



# Evolúciós társadalmi dilemma játékok négyzetrácson egy harmadik kevert stratégiával

TDK-dolgozat

Hódsági Kristóf  
BME TTK Fizika BSc III. évf.

**Konzulens:**  
Szabó György  
MTA EK MFA  
Komplex rendszerek

**2015.**

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Elméleti háttér és formalizmus</b>	<b>4</b>
2.1. Evolúciós játékok rácson . . . . .	4
2.2. Potenciáljátékok és kétstratégias társadalmi dilemmák . . . . .	5
2.3. Ising modell párhuzama a társadalmi dilemmákkal . . . . .	8
2.4. Kevert stratégiák . . . . .	9
<b>3. Háromstratégias társadalmi dilemma vizsgálata</b>	<b>12</b>
3.1. Célkitűzés és alapvető számolások . . . . .	12
3.2. Monte Carlo szimulációk logit szabálynál . . . . .	13
3.2.1. Szimulációk ferromágneses alapesetben . . . . .	14
3.2.2. Szimulációk antiferromágneses alapesetben . . . . .	16
3.2.3. Elméleti fázisdiagram ellenőrzése . . . . .	19
3.3. Monte Carlo szimulációk imitációs szabálynál . . . . .	21
3.3.1. Fázisdiagram készítése . . . . .	22
3.3.2. Irányított perkolációs átmenet szimulálása . . . . .	24
<b>4. Összegzés</b>	<b>27</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>28</b>

## 1. Bevezetés

A játékelmélet olyan helyzeteket modellez, ahol a játékosok nyereményét a saját döntésükön kívül játékos társaik döntései is befolyásolják. Különösen érdekesek azok az élet-helyzetek, amikor a játékosok optimális döntésének kiválasztását a játékos társak ellenérdekeltsége akadályozza. Az evolúciós játékelmélet ilyen rendszereket vizsgál számos egyszerűsítő feltétel mellett. A sokszereplős játékelméleti modellek elemzését nagy mértékben egyszerűsíti, ha az egyforma játékosok közötti kölcsönhatást azonos párkölcsönhatások összegeként közelítjük. Ebben a közelítésben a kölcsönhatást egy  $n \times n$ -es nyeremény mátrixszal írhatjuk le [1], aminek elemei definiálják a játékosok nyereményét, ha az egyik az  $i$ -edik, a másik pedig a  $j$ -edik lehetőséget (tiszta stratégiát) választja az  $n$  lehetséges döntés közül. Az evolúciós játékelméleti modellekben [2–5] a játékosok ugyanazt a stratégiát használják játékos társaikkal szemben egy adott időben és az így kapott nyereményeiket növelhetik azzal, hogy egyszerre vagy egymást véletlen sorrendben követve egy másik tiszta stratégiát választanak.

A játékelméleti modellekben a játékosok képviselhetnek embert, növényt, állatot vagy baktériumot, és ennek megfelelően szolgálhatnak elméleti háttérként a közgazdasági, biológiai és szociológiai jelenségek számszerű vizsgálatánál. Az említett tudományterületek fejlődését a statisztikus fizika eszközei jelentős mértékben segítették, mert már évtizedek óta használunk olyan módszereket, amelyek segítségével meghatározható egy sokrészecskés rendszer makroszkopikus viselkedése, ha ismerjük a részecskék közötti párkölcsönhatást. Különösen szoros kapcsolat létezik a statisztikus fizika és az evolúciós játékelméleti modellek között, ha a kölcsönhatást egy potenciál játékkal írjuk le. Ismert, hogy az összes szimmetrikus kétstratégias mátrix játék ilyen.

Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk meg, hogy mi történik egy sokszereplős evolúciós játékelméleti modellben, ha a játékosok az eredeti két tiszta stratégia mellett használhatnak egy harmadik (kevert) stratégiát is, ami a tiszta stratégiák vegyes használatát jelenti. Pontosabban, a kevert stratégiánál a játékosok különböző valószínűséggel választhatják az egyik vagy másik stratégiát. Megmutatjuk, hogy a kibővített játék továbbra is potenciál játék marad, és emiatt használhatjuk a statisztikus fizika módszereit a makroszkopikus rendszer viselkedésének számszerű elemzésénél, ha a stratégia eloszlás fejlődését az ún. logit szabály vezérli. A logit szabály egy olyan sztochasztikus stratégiaváltás, amelyik az egyéni nyeremény növelését exponenciálisan növekvő súlyfaktorialisan segíti és az alacsony zajú határesetben eltünteti a rendszertől a kevert stratégiákat. Ez azért meglepő, mert a paraméterter egy tartományában a hagyományos evolúciós játékelmélet egy evolúciósan stabil kevert stratégia uralmát jósolja. A látszólagos ellentmondás feloldása érdekében megvizsgáltuk ugyanezt a térbeli modell egy utánzásra épülő dinamikai szabállyal is. Ez utóbbi modellben az evolúciósan stabil kevert stratégia már életképesnek bizonyult az evolúciós versengésben.

## 2. Elméleti háttér és formalizmus

### 2.1. Evolúciós játékok rácson

Általános szimmetrikus párkölcsönhatás esetén a kölcsönhatást jellemző  $n \times n$ -es mátrix alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ennek jelentése, hogy  $a_{i,j}$  az az elem, mely az egyik játékos  $i$ -dik, a másik játékos  $j$ -dik döntési opciójának választásakor írja le előbbi nyereményét a játék során.

