

Tomográfiás képrekonstrukció ortogonális polinomok szerinti sorfejtéssel

Surányi Olivér – III. évfolyam
Konzulens: dr. Légrády Dávid

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

2012. október 29.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. A Radon-transzformált	1
1.2. A szűrt visszavetítés	2
2. Ortogonális polinomrendszerek	3
2.1. Másodfajú Csebisev-polinomok	3
2.2. Zernike radiális polinomok	4
2.3. Rekonstrukció ortogonális polinomokkal	5
3. Implementáció	9
3.1. Polinomrendszerek generálása	10
3.1.1. Másodfajú Csebisev-polinomok generálása	10
3.1.2. Zernike radiális polinomok generálása	10
3.2. Sorfejtés	11
3.2.1. Egydimenziós sorfejtések	11
3.2.2. Rekonstrukciós sorfejtés	11
3.3. Rekonstrukció	12
4. Elemzés	13
4.1. Rekonstrukciós példák	13
4.2. Poisson-zaj	15
4.3. Zajmérték	17
4.4. Felbontásanalízis	18
5. Összegzés	20

Kivonat

A tomográfiás képalkotás matematikáját az úgynevezett Radon-transzformációval formalizálhatjuk. Az így kapott függvény ábrázolását szinogramnak nevezzük. A képrekonstrukció célja a transzformáció inverzének kiszámítása. A direkt inverziós formula numerikus alkalmazása viszont nem lehetséges, mivel a benne szereplő integrál Riemann-értelemben nem végezhető el. A Fourier-transzformáció segítségével ezt a nehézséget megoldhatjuk, így kaphatjuk meg a gyakorlatban mind a mai napig alkalmazott szűrt visszavetítést. Ennek azonban szintén van gyenge pontja: a szűrési lépés. Ez szükséges a megfelelő minőségű és kontrasztú kép előállításához, viszont alkalmazása felerősíti a zajokat, ezért zajos szinogramon nehezen használható.

A szűrt visszavetítés előbb említett gyengeségeinek kiküszöbölése végett egy másik rekonstrukciós algoritmust teszteltem. Az alapötlet a következő: bontsuk fel a szinogramunkat analitikus függvények összegére. Mivel a Radon-transzformáció (és így az inverze is) lineáris, az inverz transzformációt elvégezhetjük külön-külön az összeg tagjaira. Ha tudunk találni olyan teljes függvényrendszert, amely tagjait analitikusan Radon-transzformálva egy másik, numerikusan előállítható függvényrendszert kapunk, akkor a rekonstrukció elvégezhető. Ehhez elegendő a szinogramot az adott bázisfüggvények szerint sorbafejteni, majd az így meghatározott együtthatók segítségével a kép előállítható.

TDK-dolgozatomban egy ilyen lehetséges függvényrendszer-párt vizsgálok. Levezetem, hogy a szögváltozó szerinti Fourier-sorfejtés esetén a transzformált szintén Fourier-sor alakban fog előállni és csak a radiális rész változik. Ennek transzformációja során viszont ismét numerikus nehézségek lépnek fel, ezért a képet a szinogram-térben az affin paraméter szerint másodfajú Csebisev-polinomokkal fejtem sorba, majd megmutatom, hogy ezek Radon-transzformálva az optikában is használt Zernike radiális polinomokat adják.

Kutatómunkám során ezeknek az ortogonális polinomrendszereknek a tulajdonságait is megismertem. Az imént ismertetett algoritmust MATLAB-nyelven implementáltam, így az elmélet helyességét gyakorlatban is igazoltam. A továbbiakban az eljárás hatékonyságát különböző tesztek (zajanalízis, felbontásanalízis) segítségével összehasonlítottam a szűrt visszavetítéssel.

1. fejezet

Bevezetés

Napjaink orvosi diagnosztikájának egyik nélkülözhetetlen területét alkotják a tomográfias képalkotási eljárások. Ezek mind non-invazív módszerek, így lehetővé teszik az emberi test belső felépítésének műtéti beavatkozás nélküli vizsgálatát. Ma az egyik legelterjedtebb megoldás ezen a területen a strukturális képalkotást lehetővé tevő *számítógépes tomográfia* (Computed Tomography - CT), illetve a funkcionális képalkotó eljárások közül a *pozitron emissziós tomográfia* (Positron Emission Tomography - PET) és a SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography).

A CT során meghatározott szeletek mentén röntgensugarakat bocsátanak át a vizsgálandó testen és ezek gyengülését detektorokkal mérik. A különböző irányokból mért gyengülési együtthatók segítségével a belső felépítés meghatározható.

Az emissziós tomográfiában ezzel szemben megfelelő radioaktív izotópot juttatnak a szervezetbe, ami az adott anyag kémiai tulajdonságaitól függően a vizsgálni kívánt szervben halmozódik fel. A bomlás során létrejövő pozitronokat (PET) vagy gamma-fotonokat (SPECT) detektorokkal érzékelik, így a felhalmozódott radioaktív anyag eloszlása meghatározható.

Ezekből a példákból láthatjuk a tomográfias képrekonstrukció alapproblémája: bizonyos mennyiségek vonalmenti integrálját mérjük, majd ezekből kell visszaállítanunk a vizsgált belső eloszlást.

1.1. A Radon-transzformált

A tomográfias képrekonstrukció alapproblémáját az úgynevezett *Radon-transzformált* segítségével önthetjük matematikai formába [1].

1. Definíció (Kétdimenziós Radon-transzformáció). Legyen $f(x, y)$ tetszőleges kétváltozós függvény, ekkor az $f(x, y)$ függvény Radon-transzformáltja

$$\mathfrak{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (1.1)$$

ahol $-\infty < t < +\infty$ és $0 < \theta < \pi$.

A fenti definíció megfelelő módszerekkel általánosítható három és több dimenzióra is, de ebben a dolgozatban csak kétdimenziós esettel fogok foglalkozni. A fenti képlet gyakorlati alkalmazását az alábbi tétel teszi lehetővé:

1. Tétel. Ha $f(x, y)$ folytonos és kompakt tartójú függvény, akkor $f(x, y)$ Radon-transzformáltja létezik és egyértelmű.

A bizonyítás megtalálható Johan Radon 1917-es német nyelvű cikkében [1]. Az $\mathfrak{R}f(t, \theta)$ függvényt szokás a (θ, t) koordináta-rendszerben ábrázolni, ez az úgynevezett *szinogram*. Az elnevezés onnan származik, hogy egy pont transzformáltja a kapott intenzitásképen szinuszos görbeként jelenik meg. A későbbiek szempontjából a Radon-transzformáció (és emiatt inverzének is) nagyon fontos tulajdonsága a linearitás [2].

1. Állítás (Linearitás). Tetszőleges $f_i(x, y)$ függvényekre és α_i konstansokra:

$$\mathfrak{R} \left(\sum_i \alpha_i f_i \right) = \sum_i \alpha_i \mathfrak{R} f_i. \quad (1.2)$$

A tomográfias képkalkotás során mi ezt az $\mathfrak{R}f(t, \theta)$ szinogramot mérjük, a feladat pedig $f(x, y)$ visszaállítás, tehát a Radon-transzformáció inverzének elvégzése. A direkt inverziós formula [1]:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{d}{dt} \mathfrak{R}f(t, \theta)}{x \cos \theta + y \sin \theta - t} dt d\theta \quad (1.3)$$

Mint látható ez a képlet a nevező szingularitása miatt numerikusan nehezen valósítható meg. A gyakorlatban ezért ezt a formulát különböző módszerekkel tovább alakítják valamilyen numerikusan stabil összefüggésre. Ezek közül a megoldások közül a legelterjedtebb az úgynevezett *szűrt visszavetítés*.

1.2. A szűrt visszavetítés

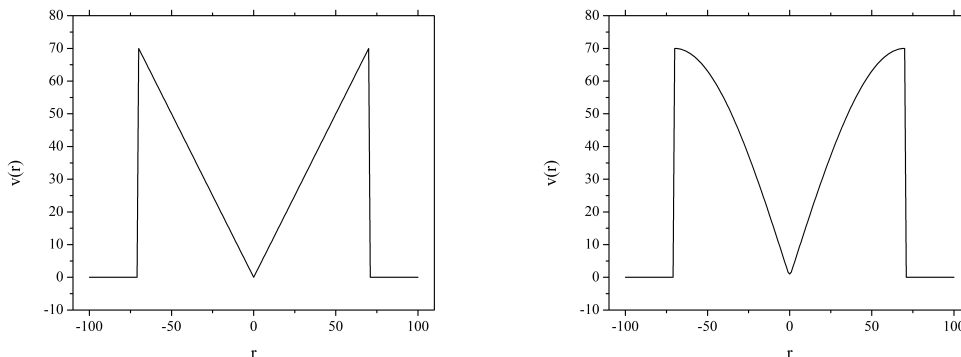
A szűrt visszavetítés két lépésből áll: az első egy Fourier térben végzett szűrési lépés (ezt a gyakorlatban gyakran valós térbeli konvolúcióval valósítják meg), a második pedig a visszavetítési lépés.

