinamikus leírását. Ha elektromos rendszerről van szó, akkor ismerhetjük a kapcsolási rajzát vagy a kapcsolat alapján felírt csomóponti egyenleteket és hurokegyenleteket. Az esetek jelentős részében a rendszernek csak egy bizonyos paramétere fontos a worst-case analízis szempontjából, nem feltétlenül szükséges annak „mély” megismerése. Nem feltétlenül kell behatárolnunk annak a belső változóit is, de természetesen ezek a belső változók hatással lehetnek az általunk vizsgált paraméterre.

Az adott worst-case analízis problémához tartozik egy rendszer, amelyre jellemzőek a saját paramétere, amelyeknek egy részhalmazáról a rendszer alkotója dönt még tervezési időben. Az elektromos rendszereknél maradván ez lehet például valamilyen ellenállás értéke. Továbbá a rendszer paramétereinek értékeit befolyásolhatják más külső tényezők is, mint például a hőmérséklet, páratartalom, vagy különböző gyártási szórások,

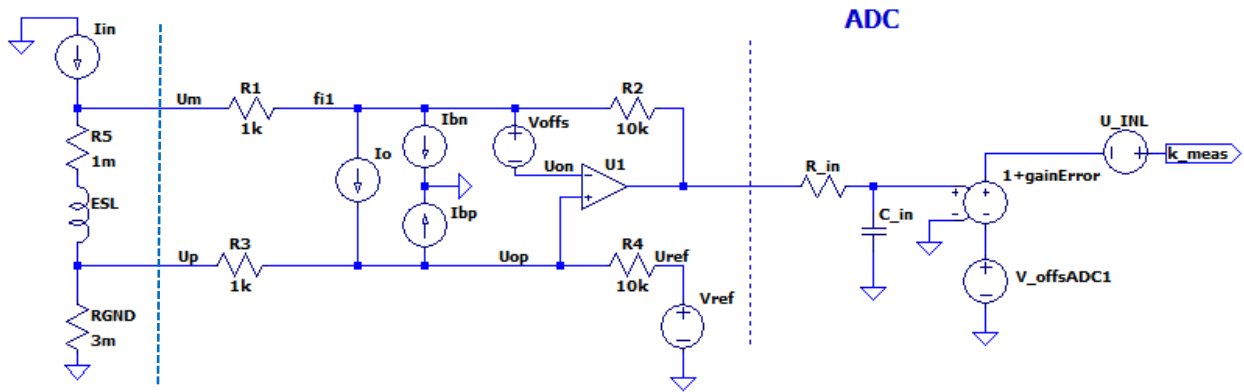
amelyek hatással lehetnek a rendszer mennyiségeire. Jellemző az is, hogy ezen változókról, szintén az a priori ismereteink alapján állíthatjuk azt, hogy valamilyen korlátok közé esnek. Például, ha a rendszer működése egy adott hőmérsékleti tartományra van specifikálva, akkor a hőmérséklet, mint paraméter, korlátozható erre a véges intervallumra. Ez csökkenti a feladat komplexitását, hiszen kevesebb üzemállapot lesz, amely vizsgálandó a szélsőséges működés szempontjából.

A probléma nehézségét mutatja a következő példa. Adott egy differenciálerősítő, amivel áramot mérünk, és egy *ADC*-hez kapcsolódik:



1.1 ábra: Differenciálerősítő egyszerű modellje.

Ha a kapcsolásban szereplő műveleti erősítőt ideálisnak feltételezzük, akkor a rendszer paraméterei az ellenállások és a referenciaforrás, összesen 6 paraméter. Tegyük fel, hogy a rendszer valamely jellemzőjét vizsgáljuk, amit lehet származtatni a képen látható paraméterekből, például azt, hogy áramjel ugrása esetén adott idő múlva mekkora hibával áll be az *ADC* által mért érték. Ha ismerjük a paraméterek szélsőértékeit (a minimumokat és maximumokat), akkor, ha a szélsőséges eseteket vizsgáljuk  $2^6 = 64$  kiértékeléssel tudjuk bejárni a paraméterteret. Ez az *Extreme Value Analysis* módszere, amiről későbbi fejezetekben is szó lesz. A probléma komplexitása gyorsan nő, ha figyelembe vesszük az egyes komponensek különböző nemideális tulajdonságait:



1.2 ábra: Differenciálerősítő komplex modellje.

Ezen az ábrán a hálózatban a korábbi 6 tagon felül még figyelembe vesszük a következőket:

- R5 árammérő ellenállás soros induktivitását (*ESL*)
- A földpont ellenállását (*RGND*)
- A műveleti erősítő:
  - offset feszültségét (*Voffs*)
  - offset áramát (*Io*)
  - bias áramát (*Ibn*, *Ibp*)
  - nyílt hurkú erősítését
  - slew-rate-jét
  - sávszélességét
  - közös módosú elnyomását
- Az ADC:
  - bemeneti ellenállását (*R\_in*)
  - bemeneti kapacitását (*C\_in*)
  - offset feszültségét (*V\_offsADC1*)
  - erősítési hibáját (*gainError*)
  - integrális nemlinearitását (*U\_INL*)

Így 20 paraméterhez jutunk. Ebben az esetben  $2^{20} = 1048576$  kiértékeléssel tudjuk bejárni a paraméterteret, ami  $2^{14}$ -szer több számítást jelent az 1.1 ábrán szereplő egyszerű modellhez képest. Viszont, ha valamilyen megfontolásból több részre tudjuk bontani az analizálandó áramkört, az csökkentheti a számítási igényt. Például, ha azon



megfontolásból, hogy a differenciálerősítő és az *ADC* fokozat bemeneti ellenállása is nagy, három részre bonthatom az áramkört az 1.2 ábra szaggatott vonalai mentén. Ekkor külön analizálhatom az áramkör részeit és a korábbi  $2^{20}$  számítás helyett csak  $2^3 + 2^{12} + 2^5 = 4136$  kiértékelést kell elvégeznem, ami számottevő javulás, tekintve, hogy ugyan azt a komplex áramkört vizsgáltam. Ez a dolgozat többek között ezzel a dekomponálási problémával is foglalkozik.

## 1.2 A probléma matematikai megfogalmazása

Az 1.1 fejezetben tett megfontolások alapján megfogalmazható egy matematikai probléma. A példa kedvéért tegyük fel azt, hogy a rendszernek egy valós értékű kimenetét vizsgáljuk, amelyet befolyásolnak különböző paraméterek, amelyek szintén valós értékűek és korlátosak is. Továbbá tegyük fel azt is, hogy a kimenet és a paraméterek közti kapcsolat leírható egy többváltozós függvénykapcsolattal. Ezek a feltételek elektromos hálózatok esetében egyáltalán nem szigorú megkötések, de a probléma általánosságát valamelyest rontják. Ezeket szem előtt tartva felírható:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}) = y \quad (1.1)$$

$$f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad x_i \in X_i = [x_{i_{min}}, x_{i_{max}}] \quad (1.2)$$

$$y_{min} = ? \quad y_{max} = ? \quad (1.3)$$

Az (1.1) egyenletben a vizsgált változót  $y$  jelöli. Az ezt befolyásoló paramétereket  $x_i$ , amelyből  $n$  darab van, és az  $\mathbf{x}$  vektorba vannak összegyűjtve. Minden paraméterhez tartozik egy-egy korlátos intervallum, amelyet  $X_i$  jelöl. A kimenet és a bemenet között az  $f$  többváltozós függvény teremt kapcsolatot. A worst-case probléma szempontjából a feladat az, hogy feltérképezzük az  $f$  által felvehető lehető legkisebb és legnagyobb értékeket.

Ha így definiáljuk a feladatot (1.1), (1.2), (1.3), akkor egy szélsőérték problémához jutunk, ahol keresendő a vizsgált  $y$  változónak a maximuma, illetve minimuma. Ez a matematikában egy ismert probléma, amelynek megoldására léteznek eljárások [1]. Ráadásul, a paraméterekre tett kikötés miatt, miszerint korlátosak, a szóban forgó probléma nem is feltétlenül egy globális szélsőérték-keresési feladat, hanem egy a paraméterek által definiált lokális szélsőérték keresési feladat.

Az (1.1) és (1.2) összefüggés egy jól definiált matematikai probléma, de a gyakorlatban több tényező is elbonyolíthatja. A probléma komplexitása nő a befolyásoló paraméterek számával arányosan.

### 1.3 Célkitűzés

Ennek a dolgozatnak a célja, hogy röviden körbejárja és megvizsgálja az áramköranalízis során használható szélsőértékkeresési módszereket, és legalább bizonyos speciális esetekben eljárást javasoljon azok javítására. Cél az is, hogy az új módszerek automatizálhatóak legyenek. Az (1.1) egyenletben vázolt többváltozós analízis témaköréhez tartozó probléma egy absztrakt matematikai feladat, nincs benne nyoma annak, hogy a szóban forgó probléma egy elektromos hálózatról szól. A dolgozatban arra törekszem, hogy az elektromos hálózatokra jellemző tulajdonságokból alkossak valamilyen előnyt a probléma megoldásához.

A dolgozatban két nagyobb témával foglalkozom:

- komplex áramkörök dekomponálása kisebb részproblémákra
- intervallumaritmetika alkalmazása

A legnagyobb hangsúly arra kerül, hogy a kiindulási worst-case analízisprobléma hogyan dekomponálható kisebb részproblémákra, amelyeknek az eredményeiből származtatható az eredeti probléma eredménye, ezzel csökkentve annak komplexitását és gyorsítva kiértékelését. Továbbá röviden ismertetem az úgynevezett intervallum aritmetika matematikáját, amely használható worst-case analízisfeladatok megoldásához is [2].

## 2. Irodalmi áttekintés

Ahogy az 1.2 alfejezetben is szerepel, az ott vázolt szélsőérték-keresési feladatra léteznek különböző eljárások. A különböző technikák közül egyik sem élvez kitérített szerepet, hiszen mindegyiknek van más-más erőssége és gyengesége. Ez a fejezet a legelterjedtebb metodikákat mutatja be nagy vonalakban.

### 2.1 Klasszikus módszerek

Az optimalizálás és szélsőérték-keresés témakörében időrendben először azok a módszerek lettek kidolgozva, amelyek analitikusan, zárt alakban vizsgálják a problémát. Levetítve az (1.1) egyenletre ez azt jelenti, hogy ismerjük a kapcsolatot a vizsgált változó és a befolyásoló paraméterek között. Némelyik módszer azt is igényli, hogy ez a leíró függvénykapcsolat differenciálható is legyen bizonyos pontokban. Többféle ilyen módszer van [3], de az összesnek a bemutatására terjedelmi okokból ebben a dolgozatban nem tér ki. Ezen kívül léteznek elterjedt módszerek, amelyek az egyes paraméterek statisztikus paramétereit használják mint előzetes ismeret. A következő néhány alfejezetben azokat mutatom be nagy vonalakban, amelyek ma is hangsúlyosak és sűrűn használtak a gyakorlatban.

#### 2.1.1 Extreme Value Analysis (EVA)

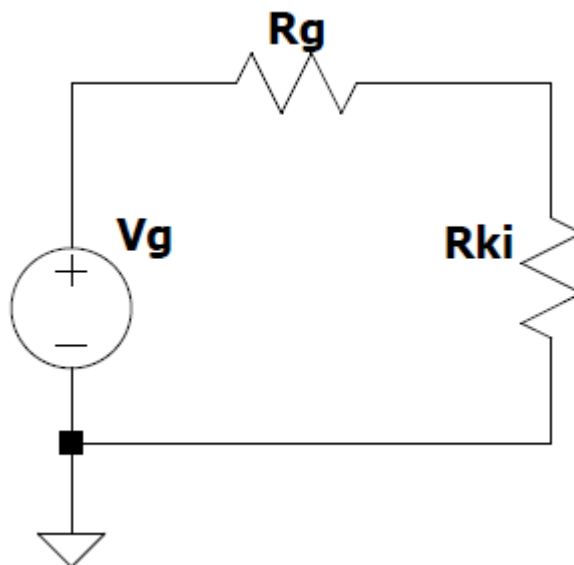
Ha a kimenet szélsőértékeit vizsgáljuk, akkor egy kézenfekvő gondolat, hogy a befolyásoló paraméterek szélsőértékeiből származtassuk azt. Ez a módszer pontosan erre épül, mégpedig kiértékeli a rendszert a paraméterek minimum és maximum értékeinek összes lehetséges kombinációjával, és az így előálló kimeneteknek veszi a minimum és maximum értékét.

Előre ismert az összefüggés (függvény) a kimenet és a befolyásoló paraméterek között is, továbbá a paraméterek szélső értékei is ismertek. Ha ezeket előre tudjuk, akkor kiértékelhetjük a kimenetet leíró függvényt a befolyásoló paraméterek szélsőértékeivel, majd az eredmények közül felhasználjuk azokat, amelyek a legszélesebb becslést adják, tehát ez alapján a lehető legtágabb korlátokat választjuk a vizsgált kimeneti paraméterhez [4]. Az *extreme value analysis* kapcsán a szakirodalom nem minden esetben egyértelmű. Van olyan irányzat, ahol a technika az eloszlásfüggvény alapján becsli az extrém értékeket [5]. Más irodalmakban, amelyek szorosabban kötődnek villamos hálózatokhoz,

abban az értelemben használják a technikát, ahogy bemutattam eddig [4], [6]. A továbbiakban is ebben az értelemben fogok rá hivatkozni a dolgozatomban.