A kölcsönhatást, vagy játékot azért nevezzük szimmetrikusnak, mert mindkét játékos számára ugyanezen  $\mathbf{A}$  mátrix adja meg a lehetséges kimeneteleket. A játékelméleti modellek lényege, hogy a játékosok nyereményét saját döntésük mellett partnerüké is befolyásolja, ezért célszerű definiálni a stratégia fogalmát, ami azt adja meg, hogy a játékos az adott  $n$  lehetőség közül melyiket választja. Mátrixos jelölésben ezt egy  $n$  dimenziós oszlopvektorként foghatjuk fel, melynek tiszta stratégiák esetén csak egy nem 0 eleme van:

$$\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ahol  $\mathbf{s}_x$  és  $\mathbf{s}_y$  rendre az  $x$  és  $y$  játékos stratégiája. Ezek alapján megadható a játékosok nyereménye a kölcsönhatás során:

$$u_x = \mathbf{s}_x^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_y \quad \text{és} \quad u_y = \mathbf{s}_y^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_x. \quad (3)$$

Fontos jellemzője a mátrixjátékoknak a Nash-egyensúly. Akkor beszélünk Nash-egyensúlyról, ha a döntés egyoldalú megváltoztatásával semelyik játékos sem képes növelni a saját nyereményét. A (3) egyenlet jelöléseivel élve egyensúlyi helyzetben  $u_x$  nem növelhető  $\mathbf{s}_x$  változtatásával,  $y$ -ra hasonló feltétel érvényes. Megmutatható, hogy minden párkölcsönhatásban létezik legalább egy Nash-egyensúly [6].

A modell kiterjeszthető térben, tehát a játékosok elhelyezhetők valamilyen rács pontjaiban úgy, hogy mindenki a szomszédos rácpontokkal áll kölcsönhatásban. Időbeli kiterjesztéssel pedig eljuthatunk az evolúciós játékelmélet modelljeihez, ahol a játékosok ismétlődő meneteket játszanak szomszédaikkal, és időről időre lehetőséget kapnak stratégiájuk módosítására annak reményében, hogy nyereményüket növelhetik.

Evolúciós játékoknál bevezethető az evolúciósan stabil stratégia (ESS) fogalma. Amennyiben a rácpontokon levő játékosokat egyedekkel azonosítjuk, akkor egy ESS-t választó populációval szemben nem tud sikeres lenni egy "mutáns", aki eltér az ESS-től [7].

Különbéle dinamikai szabályok állnak rendelkezésre az időfejlesztésnél: lehetséges determinisztikus [8], vagy sztochasztikus [9] alapon történő utánzás a jól teljesítő szomszédnak. A sztochasztikus dinamika, vagy logit szabály a fizikailag érdekesebb eset, hiszen a rendszer Boltzmann-eloszlásba fejlődik, ha a párkölcsönhatások potenciáljátékokkal (ld. később) írhatók le [10–12]. Ezen felül alkalmasan paraméterezett kétstratégias játékok és az Ising-modell [13, 14] között is hasonlóságok figyelhetők meg [15–20].

A dolgozatban négyzet rácson elhelyezkedő játékosok esetét vizsgáltuk, mindkét fentebb említett evolúciós dinamika esetén,  $n = 3$  különböző választható stratégiával. A nyeresymátrix paraméterezésében a kétstratégias társadalmi dilemmák jelölésrendszerét használtuk, ezért, valamint a fizikai analógiák mélyebb megértése végett a következőkben tekintjük át a potenciáljátékok elméletét, továbbá az ezek egy speciális eseteként kezelhető kétstratégias társadalmi dilemmákat.

## 2.2. Potenciáljátékok és kétstratégias társadalmi dilemmák

Kétstratégias modellnél a stratégiákat a (2) egyenlet alapján adhatjuk meg, az elterjedt jelölésekkel:

$$\mathbf{s}_x = D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vagy } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ahol a fogolydilemma játékból ismerős  $D$  (defection, élösködés), valamint  $C$  (cooperation, együttműködés) lehetőségek fordulnak elő. Ezek után a szomszédos játékosok nyereségeit a (3) összefüggés definiálja. A kétstratégias társadalmi dilemmák jelölésében [21] a nyeresymátrix négyparaméteres:

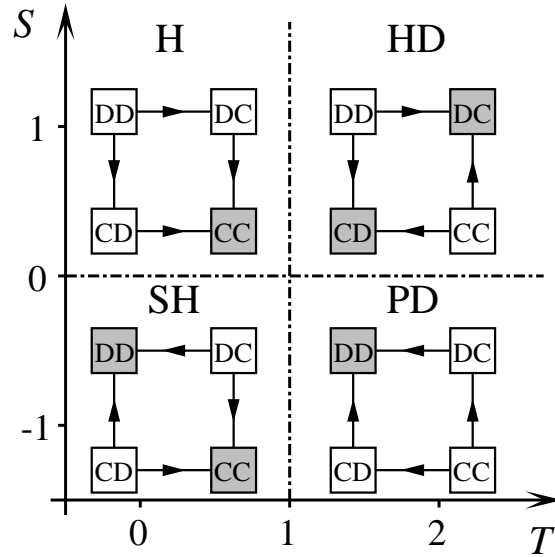
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P & T \\ S & R \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ahol a paraméterek jelentése rendre büntetés a kölcsönös élösködésért (Punishment), kísértés (Temptation), a balek nyeresége (Sucker's payoff), valamint a kölcsönös együttműködés jutalma (Reward). Tényleges dilemmahelyzetet a  $T > R > P > S$  paraméterválasztás okoz, és az általánosság csökkenése nélkül átskálázhatjuk a mátrixot úgy, hogy csak két paraméter szerepeljen benne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

A paraméterek megválasztásától függően négy lényeges tartományra oszlik a  $T - S$  paramétersík, ahogy ez az 1. ábrán látható. A stratégiapárok közti nyílak azt jelölik, hogy az egyoldalú stratégiaváltoztatások mikor kifizetődőek, mikor érdemes váltani. Könnyen belátható, hogy azok a pontok, ahonnan nem mutat ki nyíl, Nash-egyensúlyok.