2. Tétel (Szűrt visszavetítés). Ha az f függvény abszolút integrálható a Radon-transzformáció értelmezési tartományán és $\mathfrak{F}f$ abszolút integrálható, akkor

$$g(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathfrak{F}_t(\mathfrak{R}f) e^{irt} |r| dr \quad (1.4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (1.5)$$

A tétel bizonyítása megtalálható Epstein könyvében [3]. A képletben szereplő $|r|$ -szűrési tag helyett tetszőleges $v(r)$, szűrőfüggvény használható. Mivel az $|r|$ -szűrő túlságosan felerősíti a zajokat, helyette más szűrőket szokás alkalmazni, a két legelterjedtebb a Ram-Lak és Shepp-Logan szűrő (1.1. ábra). A szűrt visszavetítés alkalmazhatósága zajos képek esetén korlátozott, ugyanis a magasabb frekvenciákat levágó szűrők alkalmazása jelentős kontrasztvesztést okoz. Ez adta a motivációt új módszerek kifejlesztéséhez.



1.1. ábra. A Ram-Lak (balra) és Shepp-Logan (jobbra) szűrő.

2. fejezet

Ortogonalis polinomrendszerek

Az orthogonalis polinomokat rendkívül hasznos tulajdonságaiknak köszönhetően a fizika és a matematika legkülönbözőbb területein használják. Különösen hasznosak, mivel a Fourier-sorfejtéshez hasonlóan, velük egy analitikusan nem ismert függvény analitikus függvények összegére bontható. Az előző fejezetben láthattuk, hogy a Radon-transzformáció és emiatt inverze is lineáris művelet, így ha sorbafejtjük a függvényünket, elég az egyes tagokat transzformálni. Ehhez olyan bázisfüggvényekre van szükség, amelyek transzformáltja analitikusan meghatározható. Továbbá fontos megkövetelni, hogy az így kapott új polinomrendszer is orthogonalis legyen, erre azért van szükség, hogy a transzformáltat szintén fel tudjuk írni egy orthogonalis bázisban. Megmutatható, hogy egy ilyen lehetséges párt alkotnak a Zernike és a másodfajú Csebisev polinomok. A rekonstrukciót ezek segítségével végeztem.

2.1. Másodfajú Csebisev-polinomok

A Csebisev-polinomokat kedvező tulajdonságaik miatt gyakran használják függvények approximálásához. A levezetésekben a másodfajú Csebisev-polinomok fognak megjelenni, ezért a legfontosabb tulajdonságait röviden ismertetem. A másodfajú Csebisev-polinomok részletes bemutatása megtalálható Abramowitz és Stegun könyvében [4].

2. Definíció (Másodfajú Csebisev-polinomok). Azt az n -edfokú $U_n(x)$ polinomot, mely kielégíti a

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0 \quad (2.1)$$

differentiálegyenletet, másodfajú Csebisev-polinomnak nevezünk. Ezzel ekvivalens az úgynevezett trigonometrikus definíció:

$$U_n(x) = \frac{\sin((n + 1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}. \quad (2.2)$$

Az első öt Csebisev-polinom a következő:

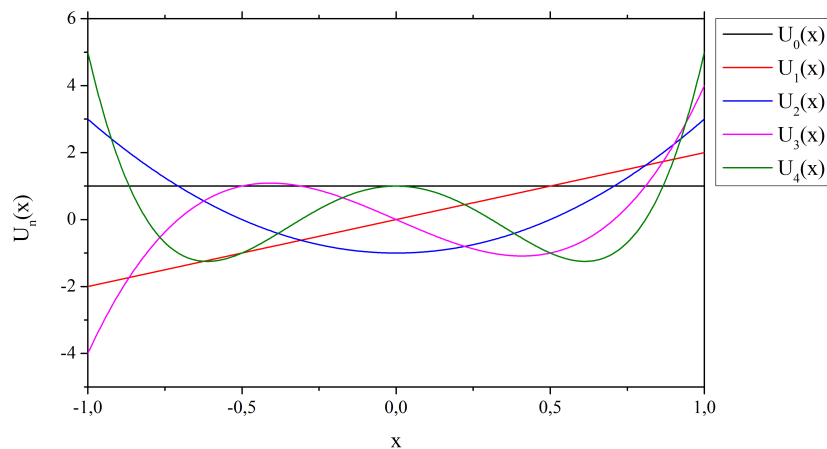
$$U_0(x) = 1 \quad (2.3a)$$

$$U_1(x) = 2x \quad (2.3b)$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1 \quad (2.3c)$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x \quad (2.3d)$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1. \quad (2.3e)$$



2.1. ábra. Az első öt másodfajú Csebisev-polinom.

A Csebisev-polinomok egyik legfontosabb tulajdonsága az ortogonalitás.

2. Állítás (Ortogonalitás). *Tetszőleges $U_n(x)$ és $U_m(x)$ esetén*

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{nm} \quad (2.4)$$

teljesül.

A bizonyítás megtalálható Rivlin könyvében [5].

2.2. Zernike radiális polinomok

A Zernike polinomok kétdimenziós, az egységsugarú körön ortogonális polinomok. Az optikában előszeretettel alkalmazzák őket, mivel segítségükkel optikai rendszerek leképezési hibái könnyen jellemezhetők. Mint azt később látni fogjuk a Zernike polinomok radiális részei olyan bázist fognak alkotni, melyben a függvényünk a valós térben sorba fejthető, transzformáltjában pedig megjelennek az előző alfejezetben definiált másodfajú Csebisev polinomok [2]. A Zernike radiális polinomok a témához kapcsolódó legfontosabb tulajdonságait röviden ismertetem.

3. Definíció (Zernike radiális polinomok). *Zernike radiális polinomnak nevezzük a*

$$Z_n^m(r) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! ((n+m)/2-k)! ((n-m)/2-k)!} r^{n-2k} & \text{ha } n-m \text{ páros,} \\ 0 & \text{ha } n-m \text{ páratlan.} \end{cases} \quad (2.5)$$

alakban megadott polinomokat.

Ezek közül csak a nemnulla tagokat fogjuk felhasználni, amelyeket Z_{l+2s}^l jelöl. Az első hat Zernike radiális polinom a következő (2.2. ábra):

$$Z_0^0(r) = 1 \quad (2.6a)$$

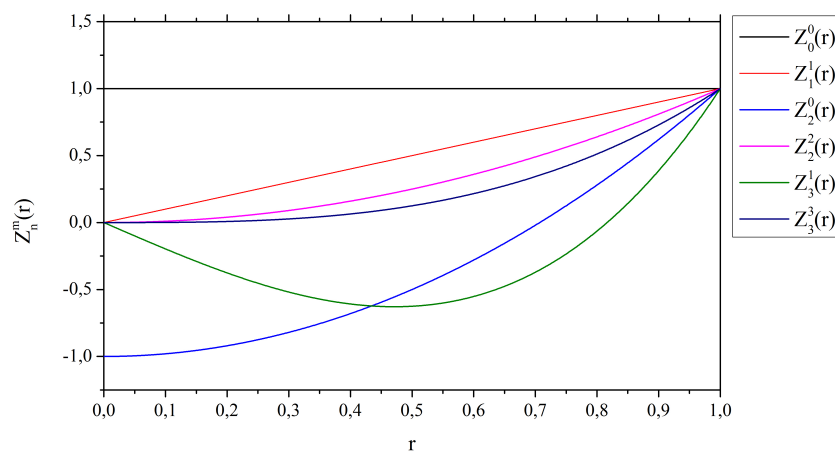
$$Z_1^1(r) = r \quad (2.6b)$$

$$Z_2^0(r) = 2r^2 - 1 \quad (2.6c)$$

$$Z_2^2(r) = r^2 \quad (2.6d)$$

$$Z_3^1(r) = 3r^3 - 2r \quad (2.6e)$$

$$Z_3^3(r) = r^3. \quad (2.6f)$$



2.2. ábra. Az első hat Zernike radiális polinom.