Minden befolyásoló változóhoz két szélsőérték tartozik, egy maximum és egy minimum. Ha az összes szélsőséges állapotban ki akarjuk értékelni a rendszert, akkor  $2^n$  kiértékelést kell elvégeznünk, ahol  $n$  ismét a paraméterek számát jelöli. Ez a módszernek gyengesége, hiszen a paraméterek számával exponenciálisan nő a kiértékelések száma. Ennek ellenére ez egy könnyen implementálható és robusztus módszer, és az, hogy ismerjük az összefüggést a paraméterek és a kimenet között, illetve a paraméterek korlátait, nem egy szigorú megkötés. Viszont a módszernek mégis van egy nagy hátránya, amit egy egyszerű példával szeretnék illusztrálni:

Vegyünk egy egyszerű villamos generátort, amelynek ismerjük a Thévenin-helyettesítő képét, így a generátor belső ellenállását is. Ehhez csatlakoztatunk egy kis rezisztív terhelést, amelynek van valamilyen előzetes ismeretünk a szórásáról, így becsülhetjük, hogy a valódi ellenállás értéke milyen értékek között fog változni. Kérdés, hogy mekkora a generátorra kapcsolt ellenálláson disszipálódó teljesítmény? Tegyük fel, hogy a generátor egyenfeszültsége 2 V, belső ellenállása pedig 1  $\Omega$  és 2  $\Omega$  között változik. A generátorhoz csatlakoztatott ellenállásról tudjuk, hogy értéke 0.6  $\Omega$  és 1.6  $\Omega$  között változhat:



2.1 ábra:

Generátorhoz csatlakoztatott ellenállás.  $R_g = [1; 2] \Omega$ ,

$V_g = 2 \text{ V}$ ,  $R_{ki} = [0.6; 1.6] \Omega$

A 2.1 ábrán feltüntetett hálózatra könnyen belátható az összefüggés, amely leírja a csatlakoztatott  $R_{ki}$  ellenálláson disszipálódó teljesítményt:

$$P_{R_{ki}} = \frac{V_g^2 R_{ki}}{(R_{ki} + R_g)^2} \quad (2.1)$$

Ha ezt megvizsgáljuk *EVA*-val és kiértékeljük  $2^2$  pontban a feszültség és kimeneti ellenállás értékei szerint:

P	$R_g = 1 \Omega$	$R_g = 2 \Omega$
$R_{ki} = 0.6 \Omega$	937.5 mW	355 mW
$R_{ki} = 1.6 \Omega$	946.7 mW	493.8 mW

2.1 Táblázat: Teljesítmény becslése *EVA*-val

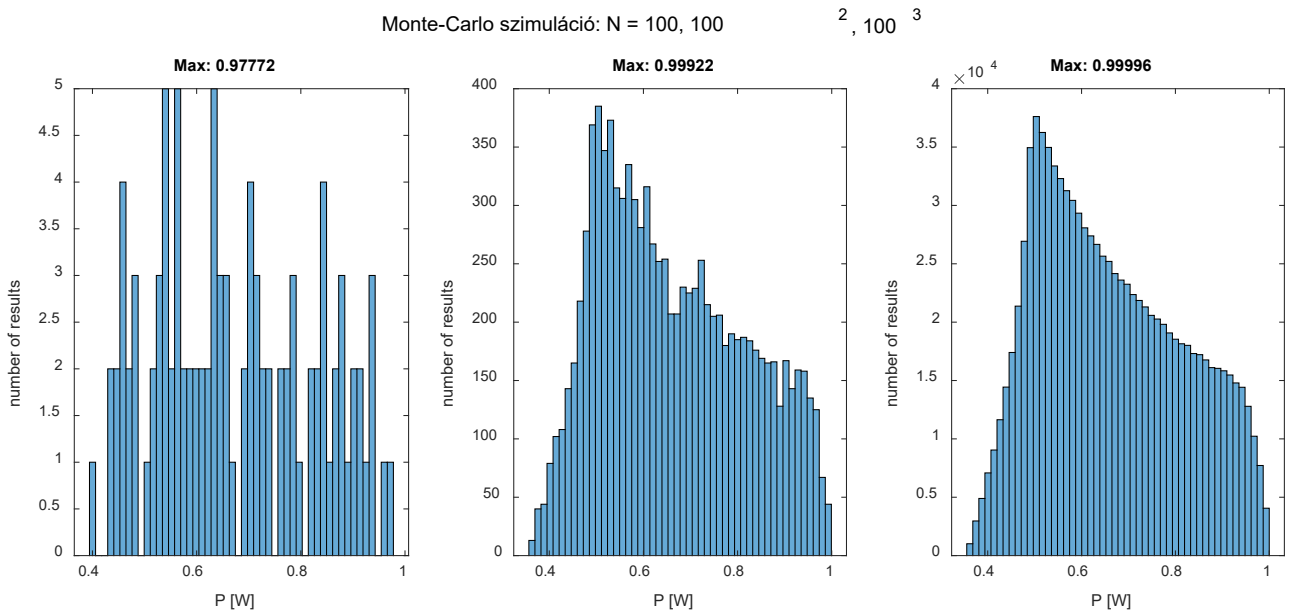
A 2.1 táblázat alapján azt becsülnénk, hogy a teljesítmény 355 mW és 946.7 mW között változhat, ami hibás lenne! A (2.1) összefüggés alapján tudjuk, hogy a maximális disszipáció illesztett lezárás esetén várható [7], amikor  $R_{ki}$  és  $R_g$  egyezik és  $R_g$  minimális. Ekkora a disszipáció 1 W.

Ennek a metodikának a gyengesége, hogy azt feltételezi, hogy a befolyásoló paraméterek szélsőértékeihez a kimenetnek is egy szélsőértéke tartozik. Ez viszont általánosan nem teljesül. Csak abban az esetben igaz, ha a paraméterek által definiált tartományon a függvény monoton [4]. Tehát az *EVA* egyszerűen implementálható, és egzakt eredményt ad becslésként, ami pozitívum, de ügyelni kell arra, hogy az adott függvény a paraméterek által definiált tartományon monoton legyen, így biztosítva azt, hogy a becslés helyes.

### 2.1.2 Monte-Carlo Analízis

A Monte-Carlo szimulációk, az előző fejezetben bemutatott *extreme value analysis*-hez képest nem adnak egzakt végeredményt. Ebben az eljárásban is szükséges előre ismerni a kimenetet leíró függvényt. Ezen kívül szükséges valamilyen előzetes ismeret a változók eloszlásáról is. A módszer során véletlenszerűen generáljuk a befolyásoló paraméterek különböző értékeit, majd az így kapott pontokban kiértékeljük a függvényt.

Ha a befolyásoló paraméterek eloszlásáról nincs ismeretünk, de tudjuk azoknak alsó és felső korlátait, akkor egy kézenfekvő implementáció lehet, ha a paraméterek tartományán belül egyenletes eloszlást feltételezünk, és úgy vizsgáljuk a problémát. Ez egy gyakran használt konvenció a gyakorlatban. Ezt szemlélteti a következő ábra is. A szimuláció során a 2.1.1 alfejezetben vázolt problémát szimuláltam úgy, hogy  $V_g$  és  $R_{ki}$



2.2 ábra:

A 2.1.1 fejezetben vázolt probléma monte-carlo analízise

paraméterek értékét a hozzájuk tartozó intervallumon belül mintavételeztem egyenletes eloszlás szerint, majd kiértékeltem a (2.1) összefüggést.

Az ábrán az lászik, hogy ahogyan növeltem a kísérletek számát, kirajzolódik a hisztogramnak egy markáns jellege. Ez alapján lehetne következtetni az eredő eloszlásra [8], de ez messze túlmutat a dolgozat tematikáján. Az én feladatom szempontjából viszont a releváns észrevétel az, hogy az elméleti 1 W-os teljesítménymaximumhoz konvergálni látszódnak az eredmények. Ennek a módszernek a hátránya az, hogy a köztes pontokat (a nem szélsőértékeket) is számolja, amely a worst-case analízis szempontjából nem érdekes. A módszer a valódi szélső értéket nem fogja megadni, csak egyre növekvő mintaszám esetén konvergál a szélső értékhez.

### 2.1.3 Lineáris hibaterjedés

A lineáris hibaterjedés módszere a függvények első-rendű Taylor-soros közelítésén alapszik. Alapvetően a paraméterek tűrés jellegű bizonytalanságához használatos. Az alapgondolata az, hogy a tervezési feladat paramétereire tartoznak névleges értékek (a nominális munkapontja a rendszernek), amelyeknek ismerjük a tűrését is, illetve a kimenetet leíró függvénykapcsolatot is. A függvényt a munkapontjában egy lineáris görbével helyettesítjük, majd paraméterenként vizsgáljuk, hogy annak a hibája mekkora változást okoz a kimeneten. Mindez formalizálva:

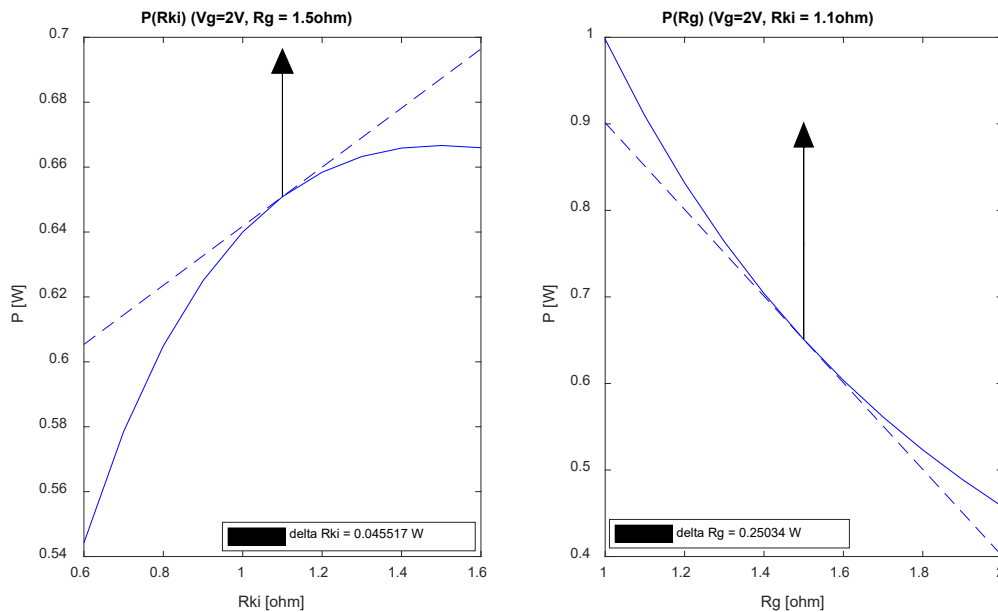
$$f(\mathbf{x}_{M.P.}) + \Delta f_{x_i} \approx f(\mathbf{x}_{M.P.}) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (2.2)$$

A (2.2) egyenletben  $\mathbf{x}_{m.p.}$  jelöli a paraméterek munkaponti értékeit vektorba foglalva. Az egyenlet alapján minden paraméter hatását külön vizsgáljuk, majd ezeket a hatásokat összegezzük. Van lehetőség többféleképpen is összegezni ezeket a hatásokat, és ezeknek mind van létjogosultsága a különböző analízisfeladatokban [9]. A dolgozat szempontjából releváns az úgynevezett worst-case összegzés. Ebben az esetben a hatások abszolút értékeit összegezzük, így eljutva a legszélsőségesebb becslésig:

$$|\Delta f|_{W.C.} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \quad (2.3)$$

$$f_{W.C.} = f(\mathbf{x}_{M.P.}) \pm |\Delta f|_{W.C.} \quad (2.4)$$

Ha megvizsgáljuk ezzel a 2.1.1 fejezetben ismertetett példát, akkor figyelembe kell vennünk  $R_g$  és  $R_{ki}$  változását. Tegyük fel, hogy a munkaponti értéke a paramétereknek az intervallumok számtani közepénél van, tehát  $R_{g,névleges} = 1.5 \Omega$  és  $R_{ki,névleges} = 1.1 \Omega$ . Ekkor kiértékelhetjük a (2.3) összefüggésben szereplő tagokat a parciális deriváltakat kiszámolva. Ezt szemlélteti a következő ábra:



2.3 ábra:

(2.1) egyenlet alapján számolt lineáris közelítések (szaggatott vonal)

Az ábra nyomán összegezzük a hibákat, így becsülve a maximális disszipációt. (A korábban említett névleges ellenállás értékekhez tartozó névleges teljesítmény 650.9 mW. A többi adat leolvasható a 2.3 ábráról).

$$P_{W.C.} = P_{névleges} + \Delta P_{R_{ki}} + \Delta P_{R_g} = 946.7 \text{ mW} \quad (2.5)$$

Ebben az esetben is alulbecsültük az elméleti 1 W-os teljesítménymaximumot. Ennek oka, hogy a parciális deriváltaktól függően a teljesítményt alul-, vagy fölülbecsülhetjük, ahogyan a 2.3 ábra is mutatja. Ennek a metodikának pontosan ez a hátránya, hogy a tévedés nagyban függ a függvény parciális deriváltjaitól. Ez a probléma enyhíthető, ha a paraméterek szórása kicsi, és szűkebb tartományban közelítjük a függvényt a hozzá tartozó lineárisal. A bemutatott példa a szemléltetés végett nagy paraméter szórásokkal dolgozik, de az elektronikai iparban a komponensekre jellemző szórások nagyságrendekkel kisebbek, így ez a technika sok esetben alkalmazható. Egy nem



elhanyagolható hátránya még az eljárásnak, hogy ismernünk kell a függvényhez tartozó parciális deriváltakat, és azoknak értelmezhetőeknek kell lenniük a névleges paraméterek által definiált munkapontban.

## 2.2 Újszerű módszerek

A korszerű metodikák nem minden esetben csak a matematikai analízis eszköztárával dolgoznak, mint a korábban bemutatott módszerek. Ezek gyakran alkalmaznak valamilyen új szemléletet, vagy valamilyen heurisztikát. A következő két alfejezetben ezekről lesz szó röviden.

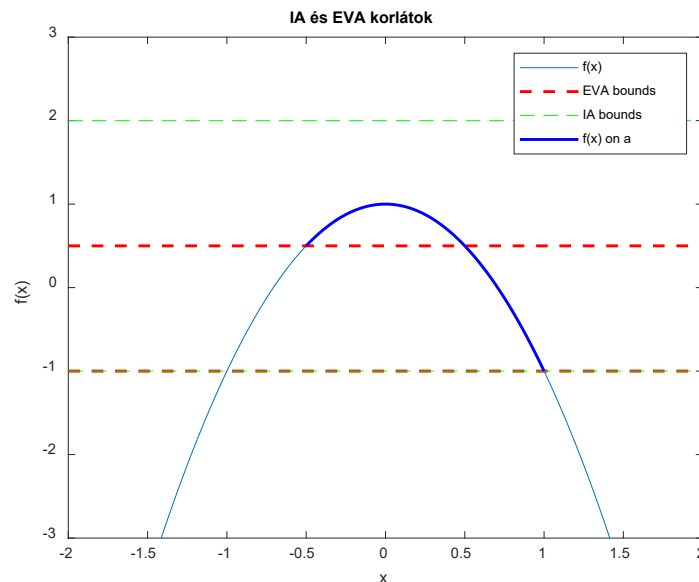
### 2.2.1 Intervallumaritmetika

Az intervallumaritmetika technikáját az 1950-es években dolgozták ki. Elsősorban azért fejlesztették ki az elméletét, hogy a különböző lebegőpontos számítások kerekítési hibáit becsülni tudják [10]. A technika lényege, hogy skaláris számok helyett intervallumokkal dolgozik. Egy intervallumot két valós szám definiál, annak szuprémuma és infimuma. Ezek a fogalmak szintén a matematikai analízis témaköréből származnak. Azért infimummal és szuprémummal vannak definiálva az intervallumok, hogy a nyílt intervallumok is kezelhetőek legyenek matematikailag korrekt módon. Ez valamelyest hasonlít a 2.1.1 fejezetben részletezett *Extreme Value Analysis* technikára, hiszen abban az esetben is a függvény egy változójához két numerikus értéket rendelünk, annak minimumát és maximumát. A különbség a két módszer között abban van, hogy az intervallumokra definiálva vannak a matematikai alpműveletek, azok kezelhetőek, mint számítási egység. Ezek úgy vannak definiálva, hogy legalább olyan széles intervallumot eredményezzenek, mint az *EVA* módszere. Ez ennek a technikának a hátránya is, hogy sok esetben ad túlzó korlátokat, de természetesen worst-case analízisfeladatok esetében, ahol a biztonság irányába cél tévedni, ez ritkán okoz gondot. Arról, hogy ezek a műveletek hogyan vannak definiálva a későbbi fejezetekben lesz szó. Ezt a különbséget demonstrálja a következő egyszerű példa. Adott egy parabolát leíró összefüggés, amit  $a$  intervallumon értelmezünk a példában:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \quad (2.6)$$

$$a \in (-0.5; 1) \quad (2.7)$$

*EVA*-val megvizsgálhatjuk  $a$  szélsőértékeit, és azt kapjuk, hogy  $f$  értéke az  $a$  által definiált intervallumon 0.5 és -1 között változik. (A hiba ismét abból fakad, hogy a vizsgált függvény nem monoton.) Ehhez képest, ha  $a$ -t intervallumként kezeljük, az intervallumokra definiált műveletekkel [11], akkor végeredményként azt fogjuk kapni, hogy  $f$  értéke -1 és 2 között változhat. Arról, hogy miért nem a helyes -1 és 1 korlátok adódnak, a 6. fejezetben írok. (2.6) alapján tudjuk, hogy ezen az intervallumon csak -1 és 2 között változhat  $f$  értéke, de ez mégis előrelépés az *EVA*-hoz képest, hiszen egy nem monoton függvény korlátait helyesen becsüli az intervallumaritmetika, hogy szűkebb helyett tágabb intervallumot (egy külső közelítést) kapunk eredményként. Ezt mutatja a 2.4 ábra.