Az angol rövidítések jelentései az adott paramétertartományban kialakuló játékok jellegzetességeire utalnak. Szarvasvadászatnál (SH) az azonos választáshoz tartozó helyzetek egyensúlyinak bizonyulnak. A harmónia (H) játék a kölcsönös együttműködés, a



1. ábra. Négy folyamatra a játékok jellemzésére a  $T - S$  síkon. A vízszintes ( $S = 0$ ) és a függőleges ( $T = 1$ ) szaggatott vonalak választják el a harmónia ( $H$ ), héja-galamb ( $HD$ ), szarvasvadászat ( $SH$ ), és fogolydilemma ( $PD$ ) tartományokat. Szürke négyzetek jelzik a Nash-egyensúlyokat.

fogolydilemma ( $PD$ ) a kölcsönös élőködés kialakulását segíti elő, míg a héja-galamb ( $HD$ ) tartományban ellentétes stratégiaválasztás az egyensúly.

Látható, hogy semelyik esetben nincs irányított hurok a folyamábrákon. Ez nem teljesül általánosan, hanem csak akkor, ha vizsgálódásunkat a **potenciáljátékok** körére szűkítjük. Ilyenkor felírható egy  $n \times n$ -es  $\mathbf{V}$  mátrix [10, 12], amire teljesül az alábbi egyenlőség:

$$V_{kj} - V_{ij} = A_{kj} - A_{ij}, \quad \forall i, j, k. \quad (7)$$

Ez azt fejezi ki, hogy ha az első játékos  $k$ -dik stratégiája helyett az  $i$ -diket választja, nyeresémváltozása megegyezik a potenciál megváltozásával. A potenciál létezéséhez hasonló feltételnek kell teljesülnie a második játékos stratégiaváltásaira is. Ebből következik, hogy szimmetrikus játéknál  $\mathbf{V}$  is szimmetrikus, ha létezik. Kétstratégias esetben a játék szimmetriájából következik a potenciál létezése [12, 19], nagyobb  $n$  esetén viszont ez nem feltétlenül igaz.

Szemléltetésként nézzük meg, hogy alakul jelen esetben a potenciálmátrix (itt a (7) egyenletből egyszerűen számolható):

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ S & 1 + S - T \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Az eddigiekből belátható, hogy a potenciálmaximumhoz tartozó stratégiapár mindenképp Nash-egyensúly, ez egyben magyarázza is a paramétertartományok közötti különbségeket az 1. ábrán. Ha  $\mathbf{V}$  valamely eleme nagyobb az összes többinél, akkor ez tiszta

egyensúlyi helyzet, ami tekinthető kitüntetett Nash-egyensúlynak. A paramétersíkon a harmónia tartományban, és a szarvasvadászat  $T = S + 1$  egyenes fölé eső részén a  $CC$  stratégiapár választása, fogolydilemma esetén és a szarvasvadászat másik felében a  $DD$ , míg a héja-galamb tartományban a  $DC - CD$  stratégiapár választása számít a fentiek szerint kitüntetett Nash-egyensúlynak.

Ha a modellt a 2.1. fejezetben írtak szerint kiterjesztjük egy négyzetrácsra, akkor logit szabály esetén alacsony zajszintnél a rendszer ebbe az állapotba fog fejlődni. Ilyenkor definiálhatjuk a teljes rendszer potenciálját is [22], ami a párkölcsönhatások összegeként adódik:

$$U(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \sum_{x, \delta_x} \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{s}_{x+\delta_x}}, \quad (9)$$

ahol  $\mathbf{S}$  egy  $L \times L \times n$  dimenziós vektor ( $L$  db rácspont a négyzet oldalhossza,  $n$  választható tiszta stratégia), ami a rácspontokon lévő összes játékos stratégiáját tartalmazza. Itt az összegzés egy  $x$  játékoson, és négy szomszédján ( $x + \delta_x$ ) fut végig. Amennyiben csak egy játékos változtat, akkor a teljes rendszer potenciáljának megváltozása egyenlő lesz az aktív játékos nyereményváltozásával. Ez analóg a negatív potenciális energia fogalmával (Hamilton-függvény) a fizikában, míg a kitüntetett Nash-egyensúly a sokrészecskés rendszerek alapállapotával állítható párhuzamba.

A logit szabály fizikai fontosságát matematikai átalakítások révén is beláthatjuk. A dinamika lényege, hogy számítógépes Monte Carlo szimulációkat végezve egy elemi MC lépésben annak valószínűsége, hogy egy  $x$  játékos a stratégiáját  $\mathbf{s}'_x$ -re változtatja, megadható saját és a többiek nyereményének függvényében:

$$w(\mathbf{s}'_x) = \frac{e^{\tilde{u}(\mathbf{s}'_x)/K}}{\sum_{\mathbf{s}_x} e^{\tilde{u}(\mathbf{s}_x)/K}}, \quad (10)$$

ahol  $K$  a hőmérséklet, vagy zaj, és

$$\tilde{u}(\mathbf{s}_x) = \sum_{\delta_x} \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{s}_{x+\delta_x}} \quad (11)$$

egyenlet adja meg  $\tilde{u}$ -t, a szomszédokkal folytatott játékokból összeadódó nyereményt. Látható, hogy a leginkább kifizetődő stratégia választása exponenciálisan valószínűbb a többinél,  $K \rightarrow 0$  határesetben ezért kerül alapállapotba a rendszer.