Fontos tulajdonságuk, hogy a Zernike polinomokhoz hasonlóan a radiális polinomaik is ortogonálisak:

3. Állítás (Ortogonalitás). Adott l -re, bármely $Z_{l+2s}^l(r) Z_{l+2t}^l(r)$ esetén

$$\int_0^1 Z_{l+2s}^l(r) Z_{l+2t}^l(r) r dr = \frac{1}{2(|l| + 2s + 1)} \delta_{st} \quad (2.7)$$

teljesül.

A levezetés megtalálható Born és Wolf könyvében [6]. A Zernike radiális polinomok az általánosabb Jacobi polinomokkal is kifejezhetők:

$$Z_{l+2s}^l = r^{|l|} P_s^{0,|l|}(2r^2 - 1). \quad (2.8)$$

2.3. Rekonstrukció ortogonális polinomokkal

Írjuk fel a rekonstruálni kívánt függvényünket egy radiális és axiális rész szorzataként, majd fejtük Fourier-sorba a szögváltozó szerint. Ekkor a következő állítás teljesül:

4. Állítás. Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény, amely felírható az

$$f(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l(r) e^{il\varphi} \quad (2.9)$$

Fourier-sor alakban. Ekkor

$$\Re \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l(r) e^{il\varphi} \right] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}_{g_l}(t) e^{il\theta}, \quad (2.10)$$

ahol

$$\mathfrak{G}_{g_l}(t) = 2 \int_t^{\infty} g_l(r) T_l \left(\frac{t}{r} \right) \left(1 - \frac{t^2}{r^2} \right)^{-1/2} dr. \quad (2.11)$$

Itt $T_n(x)$ elsőfajú Csebisev polinom.

Tehát az $f(r, \varphi)$ függvény szögben invariáns a Radon-transzformációra, a radiális rész pedig egy Gegenbauer-transzformációs párt alkot a transzformáltjával. A levezetés megtalálható Deans könyvében [2].

Mivel a fenti integrál numerikusan még mindig nehezen kezelhető, ezért a függvényünket radiálisan is sorba fogjuk fejteni. Egy ilyen alkalmas polinomrendszert talált Marr, ezek az optikában használt Zernike polinomok radiális részei, röviden Zernike radiális polinomok [7]. Így a függvényünk felírható az

$$f(r, \varphi) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_{l,s} Z_{l+2s}^l(r) e^{il\varphi} \quad (2.12)$$

alakban, ahol $Z_{l+2s}^l(r)$ a Zernike radiális polinomokat jelenti.

5. Állítás. Az axiálisan Fourier-sorba, radiálisan Zernike radiális polinomok szerint sorba fejtett kétváltozós függvény Radon-transzformáltja felírható

$$\Re \left[\sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_{l,s} Z_{l+2s}^l(r) e^{il\varphi} \right] = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{2A_{l,s}}{|l| + 2s + 1} \sqrt{1 - t^2} U_{|l|+2s}(t) e^{il\theta} \quad (2.13)$$

alakban, ahol $U_{|l|+2s}(x)$ másodfajú Csebisev polinom.

Bizonyítás (Deans nyomán). A felírás transzformáltjának meghatározásához a szűrt visszavetítést fogjuk alkalmazni. Írjuk fel először $f_{l,s}$ kétdimenziós Fourier transzformáltját, polárkoordinátás alakban:

$$\mathfrak{F}f_{l,s}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{l,s}(x, y) e^{-i(xu+yv)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} Z_{l+2s}^l(r) e^{il\varphi} e^{-iqr \cos(\varphi-\theta)} r dr d\varphi \quad (2.14)$$

Ezután a $\beta = \varphi - \theta$ változócserevel a

$$\mathfrak{F}f(q, \theta) = e^{il\theta} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} e^{il\beta - iqr \cos \beta} d\beta \right] Z_{l+2s}^l(r) r dr \quad (2.15)$$

összefüggéshez jutunk. A belső integrál a Bessel függvények egyik definiáló integráljával hozható kapcsolatba [8]:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau = \frac{e^{il\pi/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\beta - x \cos \beta)} d\beta \quad (2.16)$$

ahol $\alpha = \pi/2$ -t választottunk és alkalmaztuk a $\tau = \beta + \pi/2$ helyettesítést. Ezt felhasználva a

$$\mathfrak{F}f(q, \theta) = 2\pi e^{il(\theta - \pi/2)} \int_0^{\infty} Z_{l+2s}^l(r) J_l(qr) r dr \quad (2.17)$$

alakot kapjuk. Ez az integrál egy Hankel-transzformáció, Erdélyi, Magnus, Oberhettinger és Tricomi alapján [9]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} J_l(qr) q dq = \begin{cases} 0 & \text{ha } 1 < r < \infty \\ r^l P_s^{(l,0)}(1-2r^2) & \text{ha } 0 < r < 1 \end{cases}, \quad (2.18)$$

ahol $P_s^{(\alpha,\beta)}(x)$ a Jacobi-polinomot jelöli. Kihhasználva a Zernike radiális polinomok kapcsolatát a Jacobi polinomokkal az

$$r^l P_s^{(l,0)}(1-2r^2) = (-1)^s r^l P_s^{(0,l)}(2r^2-1) = (-1)^s Z_{l+2s}^l(r) \quad (2.19)$$

eredményhez jutunk. A Hankel-transzformáció inverze önmaga [9], ezért

$$\int_0^{\infty} Z_{l+2s}^l(r) J_l(qr) r dr = (-1)^s \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q}. \quad (2.20)$$

Az utolsó lépés egy q változó szerinti egydimenziós inverz Fourier-transzformáció:

$$\mathfrak{R}f(t, \theta) = \mathfrak{F}_q^{-1}[\mathfrak{F}f(q, \theta)] = 2\pi e^{i\theta} e^{i\pi/2} (-1)^s \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} e^{itq} dq. \quad (2.21)$$

Az integrál elvégzését megkönnyíti, ha az integrandus tényezőinek paritását megvizsgáljuk: a reciprokfüggvény páratlan, az e^{ix} függvény pedig felírható egy szinusz (páratlan) és egy koszinusz (páros) függvény összegeként az Euler-képlet segítségével. A $J_n(x)$ Bessel függvényekről tudjuk, hogy páros n -re párosak, páratlanra pedig páratlanok [4]. A fenti integrál így a következő alakba írható:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} e^{itq} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} \cos(tq) dq + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} \sin(tq) dq. \quad (2.22)$$

Ha l páros, akkor az integrál kiszámítható Gradshteyn és Ryzhik 728. oldalán található 2. összefüggése alapján [10]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} e^{itq} dq = 2 \int_0^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} \cos(tq) dq = \frac{2}{l+2s+1} \cos((l+2s+1) \arccos(t)). \quad (2.23)$$

Felhasználva, hogy $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ és $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, a

$$\begin{aligned} \frac{2(-1)^s}{l+2s+1} \cos((l+2s+1) \arccos(t)) &= \\ &= \frac{2(-1)^s}{l+2s+1} \cos\left(l\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin((l+2s+1) \arccos(t))}{\sin(\arccos(t))} \sin(\arccos(t)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

kifejezést kapjuk. Észrevehetjük, hogy ebben megjelenik a másodfajú Csebisev polinom definíciója, így az inverz függvényekről ismert azonosságot alkalmazva a

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} \cos(tq) dq = \frac{2(-1)^s}{l+2s+1} \cos\left(l\frac{\pi}{2}\right) U_{l+2s}(t) \sqrt{1-t^2} \quad (2.25)$$

összefüggést kapjuk. Páratlan l esetén hasonló módon járhatunk el, így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{l+2s+1}(q)}{q} e^{itq} dq = \begin{cases} \frac{2(-1)^s}{l+2s+1} \cos\left(l\frac{\pi}{2}\right) U_{l+2s}(t) \sqrt{1-t^2} & \text{ha } l \text{ páros} \\ \frac{2i(-1)^s}{l+2s+1} \sin\left(l\frac{\pi}{2}\right) U_{l+2s}(t) \sqrt{1-t^2} & \text{ha } l \text{ páratlan} \end{cases} \quad (2.26)$$

eredményre jutunk, ezt felhasználva, megkaphatjuk a sor egyes tagjainak transzformáltját:

$$\mathfrak{R} [Z_{|l+2s}^l(r)e^{jl\varphi}] = \frac{2}{|l|+2s+1} \sqrt{1-t^2} U_{|l+2s}(t) e^{il\theta}. \quad (2.27)$$

Ezeket behelyettesítve a sorba, visszakapjuk az eredeti állításunkat [2].