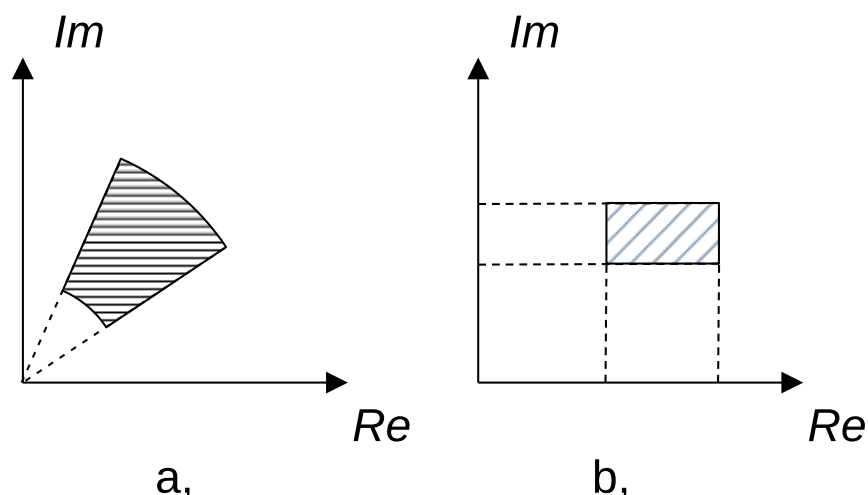


2.4 ábra:

Intervallumaritmetikával és *EVA*-val kapott korlátok (2.6) és (2.7)-re. (IA = Interval Arithmetic).

## 2.2.2 Komplex intervallumaritmetika

A valós intervallumaritmetika kiterjeszthető komplex számokra is [11]. Ez a valós intervallumaritmetika definícióiból és műveleteiből van származtatva. Ebben az esetben a komplex számot már két intervallum, azaz négy valós szám jellemzi. Intervallumaritmetikában is van lehetőség a komplex számokat többféleképpen definiálni. Ha a Descartes koordinátarendszert használjuk, akkor a valós részéhez és a képzetes részéhez rendelünk egy-egy intervallumot. Ha polárkoordináta-rendszert használunk, akkor a komplex szám hosszához és szögéhez rendelünk egy-egy intervallumot:



2.5 ábra:

Komplex intervallumok polárkoordináta-rendszerben (a) és Descartes koordináta-rendszerben (b).

Ahogy a 2.5 ábra is mutatja, a polárkoordináta-rendszerben a komplex intervallumok csonka körcikkéket definiálnak, míg a Descartes koordináta-rendszerben négyszögeket. A gyakorlatban sűrűben használják az utóbbit, mert egyszerűbb implementálni és műveleteket végezni vele [11]. A villamosmérnöki gyakorlatban sokszor kezelünk komplex számokat, így a komplex intervallumok hasznos eszközök lehetnek.

### 2.2.3 Optimalizációs algoritmusok

Mivel az 1.2 fejezetben vázolt probléma ((1.1) egyenlet) egy szélsőérték keresési probléma, így a megoldásához alkalmazhatóak különböző optimalizációs algoritmusok,  $f(\mathbf{x})$  maximumára törekedve.

Ezek közül a leginkább magától értetődő algoritmus a naív keresés. Ez a „nyers erő” módszere. Ebben az esetben bejárjuk a teljes paraméterteret, majd miután  $f(\mathbf{x})$ -et kiértékelünk a paraméterek által definiált pontokban, ki tudjuk választani a maximumot [12]. Ez egy buta módszernek tűnik, de mivel a számítási kapacitás fajlagos költsége csökken évről-évre, egyszerűbb problémák esetén ennek a megközelítésnek is van létjogosultsága.

A technológia fejlődésével egyre hatékonyabban lehetett elvégezni a különböző numerikus módszereket, amelyek iteráción alapulnak, mint például a különböző gradiens-alapú módszerek. Ezek a függvénynek a gradiensét felhasználva konvergálnak az optimumhoz iterálva, így az analitikus összefüggésről szükséges előzetes ismeret. Ezek közül a legelterjedtebb talán a *Gradient Descent Method* (amit a magyar szakirodalomban

csak egyszerűen *gradiens-módszernek* nevezünk). Ez egy könnyen implementálható algoritmus, hátránya, hogy az algoritmushoz tartozó kezdeti feltételektől függően különböző optimumokat találhat meg, így előfordulhat, hogy nem a legnagyobb lokális szélsőértéket találja meg a korlátos intervallumon.

További modern algoritmusok sok esetben alkalmaznak valamilyen heurisztikát. Ilyen a szimulált lehűtés módszere (*Simulated Annealing*), illetve a különböző evolúciós és genetikus algoritmusok. Ezeket a módszereket a teljesség kedvéért említettem meg a dolgozatomban, de ennél mélyebben nem tárgyalom. Az érdeklődő olvasó a [3] és a [12] tájékozódhat ezekről jobban.

## 3. Áramkörreprezentációk

Az előző fejezetekben bemutatott algoritmusok és technikák valamilyen szinten mind építettek arra, hogy a rendszerről volt valamilyen előzetes ismeretünk. Ez a gyakorlatban a rendelkezésünkre áll, ennek lehet több fajtája is.

### 3.1 Kapcsolási rajzok

A villamosmérnöki gyakorlatban a legtöbb esetben, ha elektromos hálózatokat tervezünk vagy szimulálunk, akkor azokat kapcsolási rajzokkal ábrázoljuk. Erre láttunk egy példát a bevezetésben az 1.1 és 1.2 ábrákon. Ez a reprezentáció a fizikai valóságot tükrözi: azt, hogy a komponensek kivezetései hogyan kapcsolódnak egymáshoz. Ezeket manapság jellemzően valamilyen grafikus felületen hozzuk létre, amelyben integrálva vannak különböző megoldó szoftverek is. Ezek a szoftverek a topológia és a komponenseket leíró karakterisztikák alapján fel tudják írni a rendszert leíró egyenleteket. Ezek lineáris egyenletrendszerek, amelyeket a megoldó numerikusan fog kiértékelni a különböző analízisfeladatokhoz. A kapcsolási rajzokban van lehetőség nemlineáris eszközöket is modellezni, ha a nemlinearitás tükrözve van a karakterisztikájukban. Viszont, a modern szimulációs programok a megoldás számításához ezeket az eszközöket a munkapontjukban linearizálják [13].

### 3.2 Dinamikus leírás

Ha ezt a leírásmódot használjuk, akkor a rendszert a különböző dinamikus komponensei alapján írunk le, amelyeknek karakterisztikái differenciálegyenletek. Ezekkel a differenciálegyenletekkel kifejezhetjük a rendszer mennyiségeit, majd abból származtathatjuk a kimenetet, az ezekből alkotott differenciálegyenletrendszerek alapján. Ebből fakadóan ez a fajta leírás nem szigorúan elektromos rendszerekhez van kötve, de ott is használatos, hiszen a lineáris, invariáns, kauzális rendszerek széles osztálya, mint például a Kirchhoff-hálózatok osztálya jellemezhető ezzel a leírással [7]. A villamos hálózatokban a differenciálegyenleteket a dinamikus kétpólusok adják: a kondenzátor és az induktivitás. Ezeknek karakterisztikái differenciálegyenletek. Ennek a leírásnak egy általános alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q,1} & \cdots & C_{q,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,1} & \cdots & D_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{q,1} & \cdots & D_{q,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A (3.1) (3.2) egyenletek egy több bemenetű, több kimenetű rendszert reprezentálnak. Az egyenletekben  $x$  jelöli a rendszer állapotváltozóit, amiket a villamosmérnöki gyakorlatban a kondenzátorok feszültségeként és az induktivitások áramaként szokás definiálni, hiszen azokra ismeretesek a differenciális összefüggések.  $u_i$  képviseli a rendszer gerjesztéseit. Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  paraméterek a rendszer jellemző paraméterei. Ezek lehetnek a különböző kétpólusok értékei: induktivitások, ellenállások, kapacitások stb..  $y_i$  jelöli a rendszer kimeneteit.

Ezt az egyenletrendszert megkaphatjuk az áramkör kapcsolási rajza alapján is, ha felírjuk a megfelelő számú csomóponti és hurokegyenletet, majd azokat rendezzük a kimenetek és az állapotváltozók szerint. Tehát a Kirchhoff-törvények és a kétpólusok karakterisztikái teremtenek kapcsolatot a kapcsolási rajz és a dinamikus leírás között, így létezik a kapcsolásnak egyértelmű dinamikus megfeleltetése. Ha a rendszernek csak egy kimenete és egy gerjesztése van, akkor a (3.1) (3.2) egyenletrendszerek egyszerűsödnek némileg. Tömörebb írásmóddal a rendszer dinamikus leírása ebben az esetben:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \quad (3.3)$$

$$y = \underline{C}^T \underline{x} + D u \quad (3.4)$$

A korábbi leíráshoz képest itt a  $B$  és  $C$  paraméterek mátrix helyett csak vektort alkotnak,  $D$  pedig a korábbi vektorhoz képest skalárt.

### 3.3 Átviteli függvény

A (3.3) és (3.4) egyenletek alapján a Laplace transzformációval [7] áttérhetünk a komplex frekvenciatartománybeli vizsgálatokra. Az áttéréshez az állapotváltozók kezdeti értékeit zérusnak vesszük. Ekkor az áttérés:

$$W(s) = \underline{C}^T [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{B} + D \quad (3.5)$$

A (3.5) összefüggés  $n = 1, 2$  vagy 3-adfokú rendszerekre könnyen elvégezhető analitikusan is. Nagyobb fokszámú, bonyolultabb rendszerekre pedig léteznek numerikus eljárások, amivel  $W(s)$  számítható [7]. Az áttérésnek az eredménye általánosan, egy függvény, ami felírható polinomok hányadosaként:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.6)$$

$$\deg(B(s)) = m, \deg(A(s)) = n \quad (3.7)$$

A (3.6) összefüggésben a számláló polinomjának fokszáma  $m$ , a nevező polinomjának fokszáma  $n$ . A gyakorlati feladatok jelentős részében ez az átvitel egy racionális törtfüggvény, azaz  $n \geq m$  [7]. Az átvitel számlálójának gyökeit zérusoknak, a nevező polinomjának gyökeit pólusoknak nevezzük. Felírható a (3.6) gyöktényezős alakja általánosan, amit pólus-zérus alaknak is hívnak:

$$W(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (3.8)$$

A rendszer dinamikáját nagy mértékben befolyásolják a pólusai. A pólusok a későbbi fejezetekben is fontos szerepet játszanak. A rendszer pólusait közvetlenül a dinamikus leírásából is meg lehet határozni, ha megfigyeljük a (3.5) egyenletben szereplő inverz mátrixot:

$$[s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}(s\underline{I} - \underline{A})}{\det(s\underline{I} - \underline{A})} \quad (3.9)$$

Ha megfigyeljük, hogy (3.9)-ben hogyan adódik az inverz, akkor észrevehetjük, hogy a számlálóban szereplő determináns pont a (3.3)-ban használatos  $A$  rendszermátrix karakterisztikus polinomját adja, ami egyben az átviteli függvény nevezőjének  $A(s)$  polinomját fogja adni. Ennek a karakterisztikus polinomnak a gyökei az  $A$  mátrix sajátértékei és egyben az átvitel pólusai is, tehát a rendszer pólusait a dinamikus reprezentációban használt egyenletrendszer együtthatóiból származtathatjuk.

Szeretnék arra rávilágítani, hogy az előző fejezetekben leírtak alapján, a csomóponti és hurokegyenletek felírásával és a (3.3) és a (3.5) összefüggésekkel a kapcsolási rajz alapján kiszámítható az átviteli függvény. Egyszerűbb hálózatok esetében ez elvégezhető analitikusan, bonyolultabb hálózatok esetében pedig hatékonyan számolható numerikusan. Ezen oknál fogva a dolgozat további részében leginkább az átviteli függvényeket vizsgálom, hogy milyen további megfontolások tehetőek a worst-case analízisfeladatok megoldásainak optimalizálásának érdekében.



## 4. Szeparálhatóság

Az 1.1 fejezetben bemutatott példán keresztül láttuk, hogy az analizálandó áramkör több részre bontása csökkentette a számítási igényt. Ha arra szorítkozunk, hogy a paraméterek és a kimenet közötti kapcsolat leírható függvénykapcsolattal, akkor a függvényt analizálva felderíthető, hogy az hogyan bontható több részre.

Erre vegyük a következő példát. Tegyük fel, hogy az (1.1), (1.2), (1.3) egyenletekkel definiált problémát a következő egyszerű függvénykapcsolat írja le:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2}{x_3} \quad (4.1)$$

A (4.1) egyenleten látszik, hogy összegként áll elő, de az összeg egyik tagjában sem szerepel egyszerre az összes változó. Tegyük fel, hogy ennek a kifejezésnek a maximális értékét keressük és tudjuk, hogy a paraméterek értéke minden esetben pozitív. Mivel a kimenet összegként áll elő, tudjuk, hogy akkor lesz maximális, ha a tagok is maximálisak. Az összeg egyik tagja maga  $x_1$ . A másik tagja  $x_2$  és  $x_3$  hányadosa. A hányadosról pedig tudjuk, hogy akkor maximális, ha a számlálója maximális, nevezője pedig minimális. Tehát, ahelyett, hogy a háromdimenziós paraméterterben vizsgálnánk, elég azt megnéznünk, hogy  $x_1$ -nek és  $x_2$ -nek mi a maximuma, illetve, hogy  $x_3$ -nak mi a minimuma. Az analízisfeladatot az eredeti háromdimenziós problémáról visszavezettük 3 egydimenziós problémára, és ez megkönnyítette a feladatot.

### 4.1 Matematikai megfogalmazás

A cél tehát az, hogy az eredeti szélsőérték-keresési problémát úgy dekomponáljuk több problémára, hogy azok egymástól függetlenül legyenek megoldhatóak, és a részeredményekből származtatni lehessen az eredeti feladat megoldását. Ezt elsősorban a paraméterek irányából közelítettem meg. Adott az (1.1), (1.2), (1.3) egyenletekben definiált probléma, ahol  $n$  befolyásoló paraméter van. Legegyszerűbb esetben a kiindulási feladatot két részproblémából származtatjuk. Ekkor a cél meghatározni a befolyásoló paramétereknek egy olyan diszjunkt bináris csoportosítását, amelyekre igaz, hogy a csoportoknak egyik tagja se szükséges egyszerre a részproblémák kiértékeléséhez. Ezt formalizálhatjuk a következőképpen:

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{H}\{g(\mathbf{x}^{[A]}), h(\mathbf{x}^{[B]})\} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}^{[A]} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad \mathbf{x}^{[B]} = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}^{[A]} \cup \mathbf{x}^{[B]} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x}^{[A]} \cap \mathbf{x}^{[B]} = \emptyset \quad (4.4)$$

(4.2) egyenletben a  $\mathcal{H}$  operátor köti össze a részproblémákat, amik a paraméterek függvényei. Ez az operátor jellemzően valamilyen alpműveletet képvisel.  $\mathbf{x}^{[A]}$  és  $\mathbf{x}^{[B]}$  a paramétereknek két halmaza, amelyek diszjunktak, és uniójuk adja a paraméterek teljes halmazát.