Általánosan is belátható, hogy az egyes stratégiaprofilok valószínűségét ennél a dinamikai szabálynál a Boltzmann-eloszlás adja [10]:

$$p(\mathbf{S}) = \frac{1}{Z} e^{U(\mathbf{S})/K}, \quad (12)$$

ahol  $U$ -t a (9) egyenlettel definiáltuk, és  $Z$  a szokásos állapotösszeg:

$$Z = \sum_{\mathbf{S}} e^{U(\mathbf{S})/K}. \quad (13)$$

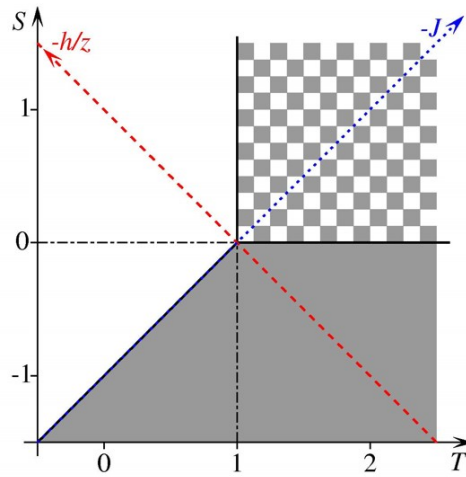
Ezen felül újabb statisztikus fizikai analógiát találunk, ha a héja-galamb tartományt vizsgáljuk egy négyzetrácson, itt ugyanis logit szabály alkalmazásával a zaj (hőmérséklet) függvényében az Ising modell által előrejelzett fázisátalakulások mennek végbe. Ezt tekintjük át a következő fejezetben.

### 2.3. Ising modell párhuzama a társadalmi dilemmákkal

A kétdimenziós Ising modellben mindegyik rácspontra elhelyezünk egy  $\mathbf{s}_x = \pm 1$  spinű részecskét [23]. Ekkor felírható a kölcsönhatási energia a teljes rendszerre:

$$H = -J \sum_{x, \delta_x} \mathbf{s}_x \mathbf{s}_{x+\delta_x} - h \sum_x \mathbf{s}_x, \quad (14)$$

ahol  $J$  a csatolási állandó,  $h$  pedig a mágneses tér erőssége. Rövid levezetés segítségével belátható, hogy ez teljesen analóg a (9) egyenlettel. Az Ising-modell és a társadalmi dilemmák paramétereit közötti összefüggést szemlélteti a 2. ábra. Az Ising modell leírás-



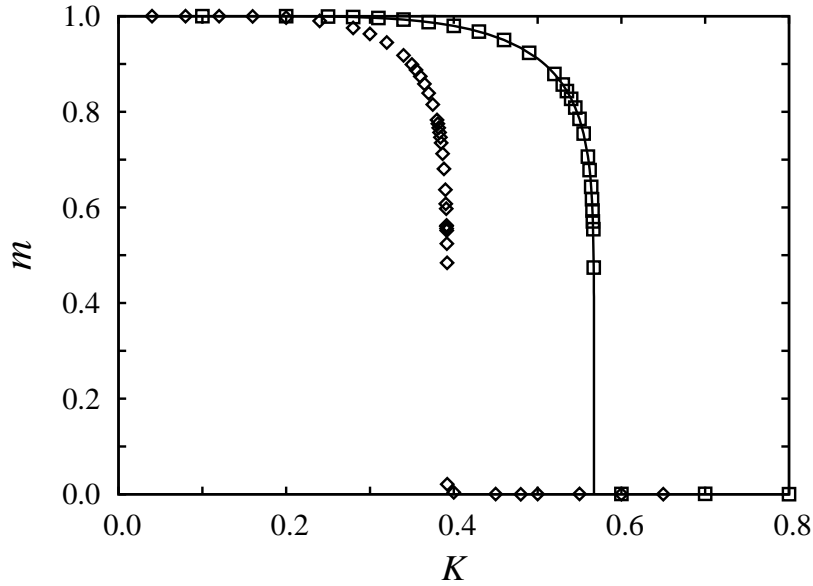
2. ábra. Ising-modell a  $T - S$  paramétersíkon. A háttér a kitüntetett Nash-egyensúlyt jelzi (fehér-CC, szürke-DD, sakktábla-CD). A piros szaggatott tengelyen  $z$  jelöli a szomszédok számát.

módjában a fehér terület homogén ferromágneses beállást jelent, a szürke ugyancsak ezt, de ellenkező irányban. A legérdekesebb rész a héja-galamb tartomány, ahol antiferromágneses rendeződést várunk az elméleti számolások alapján, összhangban az 1. ábrán látható kitüntetett egyensúlyi állapotokkal.

Amint az előző fejezetben láttuk, az elméleti fázisdiagramok az alacsony hőmérsékleten kialakultakkal mutatnak hasonlóságot az evolúciós játékelmélet modelljeiben logit szabály alkalmazása esetén. Érdekes tehát megvizsgálni, hogy a hőmérséklet függvényében meddig marad ennyire rendezett a stratégiaprofil a négyzetrácson.

Monte Carlo szimulációkat végezve változó zajszint mellett összevethetjük eredményeinket az Ising modell által jósolt fázisátalakulással, ami egzaktul számolható két dimenzióban [24]. Ezt mutatja a 3. ábra.





3. ábra. Rend-rendezetlen átmenet Ising modellben az antiferromágneses tartományban. A folytonos vonal az egzakt megoldás, a négyzetek a  $h = 0$ -nál végzett MC-szimulációk eredményei. Gyémánttal jelölve a  $h = 0.2$  eset, a paraméterek változtatása eltolja a kritikus pontot, de jellegét nem változtatja meg.

Itt a rendparaméter, vagy az antiferromágneses átlagos mágnesezettség

$$m = \frac{2}{N} \left( \sum_{x'} s_{x'} - \sum_{x''} s_{x''} \right) \quad (15)$$

módon számolható, amennyiben az összegzést kettébontjuk a sakktábla-jelleg által kijelölt két alrácra,  $x'$  pontokon pozitív,  $x''$ -nél negatív spinű részecskék vannak többségben  $K \rightarrow 0$  esetén. A társadalmi dilemmáknál  $D = -1$ ,  $C = 1$  megfeleltetéssel élhetünk.