Tekintsük a Radon-transzformált

$$\mathfrak{R}f(t, \theta) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{2A_{l,s}}{|l|+2s+1} \sqrt{1-t^2} U_{|l+2s}(t) e^{il\theta} \quad (2.28)$$

sor alakú felírását. Az $A_{l,s}$ együtthatót ekkor úgy határozhatjuk meg, hogy mindkét oldalt beszorozzuk $U_{|l+2s}(t)e^{-il\theta}$ -val, majd integrálunk t és θ szerint:

$$A_{l,s} = \frac{|l|+2s+1}{2\pi^2} \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathfrak{R}f(t, \theta) U_{|l+2s}(t) e^{-il\theta} dt d\theta. \quad (2.29)$$

Ezek ismeretében a rekonstrukció elvégezhető.

A fenti levezetés alapján a $U_{|l+2s}(t)e^{il\theta}(1-t^2)^{1/2}$ függvények a Radon-tér egy teljes bázisát alkotják. Emellett észrevehetjük azt is, hogy a $J_{|l+2s+1}(q)e^{il\theta}/q$ függvények a Fourier-tér alkalmas bázisai. Az így meghatározott függvényrendszereket és jellemzőiket a 2.1. táblázatban foglaltam össze [2].

Tér	Bázisfüggvények	Értelmezési tartomány	Súlyfüggvény
Valós	$Z_{ l+2s}^l(r)e^{il\varphi}$	$0 \leq r \leq 1$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	r
Fourier	$J_{ l+2s+1}(q)e^{il\theta}/q$	$0 \leq q < \infty$ $0 \leq \varphi < 2\pi$	q
Radon	$U_{ l+2s}^l e^{il\varphi} (1-t^2)^{1/2}$	$-1 \leq t \leq 1$ $0 \leq \theta < 2\pi$	$(1-t^2)^{-1/2}$

2.1. táblázat. Valós-, Fourier- és Radon-tér bázisfüggvényei

3. fejezet

Implementáció

Az előző fejezetben ismertetett inverziós módszert MATLAB nyelven implementáltam. Az első lépés az egyes ortogonális polinomrendszerek előállítását volt. A másodfajú Csebisev-polinomok generálására kézenfekvőnek tűnt a (2.2) képlet alkalmazása. Erről viszont kiderült, hogy magasabb indexű ($n > 30$) tagok esetén instabillá válik, így használhatósága igencsak korlátozott. A Zernike-polinomok esetén is ismert egy explicit összefüggés, de ennek használata szintén instabillak bizonyult, emiatt az alkalmazásokban széleskörűen elterjedt *q-rekurziós* algoritmust implementáltam. Mind az ellenőrzés, mind az inverzió későbbi megvalósítása végett, fontos volt az egyes függvényrendszerek szerinti sorfejtés leprogramozása. Az előbb említett polinomrendszerek mellett implementáltam egy exponenciális Fourier-sorfejtést is, ezt az algoritmus későbbi részében fogom alkalmazni. Ezután következett a legfontosabb lépés: sorfejtés elvégzése a szinogram-térben. Az együtthatók meghatározásához a (2.29) kettős integrálok elvégzése szükséges. Ehhez először a Fourier-sorfejtést végeztem el a szögváltozó szerint. A következő lépés az affin változó szerinti sorfejtés a másodfajú Csebisev-polinomokkal. Az így meghatározott együtthatók segítségével a rekonstruálni kívánt függvényt a radiálisan Zernike-polinomokkal, axiálisan komplex exponenciális függvényekkel adott sort összegezve állítottam elő. Ezekből a függvényekből úgy vettem mintát, hogy az értékeiket a Descartes-koordináta-rendszer rácspontjaiban határoztam meg, ezzel kikerülve az átmintavételezés problémáját. Az algoritmus vázlata a 3.1. ábrán látható.



3.1. ábra. Rekonstrukciós algoritmus blokkdiagramja.

3.1. Polinomrendszerek generálása

Az ortogonális polinomok sokszor felírhatók zárt alakban, ezért ez a legegyszerűbb mód az előállításukra. Ezek az alakok viszont sok esetben nem stabilak, ezért egyéb módszerekhez kell folyamodnunk. Az egyik ilyen, általam is használt lehetőség a rekurzió. A rekurziós formulák előnye, hogy általában egyszerűbb, kis számításigényű műveletekből épülnek fel, így jóval gyorsabban előállíthatjuk a kívánt polinomrendszer első N tagját.

3.1.1. Másodfajú Csebisev-polinomok generálása

A másodfajú Csebisev-polinomok generálását először a (2.2) direkt formulával végeztem el. Ezekről később, mikor a sorfejtésnél próbáltam őket felhasználni, kiderült, hogy a nevező szingularitása miatt az $[-1, 1]$ intervallum két szélén instabilak. Ehelyett az alábbi rekurzív algoritmust használtam [4]

$$U_0(x) = 1 \quad (3.1)$$

$$U_1(x) = 2x \quad (3.2)$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \quad (3.3)$$

A formula segítségével a generálást elvégző eljárás rögtön az algoritmus elején az összes később szükséges tagot előállítja. Mint látható, a nagy számításigényű trigonometrikus és inverz trigonometrikus függvények eltűntek. Habár az algoritmus szempontjából ez nem jelentős, de így kisebb számításigényű feladattá vált a polinomok meghatározása. A rekurzív összefüggés használatával kb. 100 polinom legenerálásának futási ideje esik egy nagyságrendbe az explicit módszernek egyetlen polinom előállításához szükséges futási idejével.

3.1.2. Zernike radiális polinomok generálása

A Zernike radiális polinomok előállítását először a (2.5) definíció alapján valósítottam meg. A stabilitás vizsgálatára ismét egy egydimenziós sorfejtést végeztem el. Ebből kiderült, hogy a magasabb fokszámú polinomok generálására ez a direkt formula is alkalmatlan. Nem ez volt azonban az egyetlen probléma, a magasabb rendű polinomok esetén több lesz az összegzésben lévő tagok száma. Ráadásul ezen tagok számítása is lassú a faktoriálisok miatt, így drasztikusan megnövekszik a futási idő is. Mivel ez a polinomrendszer kétindexes, magasabb rendű sorfejtések esetén a szükséges polinomok száma is nagymértékben növekszik.

A fentebb említett problémák megoldására több rekurzív algoritmus is született, ezek közül a legelterjedtebb az úgynevezett q -rekurzív algoritmus. Ez a módszer a polinomok kiszámítását a következő összefüggések segítségével teszi lehetővé:

$$Z_n^n(r) = r^n \quad \text{ha } m = n \quad (3.4)$$

$$Z_n^{n-2}(r) = nZ_n^n(r) - (n-1)Z_{n-2}^{n-2}(r) \quad \text{ha } n - m = 2 \quad (3.5)$$

$$Z_n^{m-4}(r) = H_1 Z_n^m(r) + \left(H_2 + \frac{H_3}{r^2} \right) Z_n^{m-2}(r) \quad \text{egyébként} \quad (3.6)$$

ahol a H_1 , H_2 és H_3 együtthatókat a

$$H_1 = \frac{m(m-1)}{2} - mH_2 + \frac{H_3(n+m+2)(n-m)}{8} \quad (3.7)$$

$$H_2 = \frac{H_3(n+m)(n-m+2)}{4(m-1)} + (m-2) \quad (3.8)$$

$$H_3 = \frac{-4(m-2)(m-3)}{(n+m-2)(n-m+4)} \quad (3.9)$$

összefüggések definiálják. A módszer numerikusan stabil, így azt implementálva egy gyors és megbízható algoritmust kaptam a Zernike polinomok kiszámítására [11].

3.2. Sorfejtés

Az általam vizsgált rekonstrukciós eljárás legfontosabb eleme egy speciális kétdimenziós sorfejtés a Radon térben. Ahhoz, hogy ezt el tudjam végezni, egydimenziós Fourier- és másodfajú Csebisev-sorfejtés programoztam le.

3.2.1. Egydimenziós sorfejtések

A Fourier-együtthatókat a függvény diszkrét Fourier transzformációjával határoztam meg, ehhez a jól ismert FFT algoritmust alkalmaztam. A másodfajú Csebisev-sorfejtésben az ortogonalitási integrálok elvégzésére a legalkalmasabb módszer a Gauss-Csebisev kvadrátúra használata [12]. Ahhoz, hogy ezt érdemben alkalmazni tudjuk, a függvényünket a Csebisev talppontokon kell mintavételezni. Mivel én a szinogramjaimat a MATLAB beépített függvényével készítettem el, számomra csak egyenletes mintavételezésű adatok álltak rendelkezésre. Ezért a numerikus integrálok meghatározásához az összetett Simpson formulát használtam [12].