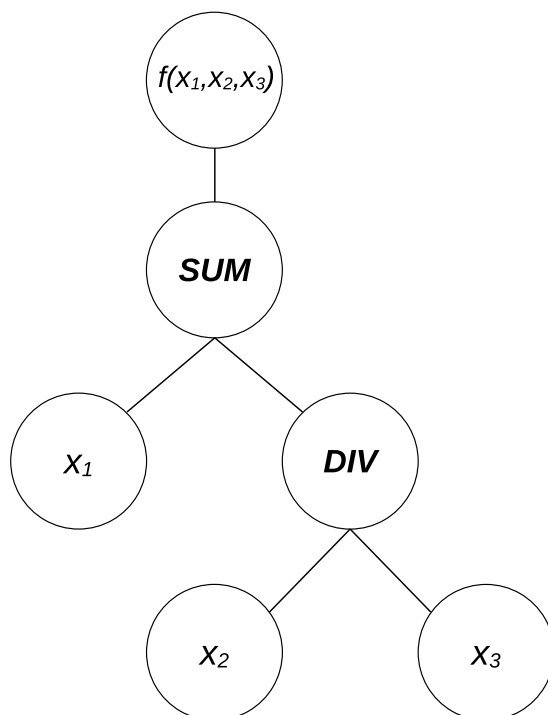
Ha ilyen modellt szeretnénk alkotni a (4.1) összefüggés és az utána írt megfontolások alapján, a következő adódik:

$$\mathcal{H} = "+" \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}^{[A]} = \{x_1\} \quad \mathbf{x}^{[B]} = \{x_2, x_3\} \quad (4.6)$$

$$g(x_1) = x_1 \quad h(x_2, x_3) = \frac{x_2}{x_3} \quad (4.7)$$

Ha a problémához a paramétereknek a bináris csoportosításait keressük, és az egyik csoport nem egy elemű, akkor előfordulhat, hogy az még tovább szeparálható. Például (4.7) egyenletben szereplő  $h$  is, ahogy a fejezet elején tárgyaltuk. Ennek az eredménye az lesz, hogy a probléma alapján konstruálhatunk egy bináris fa struktúrát, ami szerint kiértékelhetjük a függvényt. Ezt mutatja a 4.1 ábra. A példában a bináris fa levélelemei (egységnyi fokszámú csúcsok) az identitásfüggvények voltak, aminek a szélsőértékei egyezni fognak természetesen az adott paraméter szélsőértékeivel. Szeretnénk rávilágítani arra, hogy az elődöket, (amelyek a levelek szélsőértékeit felhasználják) azért tudjuk könnyen kiértékelni, mert alpműveletekről van szó és ezeket jól ismerjük. Tudjuk hogyan fognak alakulni a szélsőértékek az operandusok függvényében.



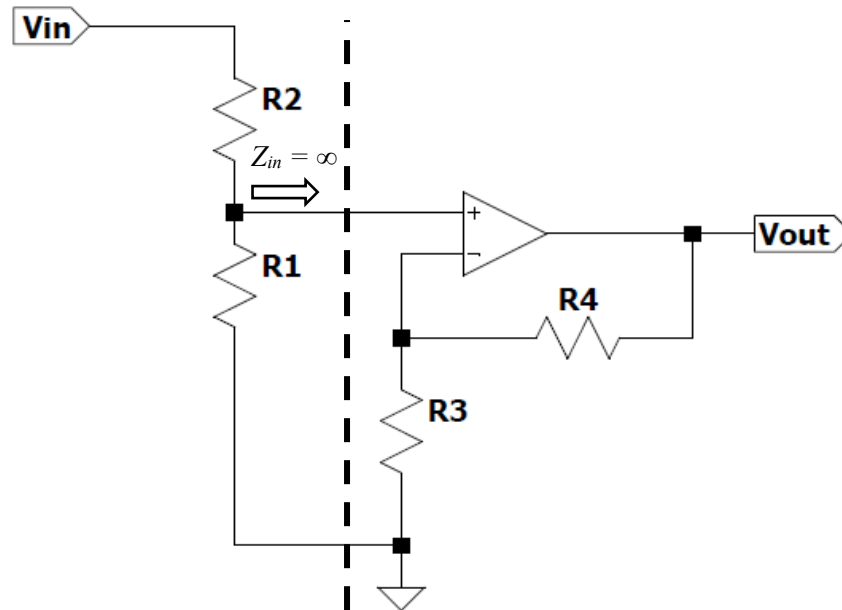
4.1 ábra:

(4.1) egyenlethez tartozó bináris fa

## 4.2 Szeparálhatóság topológia alapján

Az 1. fejezetben láthattuk, hogy van mód arra, hogy szimplán a topológia alapján felbontsuk a worst-case analízisfeladatot több részre. Az 1.2 ábrával kapcsolatban a megfontolás az volt, hogy az egymást követő fokozatok bemeneti ellenállása jó közelítéssel végtelen, így az előzetes hálózat részére transzparens. Ha nem is fordul elő minden áramkörben, de ez nem egy speciális eset tekintve a mai kapcsolástechnikát, amiben műveleti erősítőket, MOSFET-eket használunk.

Erre egy egyszerű példa a következő kapcsolás, amiben egy rezisztív feszültségosztót egy neminvertáló erősítőfokozat követ. Ez látszik a 4.2 ábrán. Ebben a kapcsolásban, ha szeretnénk felírni analitikusan az ideális műveleti erősítő neminvertáló lábánál lévő potenciált, akkor ahhoz csak  $R_1$ -re és  $R_2$ -re lesz szükségünk pontosan azért, mert az osztót követő műveleti erősítőbe nem folyik áram, a követő fokozat a bemeneti rezisztív osztó számára transzparens.



4.2 ábra:

Rezisztív osztó és neminvertáló fokozat.

A 4.2 ábrán látható esetben a bemeneti impedancia végtelen volt. Ez egy közelítés, nem létezik ideális műveleti erősítő. Innen adódhat az ötlet, hogy kezeljük azokat az eseteket is, amikor az előzetes fokozat által látott impedancia, ha ugyan nem is végtelen, de nagy, és ez alapján definiáljunk valamilyen metrikát, amivel jellemezhetjük a rendszer egyes csomópontjait, hogy mennyire „szorosán” kapcsolódnak egymáshoz. Erre olvasható egy példa a [14] számú irodalomban, ahol a csomópontokat a hozzá kötődő impedanciákkal súlyoznak, és ez alapján történik a dekompozíció. Ennél bővebben a dolgozat keretében nem foglalkoztam a topológia alapján történő dekompozícióval. Ennek az oka, hogy nehéz általánosítani, mert az, hogy mely hálózatrészek függetleníthetők egymástól függ a feladattól (a kérdéses mennyiségtől) is. Nem feltétlenül jutunk a hálózatnak ugyan ahhoz a felosztásához, ha különböző mennyiségeit vizsgáljuk.

## 5. Szeparálhatóság átviteli függvény alapján

A korábbiakban (4.1 fejezet példája) láttuk, hogy amennyiben rendelkezésünkre áll valamilyen analitikus összefüggés, akkor az segítség, hiszen ezt megvizsgálhatjuk és van esély arra, hogy több részre tudjuk bontani a problémát. Ha a rendszer valamely kimenete érdekes számunkra, akkor ez az összefüggés az adott kimenethez tartozó átviteli függvény, amit a 3.3 fejezetben tárgyaltam. Ez egy kézenfekvő választás a rendszer leírására, hiszen az áramköri kapcsolásból, illetve a rendszer dinamikus leírásából is meg lehet kapni.

### 5.1 Szeparálhatóság vizsgálata parciális törtekre bontással

Szorítkozzunk most erre az esetre, tegyük fel, hogy a rendszert le tudjuk írni egy átvittel a komplex frekvenciatartományban. Ennek az eredménye egy komplex szám, amely a frekvencián kívül, a befolyásoló paraméterektől is függ, és felírható polinomok hányadosaként. Továbbá tudjuk, hogy ha egy megvalósítható elektromos rendszerről beszélünk, akkor ez az átvitel racionális törtfüggvényt fog adni:

$$W(s, \mathbf{x}) = \frac{B(s, \mathbf{x})}{A(s, \mathbf{x})} = \frac{b_m(\mathbf{x})s^m + b_{m-1}(\mathbf{x})s^{m-1} + \dots + b_0(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})s^n + a_{n-1}(\mathbf{x})s^{n-1} + \dots + a_0(\mathbf{x})} \quad (5.1)$$

$$m \leq n \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \quad (5.2)$$

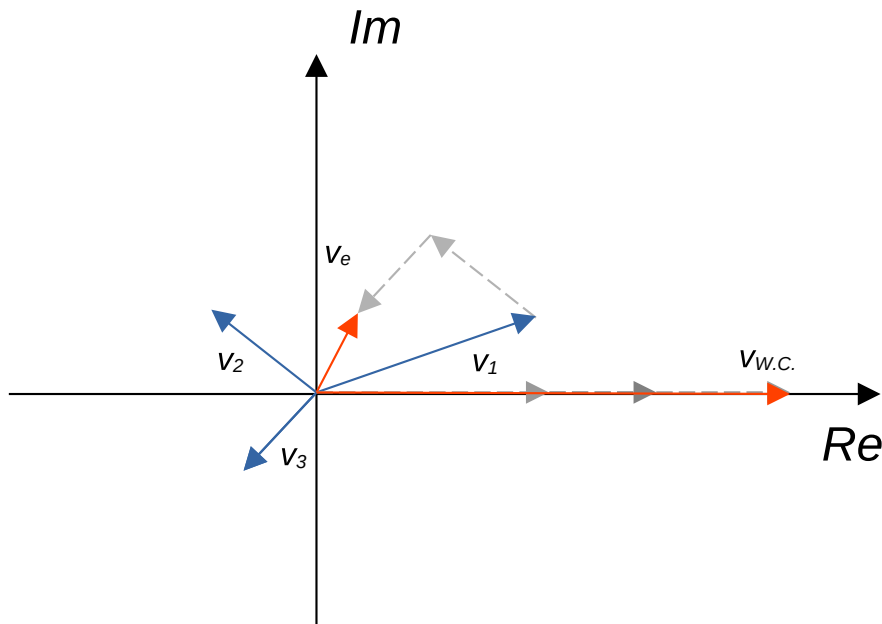
$\mathbf{x}$  a korábbi jelöléshez hasonlóan a befolyásoló paramétereket foglalja magában egy  $N$  elemű vektor. Tegyük fel, hogy vizsgálandó, hogy  $W(s, \mathbf{x})$  komplex átvitelt hogyan befolyásolják a különböző paraméterek. Mivel  $W$  egy komplex szám, jellemezhető az abszolút értékével és fázisával. Az előző fejezetben a fontos észrevétel az volt, hogy ha az analitikus kifejezést összeg formára hozzuk, akkor könnyebben számíthatóak a szélsőértékei. Racionális törtfüggvények esetében erre van lehetőség, ez a parciális törtekre bontás módszere. A technika során a komplex átvitelt tagok összegére bontjuk, ahol a tagok szintén polinomok hányadosaiként adódnak. Ezt elvégezhetjük (5.1) egyenlet pólus-zérus (gyöktényezős) alakja alapján. Megvalósítható hálózatok esetében az (5.1) egyenletben szereplő  $B(s, \mathbf{x})$  és  $A(s, \mathbf{x})$  együtthatói valósak lesznek, ezért gyökei vagy valósak lesznek, vagy komplex konjugált párok. Ezen felül előfordulhatnak a gyökök többszörös multiplicitással. Ha ismerjük a nevező polinomjának gyökeit (a pólusokat), felírható [7]:

$$W(s, \mathbf{x}) = \frac{b_m(\mathbf{x})s^m + b_{m-1}(\mathbf{x})s^{m-1} + \dots + b_0(\mathbf{x})}{(s - p_n(\mathbf{x}))(s - p_{n-1}(\mathbf{x})) \dots (s - p_0(\mathbf{x}))} \quad (5.3)$$

$$W(s, \mathbf{x}) = \frac{K_1(\mathbf{x}^{[1]})}{(s - p_1(\mathbf{x}^{[1]}))^{q_1}} + \frac{K_2(\mathbf{x}^{[2]})}{(s - p_2(\mathbf{x}^{[2]}))^{q_2}} + \dots + \frac{K_n(\mathbf{x}^{[n]})}{(s - p_n(\mathbf{x}^{[n]}))^{q_n}} \quad (5.4)$$

$$W(s, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i(\mathbf{x}^{[i]})}{(s - p_i(\mathbf{x}^{[i]}))^{q_i}} \quad (5.5)$$

Ha az átvitelt felbontjuk ilyen alakra, akkor az (5.5) egyenlet egy összeget ír le, amelyben frekvenciafüggő komplex számok szerepelnek. Az egyenletben  $q_i$  az adott gyök (pólus) multiplicitását jelöli, értéke akkor nagyobb, mint 1, ha az adott pólus többszörös. A számlálókban szereplő  $K_i$  együtthatók, és a nevezőben szereplő  $p_i$  pólusok nem feltétlenül függenek a befolyásoló paraméterek teljes halmazától, hanem annak csak egy részalmazától, ezt jelöli a felső index. Ha ezeket a tagokat a komplex számsíkon ábrázoljuk, akkor vektoriálisan összegezzük őket. Ezt mutatja a következő ábra, ahol a  $v_i$  vektorok az (5.5) összeg tagjait képviselik:



5.1 ábra:

(5.5) összefüggés, mint vektoriális összeg.

Az ábra hivatott illusztrálni, hogy miért is nehéz ez a feladat. Az eredő vektornak ( $v_e$ ) a hosszát az összeg tagjainak nem csak a hossza befolyásolja, hanem a fázisa is, ami szintén változhat a befolyásoló paraméterek függvényében. Ezt könnyíthetjük, ha a tagoknak

képezzük az abszolút értékét, ekkor az átvitel erősítését becsülhetjük felülről ((5.6) egyenlet). Ezt mutatja  $v_{W.C}$  az 5.1 ábrán. Ez viszont csak egy felső becslés, az erősítés alsó korlátjáról nem tudunk másra érdemben következtetni. Továbbá ez csak akkor jelenti a számítási terhek csökkenését, ha az egyes tagok hosszát valóban egymástól függetlenül tudjuk vizsgálni, tehát, ha két tag esetében  $\mathbf{x}^{[i]}$  és  $\mathbf{x}^{[j]}$  metszete az üreshalmaz, hiszen ekkor nincsenek a tagokban közös befolyásoló paraméterek.

$$|W(s, \mathbf{x})|_{W.C.} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{K_i(\mathbf{x}^{[i]})}{(s - p_i(\mathbf{x}^{[i]}))^{q_i}} \right| \quad (5.6)$$

Ha a fázisról szeretnénk valamilyen megfontolást tenni, az hasonlóan nehéz, hiszen az eredő vektor fázisát az erősítéssel analóg módon nem csak a tagok fázisai befolyásolják, hanem a hosszaik is.

## 5.2 Szeparálhatóság vizsgálata pólus-zérus alakkal

Ezzel ellentétben, ha felírjuk az átvitel pólus-zérus alakját, akkor az átvitel abszolút értéke és fázisa is a tagok ismeretében egyszerűbben számítható. Az átvitel gyöktényezős (pólus-zérus) alakja:

$$W(s, \mathbf{x}) = K(\mathbf{x}^{[k]}) \frac{(s - z_1(\mathbf{x}^{[z_1]}))(s - z_2(\mathbf{x}^{[z_2]}) \dots (s - z_m(\mathbf{x}^{[z_m]}))}{(s - p_1(\mathbf{x}^{[p_1]}))(s - p_2(\mathbf{x}^{[p_2]}) \dots (s - p_n(\mathbf{x}^{[p_n]}))} \quad (5.7)$$

$$W(s, \mathbf{x}) = K(\mathbf{x}^{[k]}) \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i(\mathbf{x}^{[z_i]}))}{\prod_{j=1}^n (s - p_j(\mathbf{x}^{[p_j]}))} \quad (5.8)$$

Az (5.7), (5.8) egyenletekben is az  $\mathbf{x}$  vektor felső indexei jelzik, hogy a paraméterek erősítéshez, pólushoz vagy zérushoz tartozó részhalmazáról van szó. Komplex számok szorzatánál az eredő hossz a tagok hosszának szorzataként, az eredő fázis pedig a tagok fázisainak összegeként adódnak:

$$|W(s, \mathbf{x})| = |K(\mathbf{x}^{[k]})| \frac{\prod_{i=1}^m |(s - z_i(\mathbf{x}^{[z_i]}))|}{\prod_{j=1}^n |(s - p_j(\mathbf{x}^{[p_j]}))|} \quad (5.9)$$

$$\arg(W(s, \mathbf{x})) = \left[ \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i(\mathbf{x}^{[z_i]})) \right] - \left[ \sum_{j=1}^n \arg(s - p_j(\mathbf{x}^{[p_j]})) \right] \quad (5.10)$$

Az (5.9) és (5.10) összefüggés a (5.6) egyenlethez képest nem egy felső becslés, hanem az eredő átvitel fázisának és szögének pontos értéke. Az átvitel abszolút értéke és fázisa

egy-egy skaláris mennyiség, így a problémát visszavezettük az 1.2 fejezetben tárgyaltra. Erre már használható az összes optimalizációs eljárás, ami abban a fejezetben be lett mutatva, így kereshetünk az átvitel fázisához és erősítéséhez alsó és felső korlátokat.