## 2.4. Kevert stratégiák

A kevert stratégiák (2) összefüggés általánosításából adódnak. A lényegi ötlet az, hogy nem egy tisztán meghatározott opciót választunk, hanem mindegyiket valamekkora valószínűséggel. Ekkor a feltételünk:

$$\sum_{i=1}^n s_{xi} = 1, \text{ és } 0 \leq s_{xi} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Ezt a matematikai formulát kétféleképpen lehet értelmezni: az első ténylegesen valószínűségi, egy racionális játékos a maga által meghatározott valószínűséggel választja valamelyik stratégiát a játék során. Biológiai modellekben ugyanakkor célszerű (16) összefüggésnek egy statisztikai alapon nyugvó értelmezését alkalmazni. Ilyen esetekben

egy populáció akkor valósít meg kevert stratégiát, ha az azt alkotó egyedek olyan arányban választják az egyes tiszta stratégiákat, ami éppen megegyezik a másik értelmezésben megadható valószínűség-értékekkel.

Kétstratégias esetben a kevert stratégiát  $x$  és  $y$  játékos számára a következő összefüggés definiálja:

$$\mathbf{s}_x = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{s}_y = \begin{pmatrix} 1 - \beta \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (17)$$

ahol  $\alpha$  és  $\beta$  ( $0 < \alpha, \beta < 1$ ) adják meg annak a valószínűségét, hogy  $x$  és  $y$  játékosok a  $C$  stratégiát választják. Nyeresémük abban az esetben, ha (6) társadalmi dilemma jelölést használjuk, megadható  $\alpha$  és  $\beta$  függvényében:

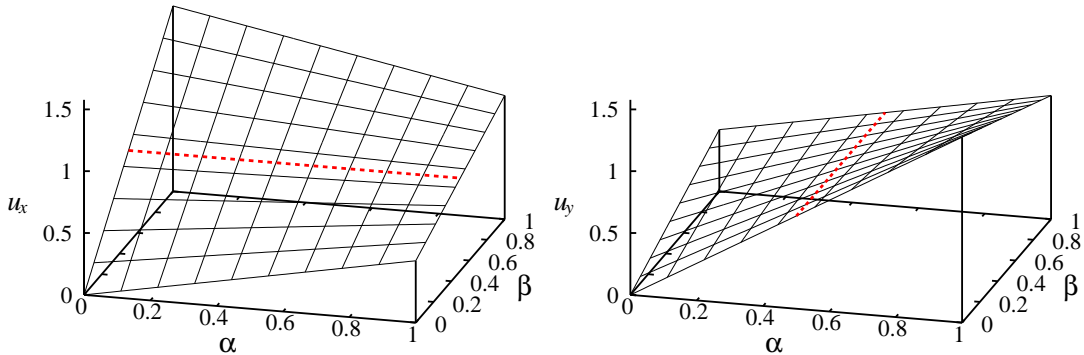
$$u_x(\alpha, \beta) = \alpha\beta + T(1 - \alpha)\beta + S\alpha(1 - \beta), \quad (18)$$

$$u_y(\alpha, \beta) = \alpha\beta + S(1 - \alpha)\beta + T\alpha(1 - \beta). \quad (19)$$

A kevert stratégiák között is létezik Nash-egyensúly. Ennek feltétele, hogy az alábbi két feltétel teljesüljön:

$$\frac{\partial u_x(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \text{ és } \frac{\partial u_y(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0. \quad (20)$$

A 4. ábrán látható módon a játékosok saját választásuktól függetlenül ugyanazt az eredményt kapják, ha ellenfelük Nash-egyensúlyi stratégiát választ ( $\beta = \beta^*$  vagy  $\alpha = \alpha^*$ ). A lényegi eredmény közvetlen számolásokkal is megkapható, az egyensúlyi



4. ábra. Piros szaggatott vonal jelzi a vizsgált játékos nyeresémét, ha az ellenfél Nash-egyensúlyi stratégiát választ. Az ábra  $T = 1.5$  és  $S = 0.5$  értékeknél a héjagalamb tartományban érvényes helyzetet illusztrálja.

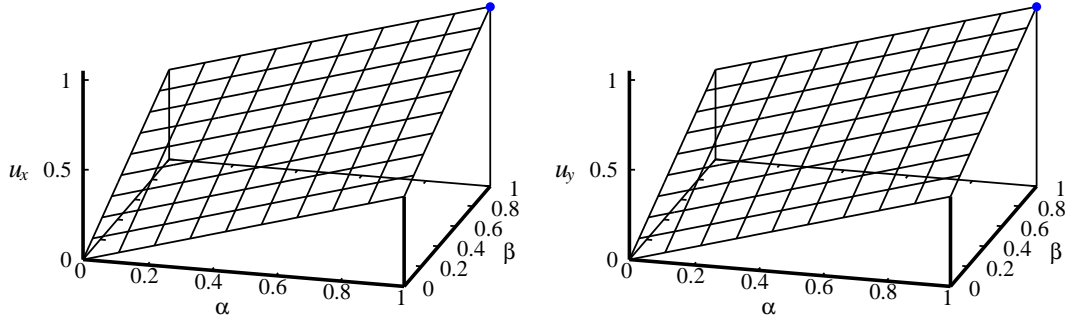
stratégia mindkét játékosra ugyanazt a valószínűséget adja:

$$\alpha^* = \beta^* = \frac{S}{T + S - 1}, \quad (21)$$

valamint a nyeresém is megegyezik

$$u_x(\alpha, \beta^*) = u_y(\alpha^*, \beta) = \frac{ST}{T + S - 1}. \quad (22)$$

Levezethető, hogy (21) egyenlet két esetben ad 0 és 1 közé eső értéket: a héja-galamb tartomány mellett a szarvasvadászat esetén is. A másik két terület csak tiszta Nash-egyensúlyokat enged meg, ezt szemlélteti az 5. ábra, ami a Harmónia tartományban elérhető nyereményeket ábrázolja.