3.2.2. Rekonstrukciós sorfejtés

A rekonstrukcióhoz szükséges együtthatók meghatározásához először a

$$\Re f(t, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G} g_l(t) e^{il\theta} \quad (3.10)$$

Fourier-sorfejtést végeztem el, minden $t \in [-1, 1]$ -re. A radiális rész felírható a

$$g_l(r) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{l,s} Z_{l+2s}^l(r) \quad (3.11)$$

alakban. Ekkor $\mathfrak{G} g_l(t)$ kifejezhető a (2.29) egyenlet alapján:

$$\frac{\mathfrak{G} g_l(t)}{2\sqrt{1-t^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{l,s}}{l+2s+1} U_{l+2s}(t). \quad (3.12)$$

Ebből az $A_{l,s}$ együtthatót másodfajú Csebisev-sorfejtéssel határoztam meg:

$$A_{l,s} = \frac{|l|+2s+1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mathfrak{G} g_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} U_{|l|+2s}(t) \sqrt{1-t^2} dt. \quad (3.13)$$

Amennyiben rendelkezésre állnak olyan adatok, amelyekben a $\mathfrak{G} g_l(t)$ értékei a Csebisev talppontokban van megadva, akkor a legalkalmasabb módszer az integrál elvégzésére az elsőfajú Gauss-Csebisev kvadrátúra [12]:

$$A_{l,s} \approx \frac{|l|+2s+1}{\pi} \sum_{i=0}^n w_i \mathfrak{G} g_l(t_i) U_{|l|+2s}(t_i) \sqrt{1-t_i^2}, \quad (3.14)$$

ahol $w_i = \pi/n$ bármely i -re és t_i a $T_n(t)$, elsőfajú Csebisev-polinom zérushelyei, tehát

$$t_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right). \quad (3.15)$$

Amennyiben egyenletes mintavételezésű adataink vannak, akkor az integrálban $\sqrt{1-t^2}$ -tel egyszerűsítünk és az így kapott formula numerikus integrálása már könnyen megvalósítható, például az általam is használt összetett Simpson-formulával.

3.3. Rekonstrukció

Az eredményeket polárkoordinátás alakban kapjuk meg. A sorfejtés használatának köszönhetően viszont nincs szükség az átmintavételezésre. Először meghatároztam minden x és y értékhez tartozó r és φ értéket, majd a Zernike radiális polinomok, illetve az exponenciális függvények értékét ezekben a pontokban számítottam ki. Ilyen módon elvégezve az összegzést megkaptam az inverz Radon-transzformáltat.

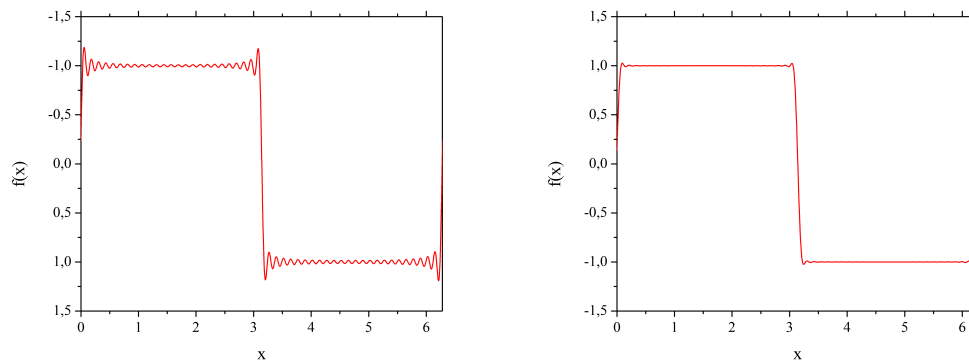
Az így elvégzett rekonstrukcióban megjelenik az úgynevezett Gibbs jelenség. Ennek kiküszöbölése végett, mindkét sorfejtést az úgynevezett Lánzos-féle σ -szűrővel láttam el [13]:

$$\sigma(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(\pi x), \quad (3.16)$$

így a sorfejtés a következőképpen módosult:

$$f(r, \varphi) \approx \sum_{s=0}^S \sum_{l=-L}^L A_{l,s} \sigma\left(\frac{s}{S-1}\right) \sigma\left(\frac{l}{L-1}\right) Z_{l+2s}^l(r) e^{il\varphi}. \quad (3.17)$$

A szűrő hatását a négyzetjel Fourier-sorfejtésével szemléltetem a 3.2. ábrán.



3.2. ábra. Négyzetjel Fourier-sorfejtése szűrő nélkül (balra) és Lánzos-féle σ -szűrővel (jobbra).

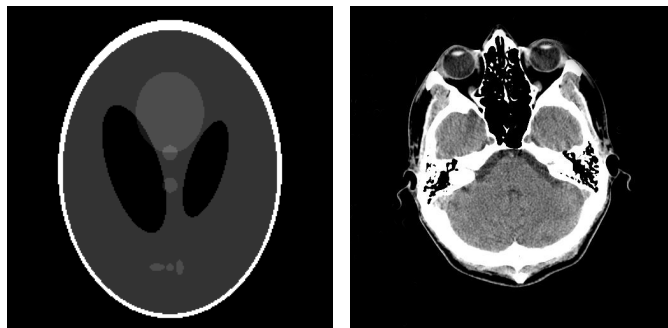
4. fejezet

Elemzés

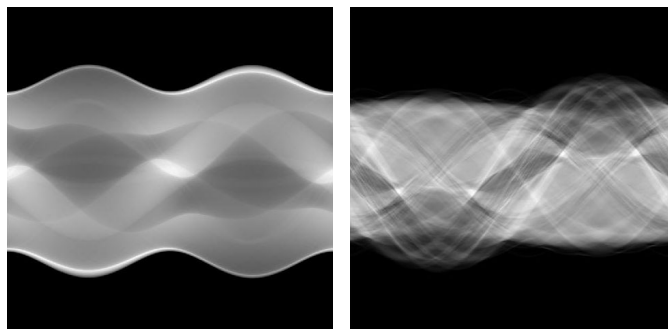
Ebben a fejezetben ismertetem az általam megvalósított inverziós módszer elemzését. Ehhez először egy L2 értelemben vett zajnormát definiáltam és ennek a segítségével az egyes módszerek kvantitatív jellemzését végeztem el. Ezt felhasználva először megvizsgáltam a Lánczos-féle szűrő hatását a rekonstrukcióra, majd a szűrt visszavetítéssel végeztem összehasonlításokat. Tanulmányoztam az egyes képalkotó eljárások hatékonyságát zajos szinogram esetén. Legvégül az egyes módszerek felbontóképességét elemeztem.

4.1. Rekonstrukciós példák

Az algoritmusom működését először az alábbi, úgynevezett Shepp-Logan fantomon és egy koponyáról készült CT-képen fogom demonstrálni (4.1. ábra). Mindkét minta 500×500 diszkrét adatpontból állt.

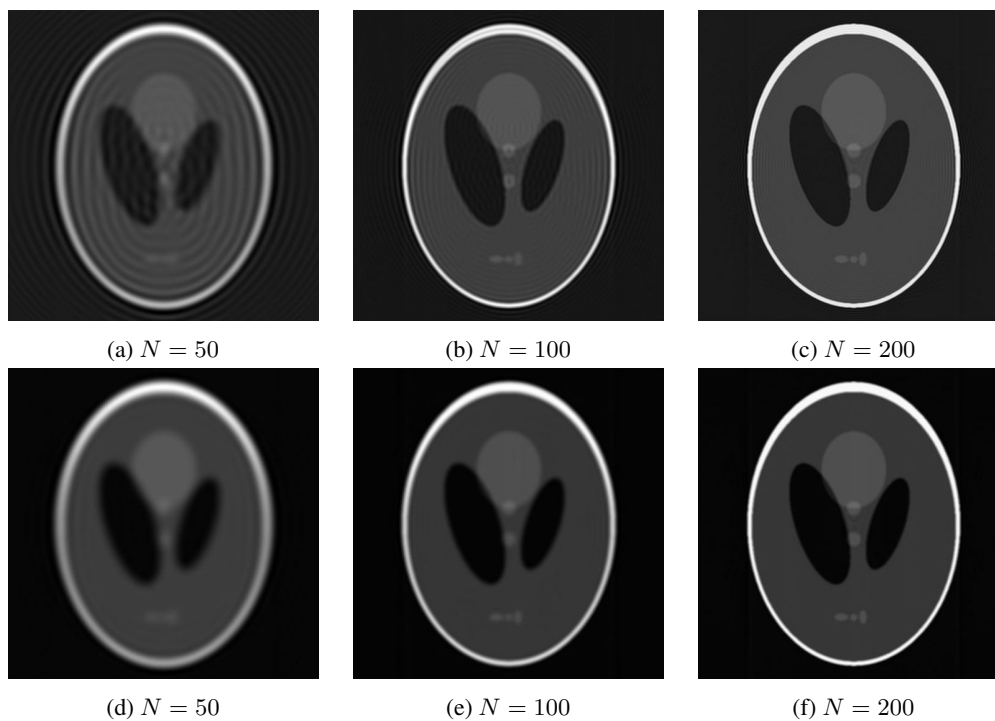


4.1. ábra. Az elemzés során használt minták.