Ha megfigyeljük az előző két egyenletet, akkor látszik, hogy a rendszer átvitelét alapvetően 3-féle tag határozza meg: az erősítése ( $K$ ), pólusai, illetve zérusai. Az (5.10) egyenletben ráadásul a 4. fejezetben leírt példához hasonlóan a komplex tagok összegekként és különbségekként adják az eredő átvitelt. A (4.1) példában láttuk, hogy ez könnyebbséget jelentett, hiszen a vizsgálandó paraméterek terét csökkentette. Ebben az esetben viszont nem közvetlenül a paramétereket köti össze az összeg-, és különbségképzés, hanem az  $\arg(s-z_i)$  és  $\arg(s-p_j)$  tagokat. Mi jellemzően a befolyásoló paraméterek korlátjait ismerjük, ahogy az (1.2) egyenlet is mutatja. Viszont, ha ismerjük az analitikus összefüggéseit a pólusoknak és zérusoknak, akkor azoknak is számíthatjuk a korlátait. Természetesen előny, ha a pólusok és zérusok a befolyásoló paraméterek monoton függvénye, de ha az alpműveletek kötik össze a paramétereket az analitikus összefüggésekben, akkor is könnyen adható alsó és felső korlát az adott tagra [11].

Az (5.9) összefüggésben az előbb említett tagokat nem összegzés és különbségképzés köti össze, hanem szorzás és osztás. Ráadásul az egyenletben a tagok abszolút értékeinek szorzatai és hányadosai szerepelnek. Ez is enyhíti a számítási terheket, hiszen pozitív számok szorzata:

- maximális, ha a tagok maximálisak
- minimális, ha a tagok minimálisak

Pozitív számok hányadosára pedig igaz, hogy:

- maximális, ha a számláló maximális, a nevező minimális
- minimális, ha a számláló minimális, a nevező maximális

Ez alapján, ha ismerjük  $(s-z_i)$ ,  $(s-p_j)$  és  $K$  tagok abszolútértékeinek korlátait, akkor könnyebben kiértékelhetjük az erősítéshez tartozó összefüggést, és adhatunk rá korlátokat.

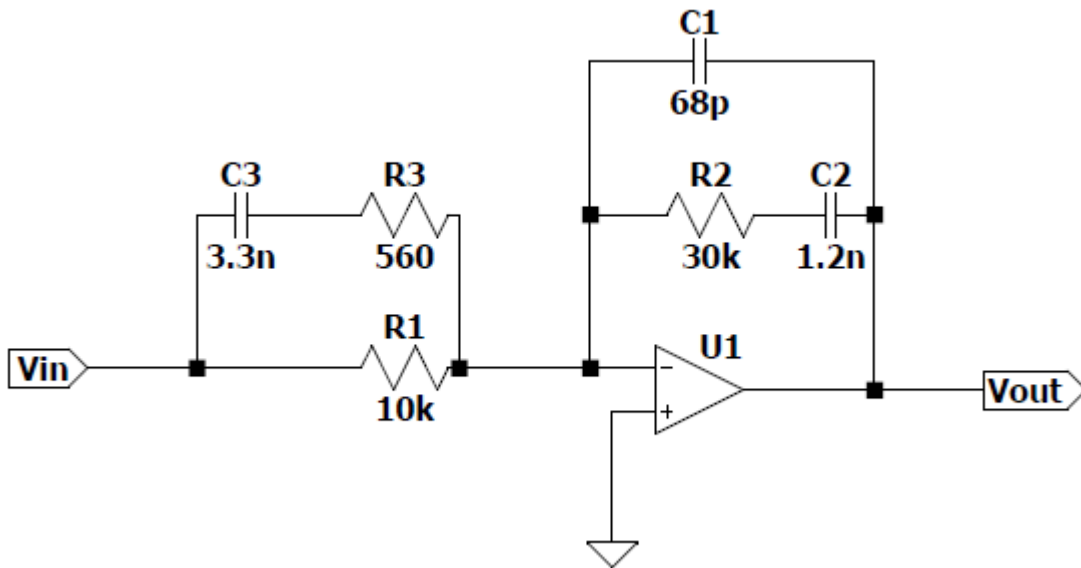
### 5.3 Numerikus átvitelek

Az előzőekben leírtaknál adottnak tekintettük, hogy az átvitelt ismerjük analitikusan, sőt a pólusok, zérusok és erősítés függését is ismerjük a paraméterektől. Ez



nem minden esetben adott. Ha esetleg a kapcsolás sematikus ábrája adva van valamilyen megoldó szoftverben, ami számolja az átvitelt, elveszhetnek az analitikus összefüggések az egyenletrendszerek megoldása során, amikor a megoldó összevonja az azonos dimenziójú tagokat. Például, ha a hálózatba szerepel egy soros  $L$ - $C$  tag, akkor annak impedanciája egy adott frekvencián összevonható egyetlen paraméterbe. Viszont ebben az esetben is rendelkezésünkre állhat az átvitel numerikusan, mint (5.1)-ben, így ismerve  $b_i$  és  $a_j$  együtthatókat. Az előző alfejezetben láthattuk, hogy a pólusoknak és zérusoknak kitüntetett szerepe volt mind a fázis, mind az erősítés számításához. Ezeket származtathatjuk  $b_i$  és  $a_j$  együtthatókból. Az esetek többségében viszont ezt is csak numerikusan tehetjük meg, hiszen a gyökök analitikus kifejezésére az együtthatókból csak harmadfokú polinomokig ismeretes összefüggés. Numerikusan viszont számolható, és szeparálhatóság szempontjából elsősorban az érdekes, hogy az egyes pólusok és zérusok mely paraméterektől függenek. Továbbá a rendszerhez tartozó pólusokat nem csak az átvitelből, hanem a (3.9) összefüggés alapján, a dinamikus rendszert leíró  $A$  rendszer mátrix sajátértékeiként is számíthatjuk.

Ha van lehetőségünk a numerikus átvitelt akár a hálózat, akár a dinamikus leírás alapján újraszámolni a paraméterek különböző állása mellett, akkor tehetünk néhány megfontolást a változókra. Ebben az esetben vizsgálhatjuk numerikusan, hogy a rendszer pólusai és zérusai mely paraméterektől függenek. Vegyük például a következő hálózatot:

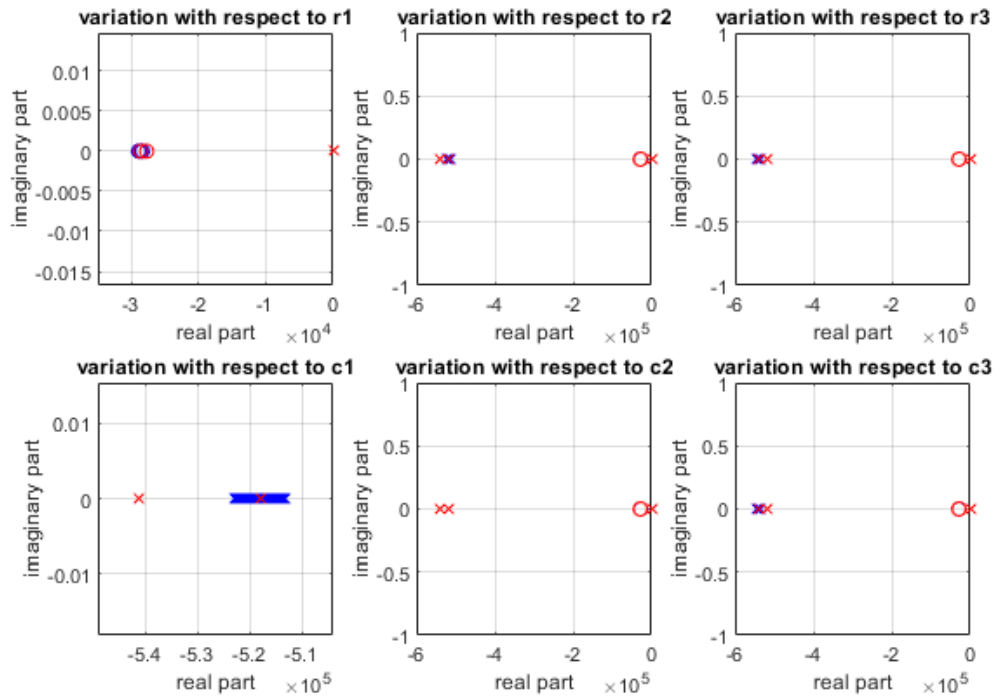


5.2 ábra:

Hálózat a pólusok és zérusok elmozdulásának vizsgálatához.

Tegyük fel, hogy a hálózat feszültségátviteléhez tartozó analitikus összefüggést nem ismerjük, csak a numerikus átvitel együtthatóit, amit megkaphatunk a hálózatra felírható Kirchhoff egyenletek rendezésével. Ha rendelkezésünkre állnak az együtthatók akkor számíthatjuk a gyökeket, így eljutva (5.8) egyenlethez. A szeparálhatóság szempontjából viszont az az érdekes, hogy melyik pólus vagy zérus fog változni, ha az egyes paramétereket állítjuk. Ezt vizsgáltam a következő szimulációban. Mindegyik passzív paraméterhez 10 % tűrést rendeltem, majd mindig kiválasztottam egy paramétert, amelyet állítottam a tűrési tartományon belül a többi elem névleges értéke mellett, majd így vizsgáltam a pólusok és zérusok elmozdulását. Ez látszik az 5.3 ábrán. Pirossal jelöltem a paraméterek névleges értékeihez tartozó pólusokat és zérusokat, kékkel pedig azt, hogy hogyan mozdulnak el az adott paraméter változtatásával. Nehéz szemléletes ábrát készíteni, mert a pólusok és zérusok tág tartományban tudnak változni. Az ábrán azt érdemes megfigyelni, hogy a paraméterek változásával elmozdulnak a pólusok és zérusok, de nem mindegyik paraméternek van erre ráhatása.

### Pole-zero migration with parameter variation



5.3 ábra:

Pólusok és zérusok elvándorlása.

A szimuláció után rendelkezésemre álltak a numerikus értékek, így fel tudtam jegyezni, hogy mely pólusokra és zérusokra mely paraméterek voltak hatással. A rendszer átviteléhez tartozó polinomok fokszámából előre tudható, hogy hány zérusa és hány pólusa lesz. A példában szereplő hálózatnak 3 pólusa és 2 zérusa van, és az alábbi módon függenek a paramétereiktől:

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$p_1$		x		x	x	
$p_2$			x			x
$p_3$						
$z_1$		x			x	
$z_2$	x		x			x

5.1 táblázat:

Pólusok és zérusok függése a paramétereiktől

A táblázat alapján  $p_3$  nem függ egyik paramétertől sem. Ez azért van, mert a rendszer tartalmaz egy integrátort, azaz a nevezőnek gyöke a nulla. Ez látszik is az 5.3 ábrán. A táblázaton pedig az látszik, hogy a paramétereknek létrehozhatjuk egy diszjunkt csoportosítását. Figyeljük meg, hogy a  $p_1$  pólust és  $z_1$  zérust befolyásoló paramétereknek nincsen közös metszete a  $p_2$  pólust és  $z_2$  zérust befolyásoló paraméterekkel. Ez alapján létrehozhatjuk a paramétereknek a következő diszjunkt csoportosítását:

$$\mathbf{x}^{[1]} = \{R_1, R_3, C_3\} \quad \mathbf{x}^{[2]} = \{C_1, C_2, R_2\} \quad (5.11)$$

Ez már elég ahhoz, hogy a rendszer fázisát hatékonyabban vizsgáljuk. Ugyanis (5.10) egyenlet alapján megvizsgálhatjuk, hogy  $\mathbf{x}^{[1]}$  paraméterei szerint a fázisnak hol van szélsőértéke, majd azt, hogy  $\mathbf{x}^{[2]}$  paraméterei szerint hol van, és a két részprobléma által definiált szélsőérték hely fogja adni a teljes probléma szélsőértékének helyét. Így ahelyett, hogy az eredeti 6-dimenziós paraméterterben vizsgálnánk, csak a  $2 \times 3$  dimenziós paraméterterben kell megtalálni a szélsőértékeket.

Az átvitel erősítésének hatékonyabb vizsgálatához nem elég viszont csak a pólusokat és zérusokat szeparálni, hiszen az függ a rendszer  $K$  erősítéstől is. Az erősítést is lehetne vizsgálni a pólusokhoz és zérusokhoz hasonlóan, de az alapján még nehéz lenne a paraméterek közti kapcsolatra következtetni az erősítésben. Viszont, azt meg lehet vizsgálni, hogy az a csoportosítás érvényes-e az erősítésre, amit a pólusokra és zérusokra találtunk. Tegyük fel, hogy igen, és szorzás köti össze a paraméterek halmazát:

$$K(\mathbf{x}) = K_1(\mathbf{x}^{[1]})K_2(\mathbf{x}^{[2]}) \quad (5.12)$$

$$W(\mathbf{x}^{[1]}, \mathbf{x}^{[2]}) = K_1(\mathbf{x}^{[1]})K_2(\mathbf{x}^{[2]}) \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad (5.13)$$

Ekkor generálhatunk értékeket  $\mathbf{x}^{[1]}$  és  $\mathbf{x}^{[2]}$  halmazokhoz a paraméterek tűrésein belül. Legyenek az egyik halmaz paraméterei kötött értékek, míg a másik halmaz értékeit szórjuk a paraméterek tűrés tartományán belül. Vegyünk például két generált  $\mathbf{x}^{[1]}$  halmazt, jelölje  $\mathbf{x}^{[1,1]}$  és  $\mathbf{x}^{[1,2]}$  és csináljuk a következőt:

1. Generáljunk egy  $\mathbf{x}^{[2]}$  halmazt.
2. Értékeljük ki  $W(\mathbf{x}^{[1,1]}, \mathbf{x}^{[2]})$  átvitel erősítését egy adott frekvencián.
3. Értékeljük ki  $W(\mathbf{x}^{[1,2]}, \mathbf{x}^{[2]})$  átvitel erősítését ugyanezen a frekvencián.
4. Vegyük  $W(\mathbf{x}^{[1,1]}, \mathbf{x}^{[2]})$  és  $W(\mathbf{x}^{[1,2]}, \mathbf{x}^{[2]})$  hányadosát.