5. ábra. A Nash-egyensúlyt kék pont jelzi. Bárhogy is változtatja az aktív játékos a kooperálási valószínűségeit, kisebb nyereményt kap, mint  $\alpha = 1$  vagy  $\beta = 1$  esetén.  $T = 0.5, S = 0.5$ , tehát a nyeréymátrix szimmetrikus, ezért nem látunk különbséget a két játékos nyereményeiben.

A két különböző tartományban megvalósuló kevert Nash-egyensúly mégsem teljesen ekvivalens, ugyanis  $\alpha^*$  választása csak héja-galamb játéknál lesz evolúciósan stabil stratégia (ESS). Ezt a fogalmat az elméleti biológia vezette be [7], és azt jelenti, hogy egy mutáns képtelen elterjedni egy olyan populációban, amely egy evolúciósan stabil stratégia valószínűség-arányai szerint tartalmaz együttműködőket és élőszködőket.

A korábban bevezetett jelöléseket használva ez a kritérium úgy fogalmazható meg, hogy  $u_y(\alpha^*, \beta) \leq u_x(\alpha^*, \alpha^*)$  és  $u_y(\alpha^*, \beta) < u_x(\alpha^*, \beta)$ , tehát a többségi populáció önmagával játszva is jobban teljesít, és a mutánssal szemben sem veszít.

Hasonló stabilitási feltétel vezethető le olyan evolúciós játékoknál, ahol a megfelelő arányokkal bíró populációt olyan differenciálegyenletekkel írjuk le, melyek a magasabb nyereményt biztosító stratégiák elterjedését segítik elő [25]. Ilyen dinamikai szabályra fogunk példát látni a 3.3. fejezetben.

Eddig összefoglaltuk az evolúciós játékelméleti modell alapvető jelöléseit, valamint a potenciáljátékok fizikai jelentőségét, és a kevert stratégia fogalmát. A következőkben sorra vesszük a dolgozat célkitűzéseit és bemutatjuk a munka menetét.

### 3. Háromstratégias társadalmi dilemma vizsgálata

#### 3.1. Célkitűzés és alapvető számolások

Munkánk során egy olyan modellt vizsgáltunk, ami egy 3 stratégias társadalmi dilemmaként fogható fel. Az eddig bevezetett két stratégia mellé felvettük az előző kettő kevert stratégiáját, ami  $\alpha$  valószínűséggel együttműködő,  $1 - \alpha$  valószínűséggel választja a másik lehetőséget. Vezessük be erre a stratégiára az  $M$  (mixed) jelölést! A játékot jellemző nyereménymátrix ekkor az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & C & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ C \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & T & \alpha T \\ S & 1 & \alpha + (1 - \alpha)S \\ \alpha S & \alpha + (1 - \alpha)T & \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha)(T + S) \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (23)$$

Először lássuk be, hogy ez potenciáljáték! A potenciál létezésére vonatkozó a (7) feltétel némi algebrai átalakítás után az alábbi alakba írható a háromstratégias szimmetrikus játékoknál:

$$A_{12} - A_{21} + A_{23} - A_{32} + A_{31} - A_{13} = 0. \quad (24)$$

A behelyettesítés után látszik, hogy  $\mathbf{A}$  potenciáljáték. Ezek után könnyen meghatározható a potenciál, hiszen tudjuk róla, hogy szimmetrikus, és az egyoldalú stratégiaváltások következtében kialakuló nyereménnyváltozásokat tükrözi:

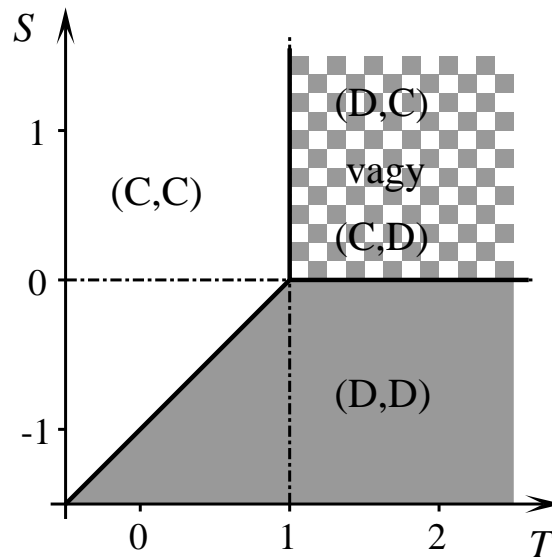
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & S & \alpha S \\ S & 1 - T + S & S + \alpha(1 - T) \\ \alpha S & S + \alpha(1 - T) & \alpha^2(1 - T - S) + 2\alpha S \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Kiszámolhatjuk, melyik elem lesz maximális a potenciálmátrixban, és felrajzolhatjuk ez alapján a logit szabálynál a termodinamikai határesetben érvényes fázisdiagramot a paramétersíkon, ezt mutatja a 6. ábra.

A  $DD$  stratégiapárhoz tartozó potenciál például akkor lesz a maximális mátrixelem, ha  $S < 0$  és  $T < S + 1$ , a kevert stratégia megjelenése tehát nem hoz új feltételt a kétstratégias esethez képest.

Az elméleti fázisdiagram pontosan ugyanaz lett, mint kétdimenziós esetben. Ez főképp azért meglepő, mert a héja-galamb tartományban létezik kevert Nash-egyensúly, itt  $M$  stratégia mégsem jelenik meg sehol. Ez alapján várakozás szerint a korábbiakban vázolt eredmények (Ising-modell fázisátmenete, Boltzmann-eloszlás) itt is teljesen helytállóak kell legyenek, miközben hozzáadtunk a rendszerhez még egy stratégiát. Mivel a számolások általános  $\alpha$ -val helytállóak, ezért ez az eredmény tetszőleges kevert stratégiára érvényes.