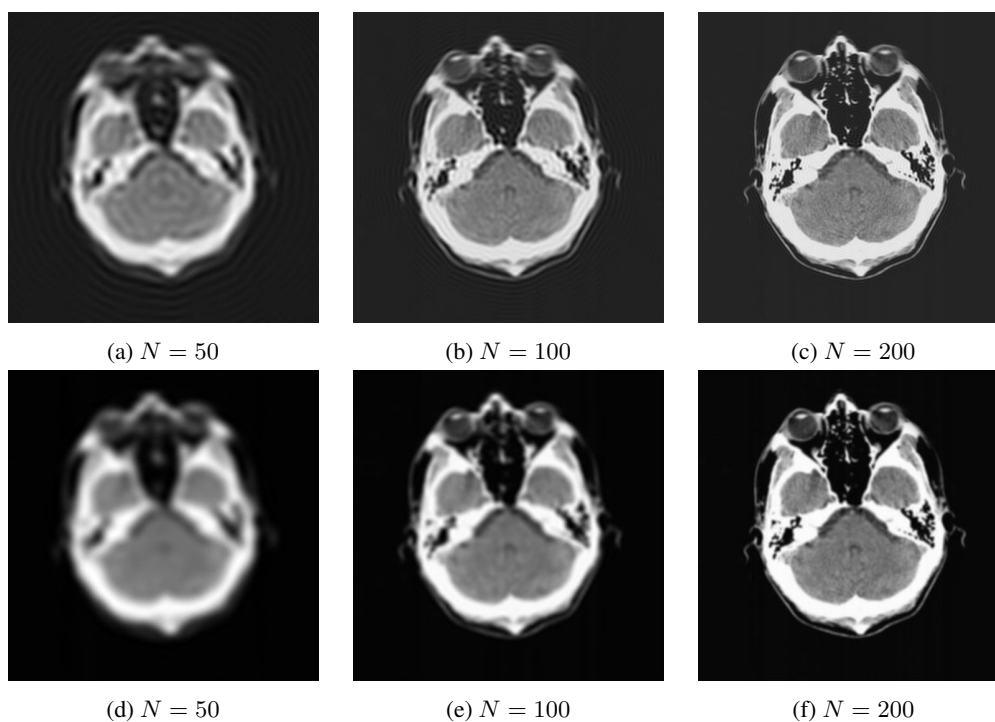


4.2. ábra. Az elemzés során használt szinogramok.

A szinogramokat a MATLAB Image Processing Toolbox-ában található *radon* függvénnyel készítettem el (4.2. ábra).

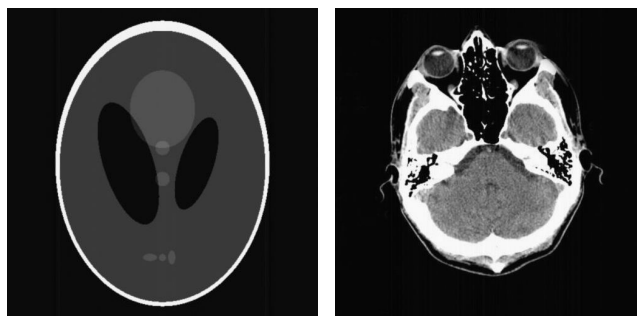


4.3. ábra. Rekonstruált fantom szűrés nélkül (a-c) és Lánzos-féle szűrővel (d-e).



4.4. ábra. Rekonstruált koponya szűrés nélkül (a-c) és Lánzos-féle szűrővel (d-e).

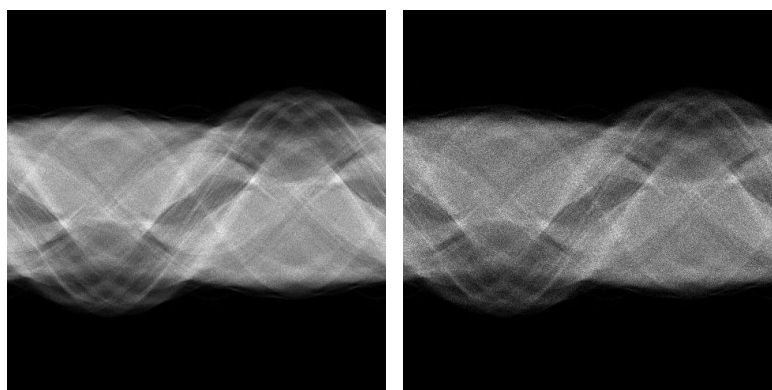
Mindkét kép esetén szűrés nélkül (4.3a-c ábra és 4.4a-c ábra) és szűrővel (4.3d-f ábra és 4.4d-f ábra) is elkészítettem a rekonstrukciót 50, 100 és 200 tagú sorfejtéssel. Látható, hogy a szűrés nélküli képeken, főleg alacsonyabb tagszámú sorfejtések esetén a Gibbs jelenség jelentős minőségbeli romlást okoz. Ezzel szemben a Lánczos-féle szűrő megszünteti az éléknél fellépő oszcillációkat, viszont kisebb tagoknál ez kontrasztcsökkenést okoz. Összehasonlításképpen a rekonstrukciót elvégeztem a MATLAB Image Processing Toolbox-ában található *iradon* függvényvel (4.5. ábra), amely szűrt visszavetítéses algoritmust használ, az 1. fejeztben ismertetett Ram-Lak szűrővel.



4.5. ábra. Fantom és koponya rekonstrukciója szűrt visszavetítéssel.

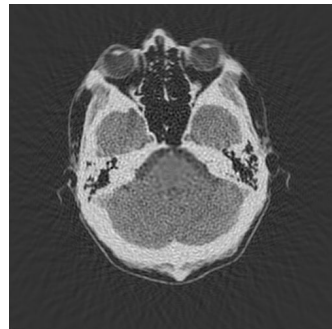
4.2. Poisson-zaj

Fotondetektáláson alapuló műszereknél (például emissziós tomográfia) találkozhatunk az úgynevezett *beütési zajjal*. Ennek a jelenségnek az oka, hogy diszkrét energiacsomagokat detektálunk, így a véletlen események (beütések) bekövetkezése Poisson eloszlású. A képrekonstrukcióban legelterjedtebb szűrt visszavetítés nagy gyengesége viszont a zajra való érzékenysége. Ezért, hogy az általam megvalósított eljárást a szűrt visszavetítéssel hasonlíthassam össze, mesterségesen generáltam Poisson-zajt a szinogramon (4.6. ábra). Ezután a rekonstrukciót 200 tagig végeztem el szűrés nélkül és Lánczos szűrővel, majd szűrt visszavetítéssel 0 és 50 %-os levágású szűrővel.

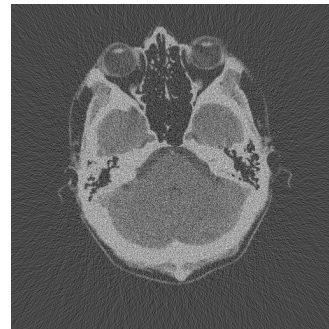


4.6. ábra. 10 (balra) és 20 %-os (jobbra) mérési pontosságot szimuláló Poisson-zajjal terhelt szinogramok.