## 5. Ismételjük meg 1.-et.

Ha így járunk el, és helyes a feltevésünk, hogy  $K$  felbontható (5.12) szerint, akkor azt fogjuk tapasztani, hogy a hányados állandó lesz. Ez azért lesz így, mert a pólusokra és zérusokra már beláttuk, hogy a függésük ezt a diszjunkt csoportosítást követi, így a hányadosban kiejtik egymást az  $x^{[2]}$ -től függő tagok. Ebből a ciklusból végezhetünk  $N$  darabot, és ha minden esetben állandó az erősítés, akkor elfogadjuk, hogy  $K$  szeparálása helyes. Az ismétlés indoklása az, hogy egyszerűen a paraméterek kapcsolatából adódóan előfordulhat, hogy rossz következtetésre jutunk, és ezt azzal szeretnénk kizárni, hogy több véletlen próbálkozást teszünk.

## 6. Intervallumaritmetika

Az intervallumaritmetika technikája már említésre került a 2.2.1 fejezetben. Ahogy ott is szerepel, a módszer alapgondolata, hogy skalárok helyett intervallumokkal dolgozik, amelyeket két valós szám definiál: a szuprémuma és infimuma. Ezekre az intervallumokra definiálva vannak különböző műveletek. A dolgozat szempontjából a legfontosabb, hogy az alpműveletek értelmezhetőek intervallumokkal. Ezen felül még van néhány további tulajdonsága a technikának, de ezekre terjedelmi okokból itt nem térek ki, de [11] számú irodalomban fellelhető. A következő egyenletekben  $[a, b]$  jelöl egy intervallumot, ahol  $a$  az intervallum *infimuma*,  $b$  a *szuprémuma*:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad (6.1)$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c] \quad (6.2)$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \quad (6.3)$$

$$0 \notin [c, d] \quad \frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[ \min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right) \right] \quad (6.4)$$

Annak a részletes magyarázatára nem térek ki, hogy miért így vannak definiálva a különböző műveletek, de ha jobban meggondoljuk az előbbi négy definíciót, akkor beláthatjuk, hogy ha ebben a formában használjuk a műveleteket, akkor a műveletvégzés során végig külső becslésekkel fogunk dolgozni, márpedig pontosan ez az, ami motiválta ennek a módszernek a kidolgozását. Ez egy lehetséges megközelítés arra, hogy paramétereket modellezzon, amelyek egy adott intervallumon belül veszik fel értékeiket.

Ha a különböző műveletek definiálva vannak az intervallumokra, akkor értelmezhetőek azok a függvények is, amelyek a definiált műveletek kompozíciójaként állnak elő [15]. Ezt használtam a 2.4 ábra szerkesztéséhez, amin a (2.6), (2.7) egyenleteket intervallumokkal értékelttem ki ennek a fejezetnek a definíciói alapján.

### 6.1 Kiterjesztés komplex intervallumokra

A valós intervallumok kiterjeszthetőek a komplex számsíkra, így használhatóak komplex mennyiségek behatárolására. Ahogy már említve volt, erre két módszer is lehetséges. Reprezentálhatjuk a komplex számot polárkoordináta-rendszerben vagy

Descartes-féle koordináta-rendszerben. Ezt mutatta a 2.5 ábra. A jobb kezelhetőség miatt az utóbbira szorítkozunk ebben a dolgozatban. Ebben az esetben a komplex intervallumot két valós intervallum rendezett párja definiálja, azaz négy valós szám. Az egyik intervallumot a képzetes részhez, a másikat a valós rész leírásához használjuk:

$$\mathbb{A} = [a, b] + j[c, d] = \{x + jy : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (6.5)$$

$$A = [a, b] \quad A' = [c, d] \quad (6.6)$$

$$\mathbb{A} = (A, A') \quad (6.7)$$

A komplex intervallumot  $\mathbb{A}$  jelöli, annak valós és képzetes részét  $A$  és  $A'$  jelöli, amelyek valós intervallumok. Ismét mélyebb tárgyalás nélkül közlöm, hogy hogyan vannak definiálva a műveletek a komplex intervallumokkal [11]. A motiváció hasonló a valós esethez. A korábbiakhoz hasonlóan a komplex intervallumokat a „dupla-szárú” betűk jelölik, azoknak képzetes és valós részeit nagy latin betűk:

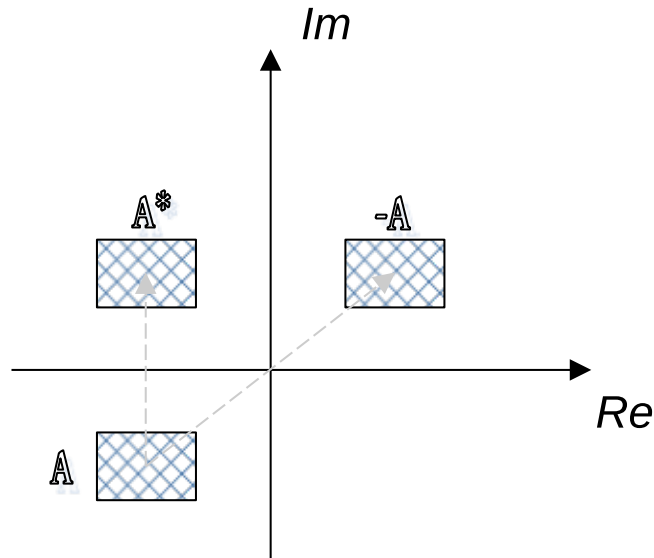
$$\mathbb{A} = (A, A') \quad \mathbb{B} = (B, B') \quad (6.8)$$

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = (A + B, A' + B') \quad (6.9)$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (AB - A'B', AB' + A'B) \quad (6.10)$$

$$0 \notin \mathbb{B} \quad \frac{\mathbb{A}}{\mathbb{B}} = \left( \frac{AB + A'B'}{B^2 - B'^2}, \frac{A'B - AB'}{B^2 - B'^2} \right) \quad (6.11)$$

Ezen egyenletek mellett még definiálva van a konjugált intervallum, és egy intervallum negatívja. A konjugált intervallum szimmetrikus a valós tengelyre, a negatív pedig az origóra, ahhoz hasonlóan ahogyan a nem-intervallum komplex számok esetében is történik:



6.1 ábra:

Konjugált és negatív komplex intervallumok.

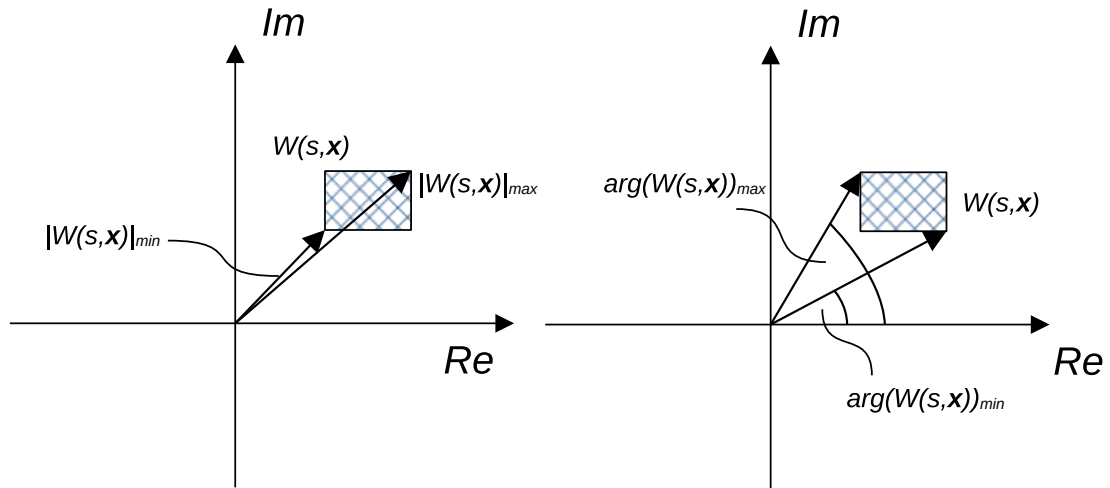
## 6.2 Alkalmazás

Az 5. fejezetben láthattuk, hogy ha felírjuk az átvitelt gyöktényezős alakban, akkor előfordulhat, hogy azt komplex tagok szorzatára tudjuk bontani, amelyeket számolhatunk egymástól függetlenül, ha az adott pólusokat, zérusokat, és erősítést különböző paraméterek befolyásolják. Az átvitel gyöktényezős alakja a következő. (Ez az (5.8) egyenlet megismételve, a jobb olvashatóság jegyében).

$$W(s, \mathbf{x}) = K(\mathbf{x}^{[k]}) \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i(\mathbf{x}^{[z_i]}))}{\prod_{j=1}^n (s - p_j(\mathbf{x}^{[p_j]}))} \quad (6.12)$$

A (6.12) egyenlet komplex tagok szorzatából és hányadosából tevődik össze. A tagokhoz rendelhetünk egy-egy komplex intervallumot, amivel a műveletek eredményeként számíthatunk egy komplex intervallumot  $W(s, \mathbf{x})$ -re. Ha rendelkezésünkre áll ez a komplex intervallum, mint eredmény, abból kiszámíthatjuk az erősítés, és a fázis worst-case értékeit a komplex intervallum „sarkaiból”. Ezt mutatja a 6.2 ábra.

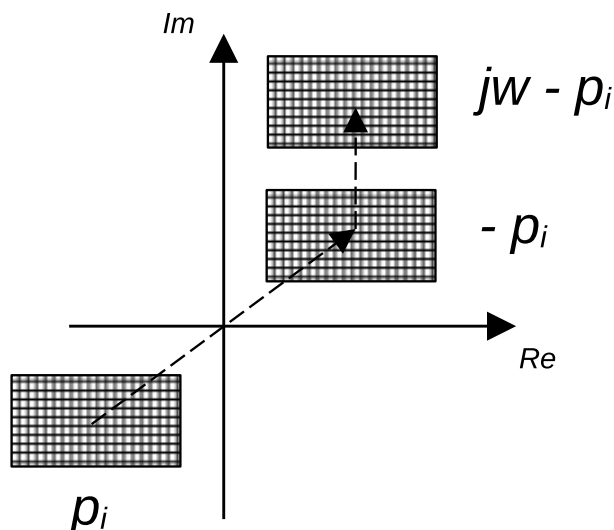




6.2 ábra:

Worst-case becslés komplex intervallum alapján.

Komplex intervallumokkal nem minden esetben végezhető osztás (6.11) alapján. Az osztás csak akkor végezhető el, ha a nulla nem eleme az osztó intervallumnak. Osztani viszont szükséges a (6.12) egyenlethez. Amennyiben a rendszer stabil, a pólusai a bal félsíkra esnek [7]. Az osztás az  $(s-p_i)$  tagokkal történik. Gerjesztés-válasz stabilis rendszer esetében élhetünk az  $s = j\omega$  helyettesítéssel. Ekkor, ha tudunk rendelni egy komplex intervallumot  $p_i$  pólusokhoz, a transzformációkkal rendelhetünk egyet a  $(j\omega-p_i)$  tagokhoz is. Mivel  $p_i$  a bal félsíkon van,  $-p_i$  a jobb félsíkon lesz, az origóra szimmetrikusan. Ehhez adódik  $j\omega$ , ami eltolást jelent. Ezeket a transzformációkat mutatja a 6.3 ábra. Tehát a (6.12) egyenlet stabil rendszerek esetében kiértékelhető komplex intervallumokkal, amit, ha kiértékelünk a korábban definiált intervallumaritmetikai műveletekkel, adható egy becslés az átvitel erősítésére és fázisára is.



6.3 ábra:

Pólusok transzformációja.

Ha ismerjük a rendszer pólusait analitikusan és a rendszer fázisát vagy erősítését vizsgáljuk külön-külön, akkor nincs is feltétlen szükség az intervallumaritmetika komplex kiterjesztésére. Ebben az esetben (5.9) (5.10) egyenleteket értékeljük ki. Ha megvalósítható áramkörökre szorítkozunk, akkor az átvitel racionális törtfüggvény lesz, ami valós együtthatós polinomok hányadosaként felírható. Ekkor igaz, hogy mind a zérusok, mind a pólusok valós számok lesznek, vagy konjugált párok.

Tegyük fel, hogy ismerjük a zérusokat és pólusokat analitikusan. Ha valós zérusokról vagy pólusokról van szó, leírhatjuk egy valós intervallummal. Ha képzetesről, akkor írjuk le két intervallummal, ahogy a komplex számsíkra való kiterjesztésben is bemutattuk. Ha stabil a rendszer, élhetünk az  $s = j\omega$  helyettesítéssel és kifejtethetjük az (5.9) és (5.10) összefüggéseket (az átvitel és pólusok  $s$ -től, illetve  $x$  vektortól való függésének jelölését elhagyom). Az (5.9) egyenlet kifejtve:

$$|W| = |K| \frac{\prod_{i=1}^m |(j\omega - z_i)|}{\prod_{k=1}^n |(j\omega - p_k)|} \quad (6.13)$$

$$\text{ha } z_i \in \mathbb{C} : z_i = \alpha_i + j\beta_i \quad \text{ha } p_i \in \mathbb{C} : p_i = \gamma_i + j\delta_i \quad (6.14)$$

$$|W| = |K| \frac{\prod_{i=1}^{m_v} \sqrt{(\omega^2 + z_i^2)}}{\prod_{k=1}^{n_v} \sqrt{(\omega^2 + p_k^2)}} \frac{\prod_{l=1}^{m_k} \sqrt{((\omega - \alpha_l)^2 + \beta_l^2)}}{\prod_{q=1}^{n_k} \sqrt{((\omega - \gamma_q)^2 + \delta_q^2)}} \quad (6.15)$$

Az előző egyenletekben a pólusokat és zérusokat valós és képzetes csoportokra osztottam, a valós és képzetes zérusok száma rendre  $m_v$  és  $m_k$  a valós és képzetes pólusok száma pedig rendre  $n_v$  és  $n_k$ . (6.15) egyenletben szereplő gyökjel alatti tagokhoz rendelhetünk egy-egy valós intervallumot. Szeretném felhívni a figyelmet arra, hogy a komplex pólusok és zérusok esetében is valós intervallumok fognak szerepelni a gyökjelek alatt, nem szükséges használni a komplex kiterjesztést. Ha jobban meggondoljuk, a tagok abszolút értékeit írjuk le a megfelelő valós intervallumokkal. A gyökvonás, mint művelet nem lett definiálva ebben a dolgozatban, de a fontos észrevétel az, hogy a gyökvonás, mint függvény, egy szigorúan monoton függvény. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a gyökjel alatti kifejezésekhez képesek vagyunk rendelni egy valós intervallumot, akkor, ha annak kiértékeljük *szuprémumának* és *infimumának* a gyökét, akkor az továbbra is egy külső becslése lesz a gyökös kifejezésnek a monotonitása miatt. Figyeljük meg azt is, hogy a kifejezésben a gyökjel alatt csak pozitív számok fognak előfordulni.