A fenti analitikus eredmények azt sugallták, hogy először a logit szabály alkalmazásával vizsgáljuk meg, hogy mennyiben módosítja az Ising modell jóslatait az a perturbáció, amit a hozzáadott, de nem meghatározó stratégia jelent a rendszerben. Az előzőekből



6. ábra.  $K \rightarrow 0$  határesetben érvényes fázisdiagram logit szabály esetén. Az ábráról hiányzik a kevert stratégia

következően az általánosságot nem csökkenti, de a hatékonyságot növeli, ha az elkövetkezőkben az  $\alpha = 0.5$  esetre szorítkozunk. Tetszőleges  $\alpha$  érték mellett futtatott szimulációk esetén 3.3. fejezet eredményei módosulhatnak lényegileg, ennek elemzése túlmutat ezen munka határain.

Második körben pedig olyan körülményeket teremtettünk, ahol dominálni tud M stratégia, amely a héja-galamb tartományban a 2.4. fejezetben taglaltak szerint ESS. Ehhez az 2.1. fejezetben említett determinisztikus jellegű dinamikát alkalmazzuk, amit innentől imitációs szabálynak hívunk. Ennél a szabálynál kísérleti fázisdiagramot is felvesszünk, valamint a nyereséymátrix paramétereinek függvényében vizsgáljuk, milyen fázisátmenetek jelennek meg a rendszerben. Végül értelmezzük a kapott eredményeket és bemutatjuk, hogy alkalmas dinamika mellett az ESS definíciójának is van jelentősége.

### 3.2. Monte Carlo szimulációk logit szabálynál

Az evolúciós játékelmélet dinamikai szabályainak fontos része, hogy minden esetben a stratégiaváltás *valószínűségéről* beszélünk. Ahhoz, hogy ez a gyakorlatban is megvalósuljon, a véletlenszerűséget a szimulációknál is alkalmazni kell. Erre alkalmas módszer biztosítanak a Monte Carlo szimulációk. A futtatott programnak rendelkeznie kell egy véletlenszámgenerátorral, amely biztosítja a későbbiekben a folyamatok valószínűségi jellegét. Jelen esetben egy Mersenne-prímeken alapuló algoritmust használtunk.

A program Monte Carlo szimulációs lépések sorozatát hajtja végre. Egy lépés alatt minden játékosnak átlagosan egyszer lehetősége van módosítani a stratégiáján, ennek valószínűségét logit dinamikai szabály esetén a (10) és (11) egyenletek adják meg a szomszédokkal folytatott játszmák után.

A szimuláció lényeges paramétereit még a négyzetrács mérete (a legtöbb esetben  $L = 400$  választással élve ez  $400 \times 400$ -as volt), a szomszédok száma (egyszerű négyzetrácson szimulálva ez 4-nek adódik), valamint a korábban már részletezett mennyiségek: a hőmérséklet, továbbá a nyereménymátrix két paramétere ((25) harmadik változója  $\alpha = 0.5$  volt végig).

Annak érdekében, hogy minél jobban érvényesüljenek a játék jellegéből fakadó dinamikai jelenségek, a kezdőállapotot legtöbb esetben véletlenszerű stratégiaprofilnak állítottuk be.

A jelenségek értelmezését segítette, hogy olyan programmal is dolgoztunk, ami képes volt a négyzetrácson uralkodó állapotok valós idejű megjelenítésére. Az ezzel készített pillanatfelvételeken látható, hogy alacsony zaj esetén nagy pontossággal teljesülnek a 6. ábra jóslatai a kialakuló fázisokról.

A képek alig néhány szimulációs lépés után készültek, hogy még láthatóak legyenek rajtuk a gyengébb stratégiák is, hosszabb idő elteltével homogén fázisok terjednek el az egész rácson. Különösen szembeűnő a 7c ábrán látható jelenség: a doméneket még határvonalak választják el, ezt nevezzük polidomén állapotnak.

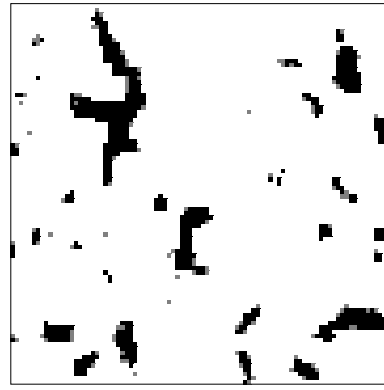
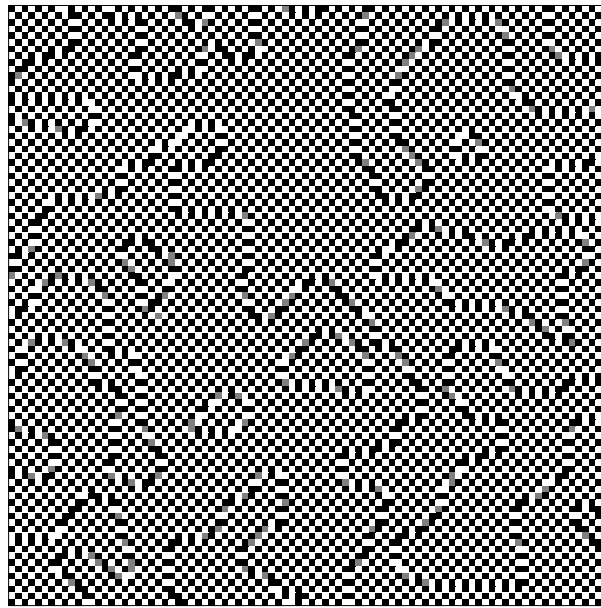
Amennyiben a rács végtelen nagy lenne, a rendszer örökké polidomén állapotban maradna. A szimulációkat viszont véges rácson végeztük, tehát elegendő idő után kialakul a monodomén állapot. Az alrácscseredeződés akkor terjed ki a teljes rácásra, amikor az átlagos doménméret összemérhetővé válik a rács méretével.