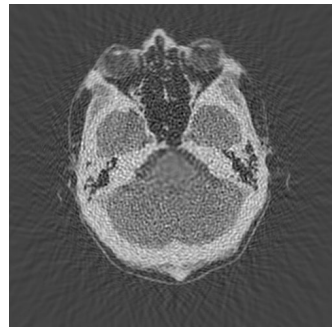
Látható, hogy szűrés nélkül a sorfejtés és levágás nélkül a szűrt visszavetítés egyaránt rosszul teljesít, a részletek teljesen elvesznek (4.7. ábra). A szűrők megfelelő használatával mindkét algoritmus esetén a zaj hatása jelentősen csökkenthető (4.8. ábra). Érdekes megfigyelni, hogy míg a szűrt visszavetítés jobban megőrzi az élket, addig a sorfejtés a kontrasztviszonyokat tekintve teljesít jobban.



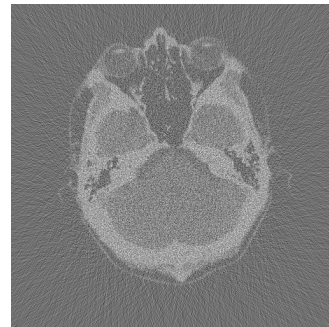
(a) Sorfejtés, 10 % zaj



(b) Szűrt visszavetítés, 10 % zaj

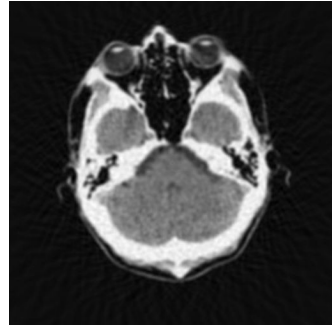


(c) Sorfejtés, 20 % zaj

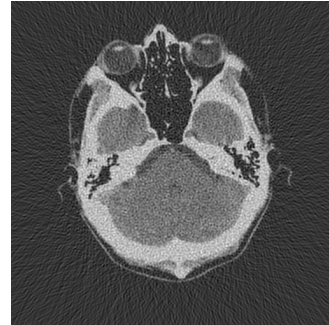


(d) Szűrt visszavetítés, 20 % zaj

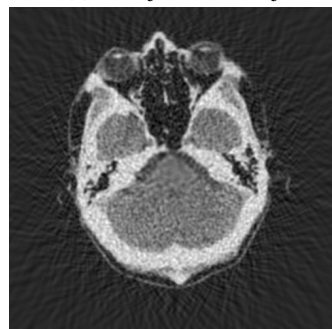
4.7. ábra. Rekonstruált zajos szinogram szűrés nélküli sorfejtéssel és levágás nélküli szűrt visszavetítéssel.



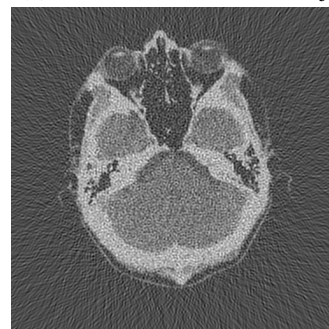
(a) Sorfejtés, 10 % zaj



(b) Szűrt visszavetítés, 10 % zaj



(c) Sorfejtés, 20 % zaj



(d) Szűrt visszavetítés, 20 % zaj

4.8. ábra. Rekonstruált zajos szűrési sorfejtéssel és 50 %-os levágású szűrt visszavetítéssel.

4.3. Zajmérték

A rekonstrukciós módszerek kvantitatív értékelésére az L_2 -normát használtam fel.

4. Definíció (L2-norma). Legyen $f(x, y)$ kétváltozós függvény. Ekkor az $f(x, y)$ függvény L_2 értelemben vett normája

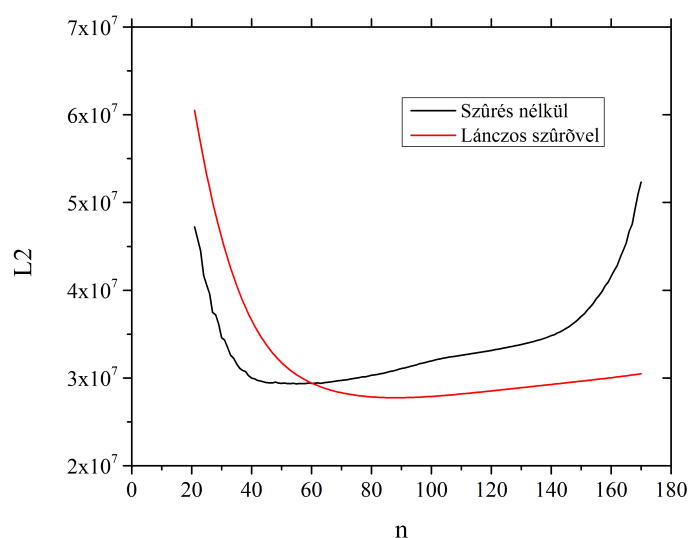
$$\|f(x, y)\|_{L_2} := \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} [f(x, y)]^2 dx dy \quad (4.1)$$

integrállal definiált kifejezés.

Ez alapján képeztem az eredeti $f(x, y)$ függvény és a rekonstrukcióval kapott $f^*(x, y)$ függvény különbségének normáját, ezáltal egy *zajmértéket* határoztam meg. Mivel a függvényeimet csak diszkrét pontokban ismertem, ezért a következő összefüggés alapján számoltam a normát.

$$\|f(x, y) - f^*(x, y)\|_{L_2} \approx \sum_i \sum_j [f(x_i, y_j) - f^*(x_i, y_j)]^2 \quad (4.2)$$

Ezzel a módszerrel, szűrővel és szűrés nélkül is különböző tagokig elvégezve a sorfejtést, meghatároztam az L_2 -normát egy 200×200 diszkrét pontban ismert minta esetén (4.9. ábra).



4.9. ábra. L_2 -norma a sorfejtési tagok számának függvényében, szűrő nélkül és Lánczos szűrővel.

Látható, hogy alacsony tagszámú sorfejtések esetén a Gibbs-jelenség még nem túl jelentős, így itt a szűrés okozta kontrasztsökkenés nagyobb eltérést okozott. Viszont közepes tagszámnál már a szűrő hatása jelentősen javul. Magas tagszámok esetében a norma ismét növekedni kezd, ennek oka a diszkrét mintavételezés. A Lánczos-szűrővel készített rekonstrukció esetében viszont még itt sem tapasztalható nagy hiba, mivel a szűrő a rosszul mintavételezett magasabb indexű tagokat gyengíti. Az eredeti módszer esetén a zajgörbe minimuma 55, míg a szűrt módszernél 88 tagos sorfejtésnél van.

4.4. Felbontásanalízis

Az L2-norma önmagában még nem ad elég információt a rekonstrukció minőségéről. A képalkotórendszerek vizsgálatában elterjedt módszer az *optikai átviteli függvény* (OTF – Optical Transfer Function) használata [14]. Ennek a két összetevőjét szokták meghatározni, az amplitúdóját, a *modulációs átviteli függvényt* (MTF – Modulation Transfer Function) és a fázisát, a *fázis átviteli függvényt* (PTF – Phase Transfer Function). Ezekkel lehetőség nyílik egy képalkotórendszer felbontásának jellemzésére. A gyakorlatban főként az MTF használata praktikus. Ez azt jellemzi, hogy adott frekvencia a bemenethez képest mekkora amplitúdóval van jelen a kimenetben. Szemléletesen, ha az MTF magas frekvenciák esetén csökken, eltűnik, akkor ez azt jelenti, hogy a kimeneten kapott kép homályosabb lesz. A precíz definíció a következő:

5. Definíció (Modulációs átviteli függvény). Egy képalkotórendszer modulációs átviteli függvénye (MTF) az

$$\text{MTF}(\omega) = \left| \frac{\mathfrak{F}g(\omega)}{\mathfrak{F}f(\omega)} \right| \quad (4.3)$$