Hasonlóan szerencsés a helyzet, ha a rendszer fázisát vizsgáljuk. Ebben az esetben (5.10) egyenletet fejtjük ki:

$$\arg(W) = \left[ \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) \right] - \left[ \sum_{j=1}^n \arg(s - p_j) \right] \quad (6.16)$$

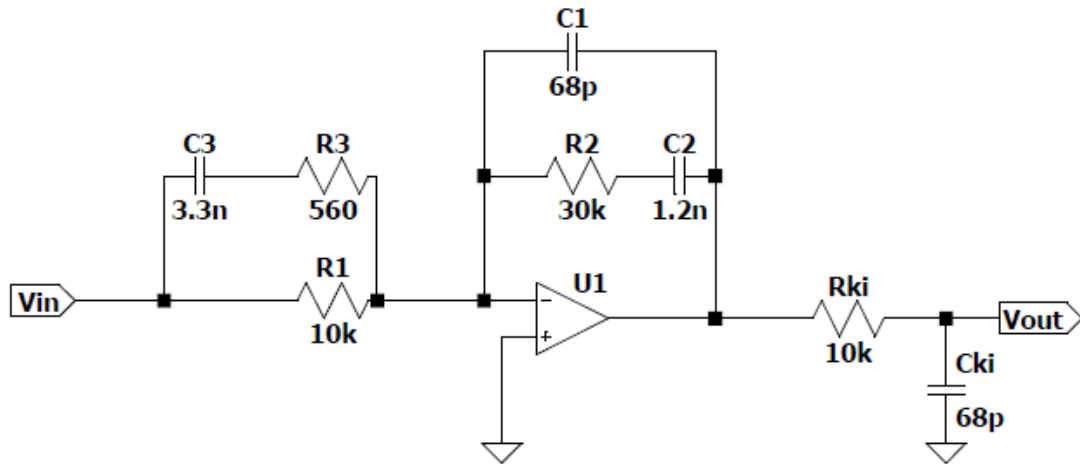
$$\text{ha } z_i \in \mathbb{C} : z_i = \alpha_i + j\beta_i \quad \text{ha } p_i \in \mathbb{C} : p_i = \gamma_i + j\delta_i \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \arg(W) = & \sum_{i=1}^{m_v} \left[ \arctg\left(\frac{\omega}{z_i}\right) \right] + \sum_{l=1}^{m_k} \left[ \arctg\left(\frac{\omega - \alpha_l}{\beta_l}\right) \right] \\ & - \sum_{k=1}^{n_v} \left[ \arctg\left(\frac{\omega}{p_k}\right) \right] - \sum_{q=1}^{n_k} \left[ \arctg\left(\frac{\omega - \gamma_q}{\delta_q}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ebben az esetben is elég valós intervallumokat használni, így az *arctg* függvény argumentumában is csak valós intervallumok fognak szerepelni. Mivel az *arctg* is szigorúan monoton függvény, a gyökvonásnál bemutatott megfontolások alapján, itt is könnyen képezhetünk külső becslést az intervallumokhoz.

## 7. Összehasonlítás

Ebben a fejezetben összegzem a tárgyalt módszereket. Ennek a demonstrálásához egy műveleti erősítő kapcsolást használok. Ez az 5.2 ábrán szereplő kapcsolás kiegészítve egy RC taggal:



7.1 ábra:

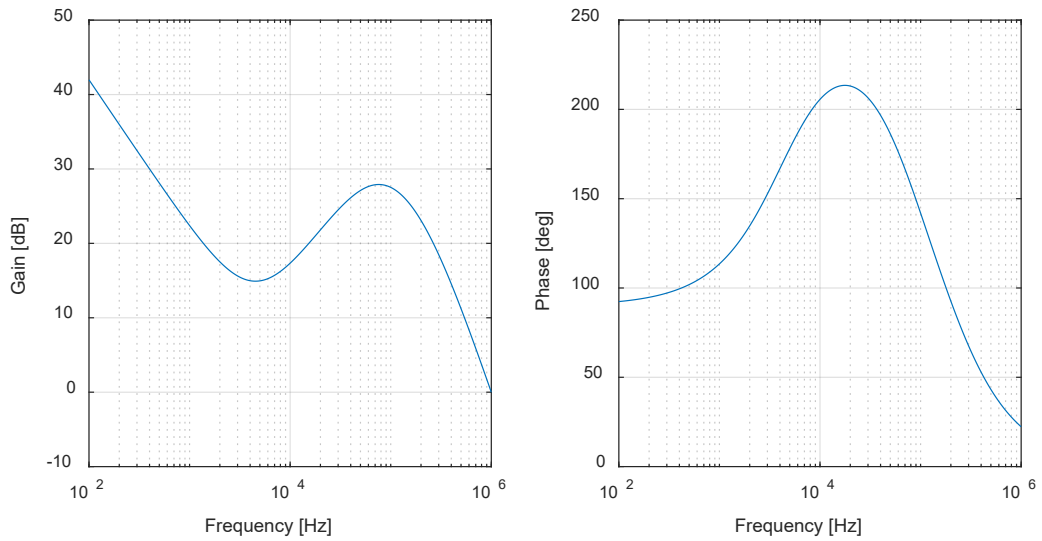
Kapcsolás a módszerek bemutatásához.

A kapcsolásnak vizsgáljuk az átvitelét: annak erősítését és fázistolását. Ismerjük a paraméterek névleges értékét, és azoknak a relatív hibáját, ami a példában 5 %. Ennek az áramkörnek felírható analitikusan az átvitele:

$$W = - \frac{1}{sR_1(C_1 + C_2)} \frac{(sR_2C_2 + 1)(s(R_1 + R_3)C_3 + 1)}{(sR_2C_{12} + 1)(sC_3R_3 + 1)(sR_{ki}C_{ki} + 1)} \quad (7.1)$$

$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \quad (7.2)$$

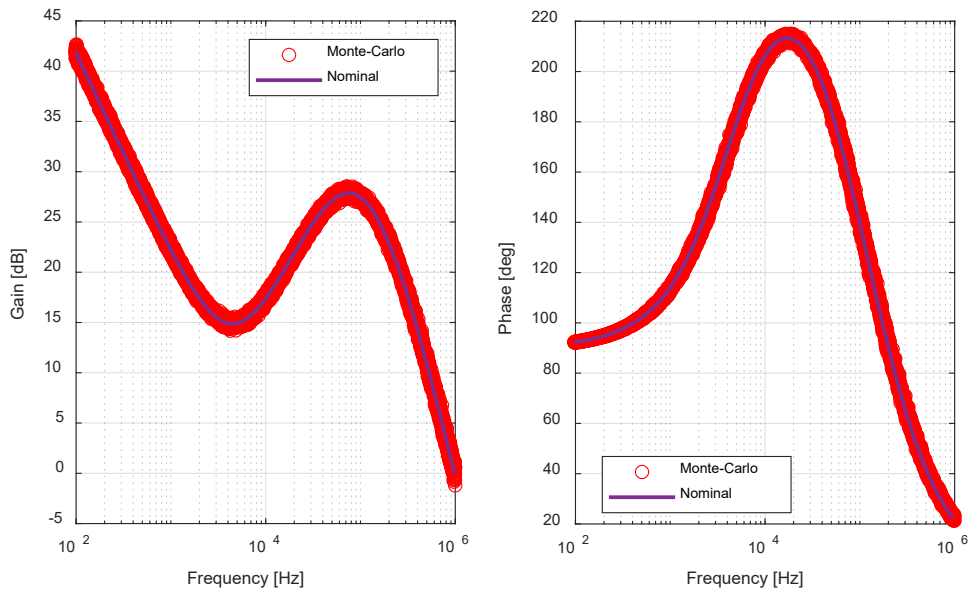
Ez az átvitel már van annyira komplex, hogy az analitikus összefüggés alapján nehéz első ránézésre megállapítani, hogy az erősítésének vagy fázistolásának mi lesz a *worst-case* értéke. A kapcsolás átvitele a névleges értékek mellett:



7.2 ábra:

7.1 kapcsolat átvitele a feltüntetett névleges értékek mellett.

Az átvitelt vizsgálhatjuk a 2.1.2 bemutatott *Monte-Carlo* módszerrel. Ehhez minden frekvencián generáltam 10 véletlen paraméterhalmazt, majd kiértékeltem a (7.1) összefüggést:

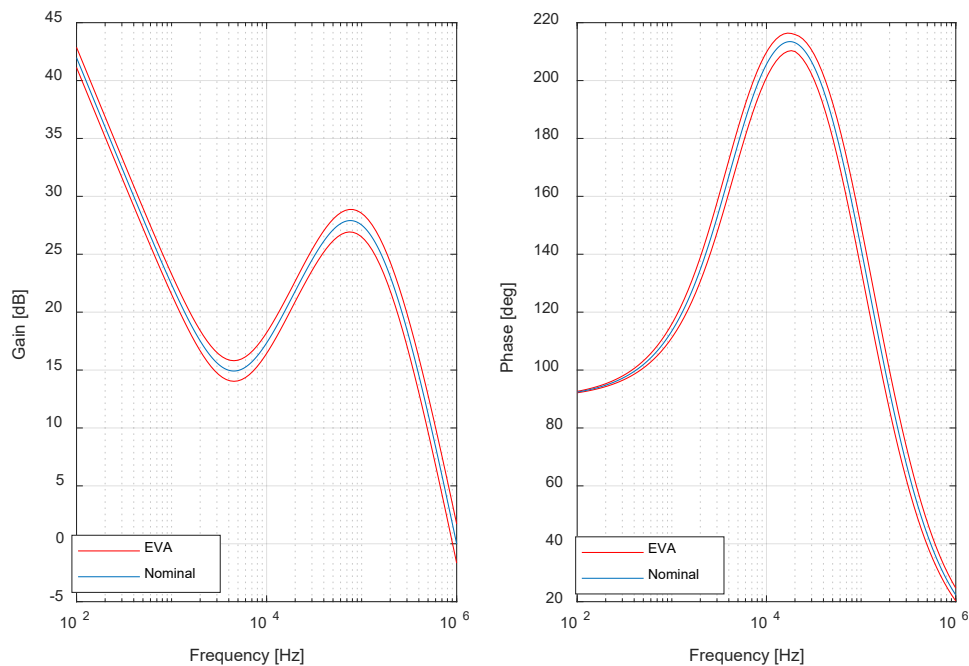


7.3 ábra:

7.1 kapcsolat Monte-Carlo analízise.

Az ábrán látszik, hogy a *Monte-Carlo* analízissel kapott pontok a névleges görbét követik, ahogyan vártuk. Viszont a szimulációban minden frekvenciához csak 10 véletlen pont tartozik, amelyek nem feltétlenül érik el a *worst-case* értékeket.

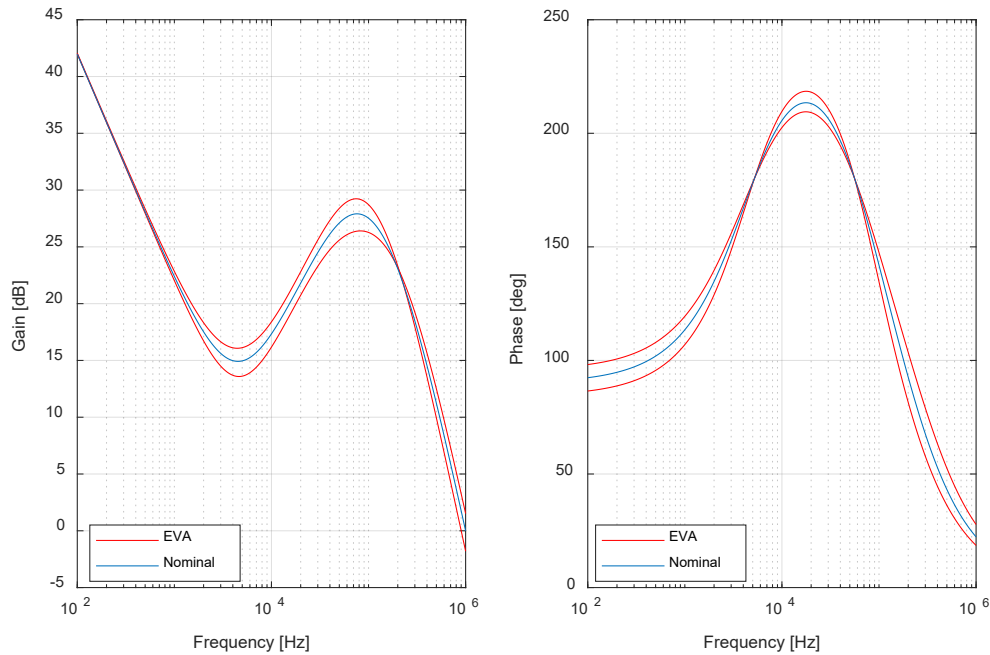
A kapcsolást megvizsgálhatjuk a 2.1.1 fejezetben bemutatott *Extreme Value Analysis* módszerével is. A *Monte-Carlo* szimulációban minden frekvencián 10-szer értékeltem ki (7.1) egyenletet, viszont az *EVA* esetében, mivel 8 befolyásoló paraméter van, 256 kiértékelést szükséges elvégezni. Az így kapott eredmények közül választjuk ki a szélsőértékeket mind az erősítés, mind a fázis esetében:



7.4 ábra:

7.1 kapcsolat vizsgálata *EVA*-val.

A képen hasonló hibásávot kaptunk 7.3 ábrához képest. A korábbi fejezetekben szó volt arról, hogy az *EVA* akkor működik jó, hogy ha monoton függvényeket vizsgálunk vele. Az ábrán látszik, hogy az átvitel minden pontjához sikerült felső becslést találni, de ez nem jelenti azt, hogy megtaláltuk a *worst-case* értékeket, hiszen ahhoz be kellene látni, hogy a kapcsolást leíró átvitel a paraméterek szerint monoton. A kapcsoláshoz kiszámoltam a *worst-case* értékeket a lineáris hibaterjedés módszerével is:

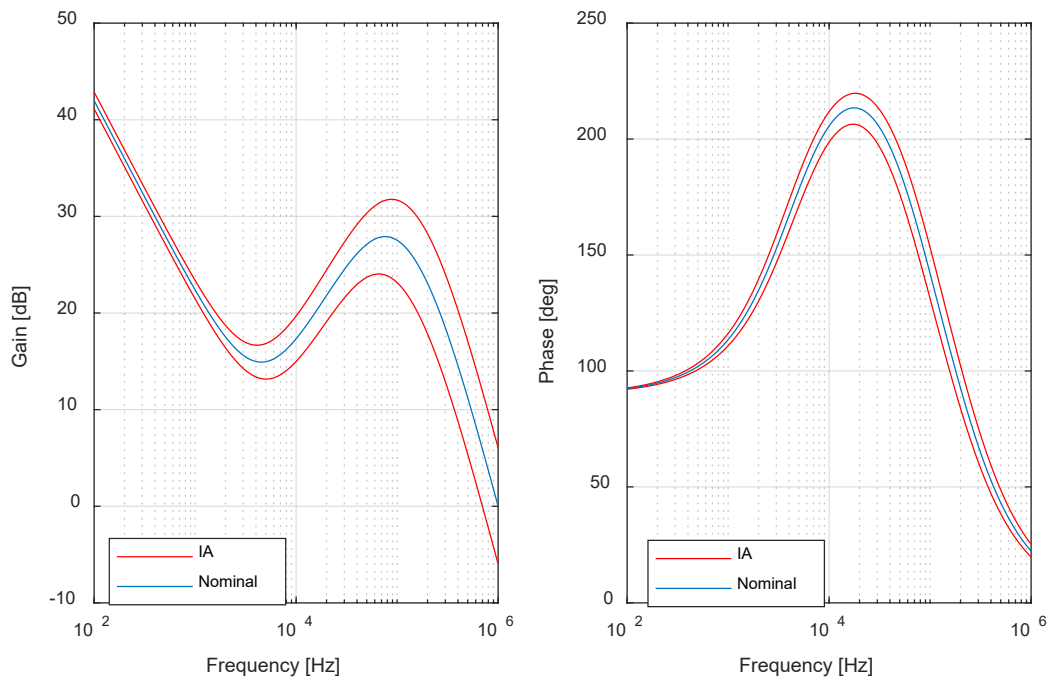


7.5 ábra:

7.1 kapcsolás vizsgálata lineáris hibaterjedéssel.

Ezen az ábrán megfigyelhető az, hogy vannak pontok, ahol a módszer a hibasávot közel zérusnak becsüli. Ez azért van, mert ezekben a pontokban a különböző deriváltak értékei nagyon kis értékűek. Érdekes megfigyelni, hogy ezek a pontok a fázishoz tartozó görbén mintha az inflexiós pontjainál lennének.