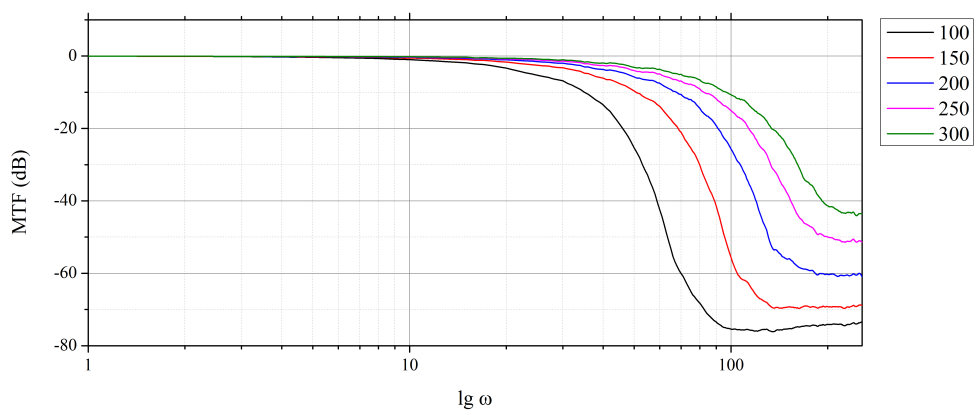
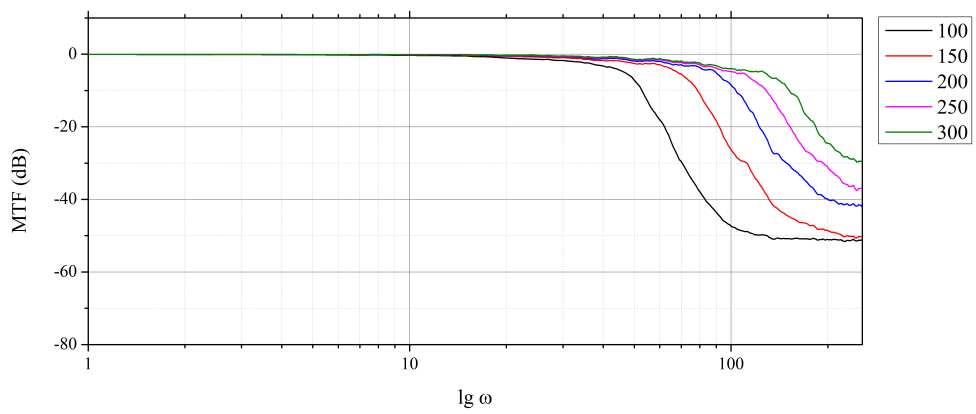
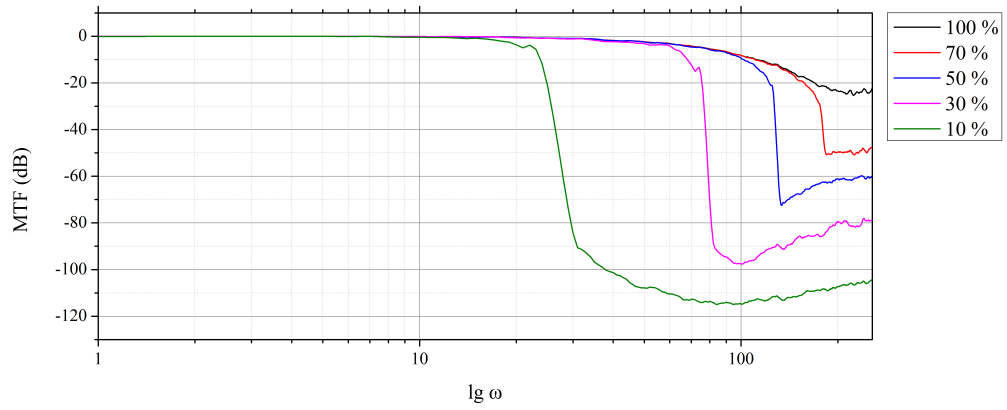
összefüggéssel definiált kifejezés, ahol f a rendszerre adott bemenet, g pedig a rendszer jelre adott válasza.

A mi esetünkben a bemenetet az eredeti függvény, a választ pedig a rekonstrukcióval előállított kép jelenti. Az MTF-et BODE-diagramon ábrázoltam. Az analízist a különböző tagokig végzett sorfejtések esetén vizsgáltam szűrő nélkül és Lánzos-féle szűréssel. Összehasonlításként a szűrt visszavetítés MTF-jét is elkészítettem, különböző levágású szűrőkkel (4.10). A diagramokon látható, hogy a kis frekvenciákat a rekonstrukció megfelelő módon átengedi, itt az erősítés 0 dB. A nagyobb frekvenciák viszont jelentősen gyengülnek. A sorfejtés tagszámának növelésével a felbontás is növekszik. Az egyes felbontások kvantitativ jellemzéséhez meghatároztam az 50 %-os gyengítéshez (–3 dB) tartozó frekvenciákat (4.1. táblázat).

Tagszám	Sorfejtés		Szűrt visszavetítés	
	Frekvencia		Levágás	Frekvencia
	Szűrés nélkül	Lánzos szűrővel		
100	38,33	18,97	0 %	59,21
150	60,47	27,92	30 %	57,99
200	70,47	27,92	50 %	57,30
250	80,40	45,07	70 %	47,34
300	83,34	49,35	90 %	19,41

4.1. táblázat. 50 %-os gyengítéshez tartozó frekvenciák.

Látható, hogy a Lánzos-féle szűrő nagymértékben ront a felbontóképességen. Ez annak köszönhető, hogy a finom részleteket jelentő magasabb fokú tagokat a szűrő elnyomja. Azt is megfigyelhetjük, hogy a szűrt visszavetítés felbontóképessége 50 %-os levágás fölött kezd erőteljesen gyengülni, 50 %-nál kisebb levágások esetén a felbontás csak kis mértékben romlik. A legjobb eredményeket a szűrés nélküli sorfejtéssel lehetett elérni, ennek viszont nagy hátránya a Gibbs-jelenség, ami a képünkön hamis mintázatokat eredményezhet.



4.10. ábra. Szűrt visszavetítés (felül), sorfejtéses módszer MTF-je szűrés nélkül (középen) és szűréssel (alul).

5. fejezet

Összegzés

A tomográfiában egyeduralgkodó szűrt visszavetítéses rekonstrukció problémái miatt felmerült az igény további inverziós módszerek kidolgozására is. Én az egyik ilyen, régebb óta ismert, de kevésbé elterjedt módszert, a sorfejtéses rekonstrukciót valósítottam meg. A programozás során több nem várt akadályba és kihívásba ütköztem, ilyen volt az egyes polinomgenerálási módszerek instabilitása vagy a Gibbs-jelenség kezelése. A dolgozatban láthattuk, hogy a módszer az elméletnek megfelelően működik és alkalmas lehet valódi mérési adatok rekonstruálására. Az elemzések során kiderült, hogy ennek az eljárásnak is van több gyenge pontja. A zajos szinogramokon végzett rekonstrukciók alapján viszont nyugodtan kijelenthetjük, hogy lehet létjogosultsága ennek az algoritmusnak is.

A téma azonban koránt sincs kimerítve. A továbbiakban érdemes lehet még a hasonló ortogonális függvényekkel végezhető inverziós módszereket tanulmányozni, illetve a jelenlegi módszert továbbfejleszteni. Továbbá célszerű lenne az algoritmust egy olyan mérési összeállításon tesztelni, amellyel a Gauss-Csebisev kvadratúrához szükséges pontokban lehet mintát venni.

Valószínűleg az általam tesztelt módszer nem fogja átvenni a szűrt visszavetítés helyét a gyakorlatban, de sok kiaknázatlan lehetőséget rejt még magában. Így továbbfejlesztve akár bizonyos esetekben jól használható alternatív módszer is válhat belőle.

Irodalomjegyzék

- [1] J. Radon, „Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten”, *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. Leipzig -- Phys. Kl.*, **69** (1917).
- [2] S. R. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Application*, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore (1983).
- [3] C. L. Epstein, *The Mathematics of Medical Imaging*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (2003)
- [4] M. Abramowitz, I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, U. S. Government Printing Office, Washington, DC.
- [5] T. J. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*, Wiley-Interscience, New York (1974).
- [6] M. Born, E. Wolf *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge University Press (1999).
- [7] R. B. Marr, „On the Reconstruction of a Function on a Circular Domain from a Sampling of Its Line Integrals”, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, **45**, 357-374 (1974).
- [8] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed.* Cambridge, England: Cambridge University Press, 1966.
- [9] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, McGraw-Hill Book Company Inc., New York (1954).
- [10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition*, Academic Press, New York (2007).
- [11] G. A. Papakostas, Y. S. Boutalis, C. N. Papaodysseus, D. K. Fragoulis, „Numerical error analysis in Zernike moments computation”, *Image and Vision Computing*, Vol. **24**, No. 9, 960–969 (2006).
- [12] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing, 3rd Edition*, Cambridge University Press (2007)
- [13] D. Gottlieb, C.-W. Shu, „On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution”, *Society of Applied and Industrial Mathematics*, Vol. **39**, No. 4, 644–668 (2006).
- [14] M. R. Schroeder, „Modulation Transfer Functions: Definition and Measurement” *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. **49**, No. 3, 179-182 (1981)