Végül elvégeztem az analízist a dolgozatban bemutatott intervallumaritmetika módszerével is. Ezt a szimulációt is *MATLAB*-ban végeztem. Ehhez egy előre megírt nyílt forráskódú „*interval*” osztályt használtam, amelyekkel valós intervallumokat lehet létrehozni, és definiálva vannak hozzájuk a különböző műveletek [16]. A rendszer analíziséhez a (6.13) és (6.16) egyenletben bemutatott módszert használtam. Mivel a rendszer erősítése, pólusai és zérusai előre ismertek voltak, azokhoz képes voltam definiálni intervallumokat a paraméterek névleges értékei és szórásai alapján. Így ki tudtam terjeszteni a rendszer átvitelét úgy, hogy minden frekvencián egy intervallumot kapjak, ami a fázishoz és az erősítéshez tartozik. A következő eredményeket kaptam:

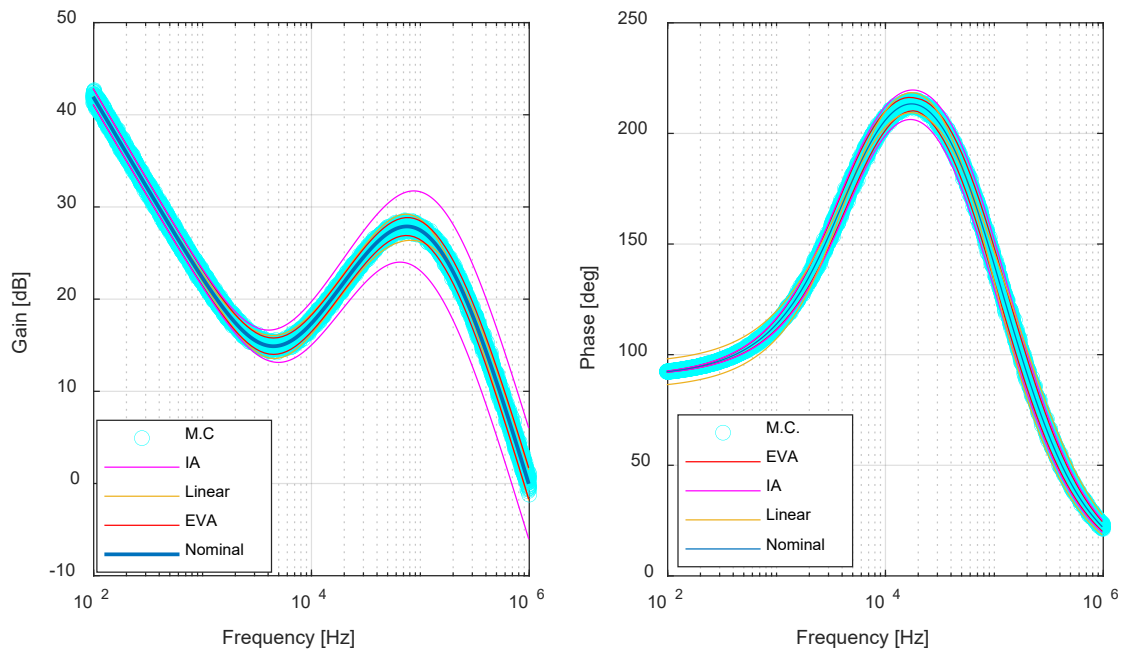


7.6 ábra:

Kapcsolás vizsgálata intervallumritmetikával.

Az ábrán látható, hogy jellegre követi a függvényt a névleges görbét, de a korábbiaknál szélesebb sávokat eredményez a módszer. Viszont ezekről a sávokról tudjuk, hogy külső becslések [15]. Az összehasonlítás végett a különböző módszerek egy közös ábrán:

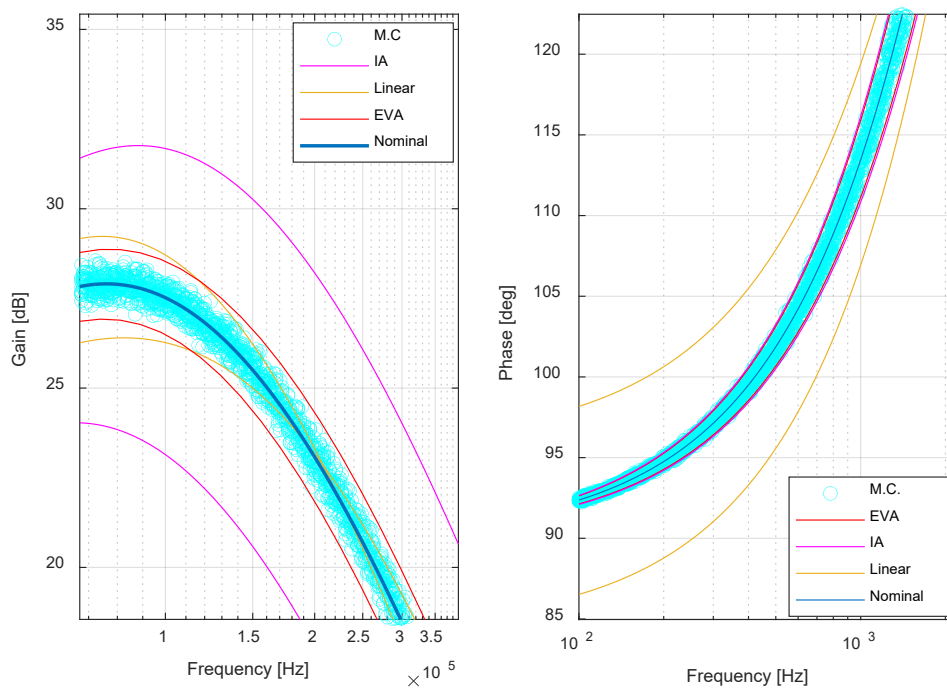




7.7 ábra:

Módszerek összehasonlítása.

Az ábrán megfigyelhető, hogy az intervallumaritmetikával adtuk a lehető legtágabb korlátokat. Ezen kívül azt is megfigyelhetjük, hogy az *EVA* meglehetősen hozzásimul a *Monte-Carlo* analízissel kapott eredményekhez. Ránagyítva a fázisra és az erősítésre:



7.8 ábra:

Fázis és erősítés közelebbről.

Ezen az ábrán jobban megfigyelhető, hogy az *EVA* jó becslést ad abban az értelemben, hogy a *Monte-Carlo* módszerrel szórt paramétereket képes kívülről becsülni. A lineáris módszer viszont az erősítés esetében olyan intervallumot ad meg, ami a *Monte-Carlo* módszerrel szórt értékek közé esik, így alábecsülhetjük vele a függvényt. A fázisnál, ugyanezen szimulációnál azt látjuk, hogy még az intervallumaritmetikával kapott korlátoknál is szélesebbet ad meg.

Összességében elmondható, hogy intervallumaritmetikával egy robusztus és biztonságos becslés adható. Az ábrákon az látszik, hogy az *EVA* szűkebb becslést ad, és a *Monte-Carlo* szimulációval kapott értékeket is kívülről becsüli. Az adott példában a Monte-Carlo és az EVA módszerek együttes kiértékelésével arra következtethetünk, hogy az átviteli függvény valódi szélső értékét az EVA módszer szolgáltatja. Ennek oka, hogy az EVA abban az esetben tud helytelen eredményt szolgáltatni, amennyiben a vizsgált függvény nem monoton, tehát szélső értéke nem a paraméterek valamely szélső értékénél található. A Monte-Carlo módszer viszont a paramétertartományokon belüli pontokat is "letapogatja", és az eredmények alapján nem látható, hogy a Monte-Carlo módszer bármikor is tágabb korlátot adott volna, mint az EVA, tehát feltételezhetően a paramétertartományok szélén található az átvitel szélső értéke.

Amellett, hogy az adott metodika mennyire jól becsüli a *worst-case* értékeket, fontos szempont az is, hogy mennyi ideig tart kiértékelni a szimulációt. Az *EVA* ugyan szűkebb hibasávot tudott eredményezni, mint az intervallumaritmetika, viszont futási időben rosszul teljesít, hiszen a számítási igénye a paraméterek számától exponenciálisan függ, és ez már a példában szereplő 8 paraméternél is érződik. Ezt megpróbáltam mérni *MATLAB* környezetben, amiben a szimulációkat is végeztem, de ez nem egy teljesen korrekt mérés, hiszen sok tényezőtől függ a futási idő. Többek között függhet attól, hogy mennyire hatékonyan implementáltam az algoritmusokat vagy a hardware-től is. Az eltelt idő méréséhez a *MATLAB* beépített *tic* és *toc* függvényeit használtam. Ha ez nem is egy precíz mérési eljárás, de arra alkalmas, hogy egymáshoz viszonyítsuk nagyságrendileg a különböző algoritmusok futási idejét. A fejezethez végzett szimulációk mérését elvégezve a következőket kaptam:

	<i>MATLAB</i> -bal mért idő [s]
<i>intervallumaritmetika</i>	3.64
<i>lineáris közelítés</i>	82.1
<i>Monte-Carlo</i>	191.5
<i>EVA</i>	495.8

7.1 táblázat:

Futási idők összehasonlítása.

A táblázatban szereplő adatokon látszik, hogy az eljárások futási ideje között számottevő különbségek vannak. Ez a táblázat jól mutatja, hogy az *EVA* jó módszer lehet *worst-case* becslésekhez, de a futási ideje nem elhanyagolható, ráadásul a szóban forgó példában csak 8 paraméter hatását vizsgáltuk. Ezzel ellentétben az intervallumaritmetika módszere gyorsnak mondható és biztos eredményt ad. A Monte-Carlo szimuláció is hasznos lehet, de a futási idő nagyban függ a szimuláció paramétereitől, és nem ad egzakt eredményt.

A fenti analízisfeladat egy jó példa arra, hogy az általam fejlesztett szeparálási módszer javítani tudja a *worst-case* analízis feladatok hatékonyságát. Jóllehet a gyorsan kiértékelhető intervallumaritmetika biztosan külső becslést ad, de látható módon ez a külső becslés tágabb, mint a valódi szélső értéknek tekintett *EVA* eredménye. Ez főleg túlméretezéshez vezet, ami egy termék árának növekedését eredményezheti. Az *EVA* módszer viszont exponenciálisan függ a paraméterek számától, így a rendszer

particionálása jelentős gyorsítást eredményezhet a futási időben. A fenti példa esetén:  
 $\frac{2^8}{2^3+2^3+2^2} = 12.8$ , tehát egy nagyságrendi csökkenés várható, ami végeredményben  
 $495.8\text{sec}/12.8=38.7\text{sec}$  futási időt eredményezne az EVA-ra. Ez a felsorolt módszerek  
között nem a leggyorsabb, de jelentős csökkenésnek tekinthető.

## 8. Összefoglalás, kitekintés

A dolgozat elején bemutatásra kerültek a manapság elterjedt metodikák, amelyek használhatóak *worst-case* analízisfeladatokhoz. Ezt követően megvizsgáltuk, hogy azoknak miből is fakadnak a gyengeségeik és erősségeik. Ezt követte a probléma definiálása, majd röviden tárgyaltuk, hogy hogyan lehetséges modellezni és kezelni egy elektromos hálózatot, ha annak a szélsőséges működését vizsgáljuk. Láttuk, hogy a rendszerhez tartozó komplex átviteli függvényhez el lehet jutni az áramkör sematikus ábrája alapján is, de a dinamikus leírásán keresztül is. Ezt követően azt részleteztem, hogy milyen következményei vannak az átvitelre nézve annak, hogy valóságos, megvalósítható hálózatokkal dolgozunk. Több helyen is kihasználtuk azt, hogy az ilyen hálózatok racionális törtfüggvényeket eredményeznek, amelyek valós együtthatós polinomok hányadosaként felírhatóak. Tárgyaltuk azt, hogy miért érdemes a paramétereket szétválasztani, és azt, hogy ez hogyan egyszerűsíti az erősítés és a fázistolás számítását a komplex átviteleknél. A befolyásoló paramétereknek ez a fajta szeparációja nem csak akkor enyhíti a számítási terheket, ha az átvittel dolgozunk, más metodikáknál is előnyt jelenthet. Végül ismertettem az intervallumaritmetika technikáját, és annak kiterjesztését komplex számokra, amivel gyors és robusztus becsléseket tehettünk az átvitelre. Végül összehasonlítottam a dolgozatban részletezett módszereket mind az eltérés, mind az egymáshoz képesti futási idejük szerint.

A legutoljára bemutatott intervallumaritmetikával alkotott becslés adta az összes közül a legbővebbet. Ezt érdemes lenne még tovább kutatni, hogy lehet-e ugyanilyen biztonságos, de szűkebb becslést tenni a mennyiségekre valamilyen megfontolások nyomán. Azt is érdemes lenne vizsgálni, hogy hogyan is lehetne mérni a különböző algoritmusok teljesítményét precízebb módon egymáshoz képest. Azt gondolom, hogy annak ellenére, hogy a témát tüzetesen körbejártam és leírtam több érdekes észrevételt, még bőven van megválaszolatlan kérdés, ami kötődik a témához.

## **Köszönetnyilvánítás**

Külön szeretném megköszönni Dr. Orosz Györgynek a rengeteg segítséget, és támogatást, ami nem csak szakmai volt, hanem lélekben is támogatott, amikor arra volt szükségem.

A 2019-1.3.1-KK-2019-00004 számú projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a 2019-1.3.1-KK pályázati program finanszírozásában valósult meg.

## Irodalomjegyzék

- [1] R. E. Moore, „On Computing the Range of a Rational Function of  $n$  Variables over a Bounded Region,” *Springer Computing*, 1975.
- [2] S. Skelboe, „True Worst-Case Analysis of Linear Electrical Circuits by Interval Arithmetic,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems* , %1. kötet, összesen: %2CAS - 26, pp. 874 - 879, 1979.
- [3] I. T. G. M. Kiranyaz S., „Optimization Techniques: An Overview,” in *Multidimensional Particle Swarm Optimization for Machine Learning and Pattern Recognition*, Berlin, Springer, 2014, pp. 13-44.
- [4] D. A. Gilmour, „Worst Case Circuit Analysis Application Guidelines,” IIT Research Institute, Rome, 1993.
- [5] P. L. Myriam Charras-Garrido, „Extreme Value Analysis: an Introduction,” *Journal de la Société Française de Statistique*, %1. kötet154, %1. szám2, pp. 66-97, 2013.
- [6] Cadence PCB Solutions, „What is Worst-Case Circuit Analysis,” Cadence, [Online]. Available: <https://resources.pcb.cadence.com/blog/what-is-worst-case-circuit-analysis>. [Hozzáférés dátuma: 26 10 2023].
- [7] Gy. Fodor, Hálózatok és Rendszerek, Budapest: BME Viking Nonprofit Zrt., 2004.
- [8] S. Raychaudhuri, „Introduction to Monte Carlo Simulation,” in *Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*, Broomfield, 2008.
- [9] D. Z. István, Méréstechnika, Budapest: BME Viking Nonprofit Zrt., 1997.
- [10] P. D. Sumner, Linear Computations, New York: Wiley, 1951.
- [11] R. Boche, „Complex Interval Arithmetic with Some Applications,” Lockheed Missiles & Space Company, Lockheed, 1966.
- [12] B. Sándor, „Elektromágneses optimalizálási feladatok,” BME HVT, Budapest, 2018.

- [13] C. P. Basso, „Switch-Mode Power Supplies, Spice Simulations and Practical Designs,” McGraw-Hill Education, New York, 2014.
- [14] D. M. F. E. K. M. H. M. Vale, „Electrical Power Network Decomposition for Parallel Computations,” Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.
- [15] S. Skelboe, „Computation of Rational Interval Functions,” Danmarks Tekniske Hojskole, Lyngby, 1973.
- [16] DanIsraelMalta, „Interval arithmetic class for matlab,” 16 01 2019. [Online]. Available: <https://github.com/DanIsraelMalta/Interval-arithmetic>. [Hozzáférés dátuma: 02 11 2023].