A lineáris doménméret  $\sqrt{t}$ -vel arányos, jelen esetben az időt Monte Carlo lépésekben mérjük. Ez magyarázza azt, hogy sokkal hosszabb szimulációk kellenek azokban az esetekben, ahol a paraméterek miatt a  $\sqrt{t}$ -t szorzó arányossági tényező kicsi. Ez a tény megnehezíti, és sokkalta hosszabbá teszi a fázisátmenetek vizsgálatát a kritikus pont környékén.

A nehézségek áthidalására többféle trükköt alkalmazhatunk, a leginkább célravezető a kezdőállapot alkalmas megválasztása. A kritikus pont környékén sokszor nem csak egyszeri adatgyűjtést végeztünk, hanem amennyiben nem láttuk jelét rendezettségnek, a végső MC lépés utáni állapotot a következő szimuláció kezdőállapotának beállítva újra futtattuk a programot.

### 3.2.1. Szimulációk ferromágneses alapesetben

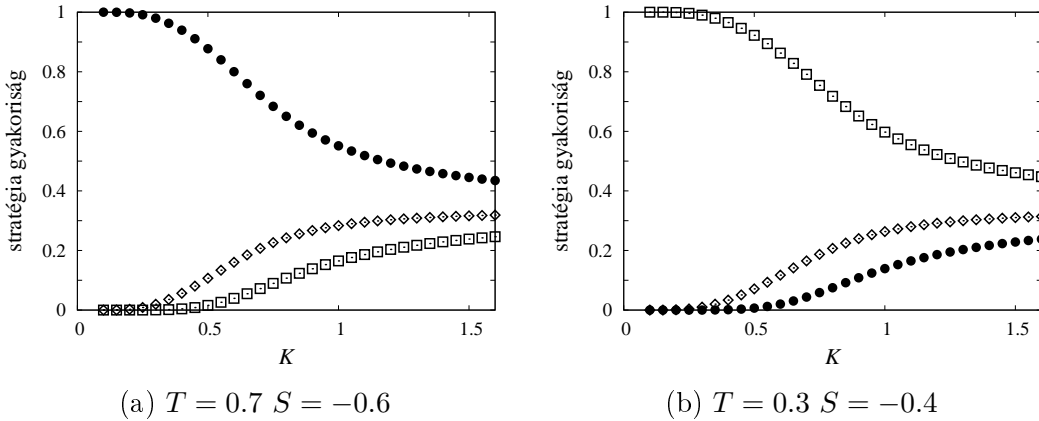
Ahogy a 7. ábrán is látható, a rendeződés szempontjából kettéoszthatjuk a paraméter-síkot a héja-galamb tartományra ( $T > 1$ ,  $S > 0$ ) valamint az ezen kívüli részre. Az Ising modell terminológiájában utóbbit ferromágneses állapotnak nevezhetjük. Amennyiben itt vizsgáljuk a stratégiák gyakoriságának hőmérsékletfüggését, akkor a 3. ábrán látható átmenethez képest simább átalakulást várunk, mert itt ferromágneses a termodinamikai limesben kialakuló alapállapot, és az ebből való átmenet kevésbé éles, mint antiferromágneses tartományban. Eltérést jelent a kétfázisú Ising modell által tárgyalt esethez képest, hogy itt egy harmadik stratégiát is hozzávettünk a rendszerhez, de mivel ez az előző két-kevert stratégiája, ezért várhatóan nem lesz kvalitatív eltérés a két fázisátalakulás között.

(a)  $T = 0.7$   $S = -0.35$ (b)  $T = 0.6$   $S = -0.35$ (c)  $T = 1.6$   $S = 0.55$ 

7. ábra. *Pillanatfelvételek a paraméterek különböző értékeinél,  $K = 0.1$ . Alacsony zaj esetén már az elméleti határvonaltól kis távolságban is egyértelműen kialakul a rendezett állapot. Fehér színnel  $C$ , feketével  $D$ , szürkével pedig  $M$  stratégia látható.*

Ezen várakozások megvizsgálásához úgy futtattunk szimulációkat, hogy különböző hőmérsékleteken mentünk végig a 3.2. fejezetben részletezett folyamaton. Az adatgyűjtés hosszát MC lépésekben (MCs, Monte Carlo steps) megadó átlagolási idő ( $t_s$ ) mellett hozzáadtunk a programhoz egy termalizációs szakaszt ( $t_r$ ), erre azért volt szükség, hogy a kezdeti véletlen elrendezés ne befolyásolja az eredményt, tehát az adatgyűjtés csak a termalizációs idő elteltével kezdődött el. Jelen esetben  $L = 400$  mellett  $t_s$  és  $t_r$  5000 MCs körül volt, amit a kritikus pont környékén kissé növeltünk a nagyobb pontosság érdekében. A program  $t_r + t_s$  lépés után növelte a hőmérsékletet, és újratekerte a folyamatot.

Ennek eredményeképpen megkaptuk a ferromágneses-paramágneses átalakulás lefolyását.



8. ábra. *Stratégiák gyakoriságának hőmérséklet-függése a szarvasvadászat (SH) tartományban. Teli kör: D, üres négyzet: C, üres rombusz: M stratégia.*

Összehasonlítva grafikonunkat az Ising modell jóslataival azt láthatjuk, hogy valóban teljesült a várakozás, a ferromágneses rend eltűnésére jellemző sima átalakulást kaptunk. A hőmérséklet növekedésével a kevert stratégia is egyre inkább életképesebb, értelemszerűen pedig a két tiszta stratégia közötti gyakorisággal fordul elő.

Az átalakulás jellege tökéletesen megegyezik mindkét grafikonon, az egyetlen eltérés az, hogy egyszer  $D$ , másszor  $C$  stratégia dominált kezdetben. Mivel az Ising modellben ez csupán annyi különbséget jelent, hogy melyik irányba mutat a ferromágneses rendeződés, nem meglepő, hogy a hőmérsékletfüggésre nézve nem jelentkezik semmiféle különbség.

### 3.2.2. Szimulációk antiferromágneses alapesetben

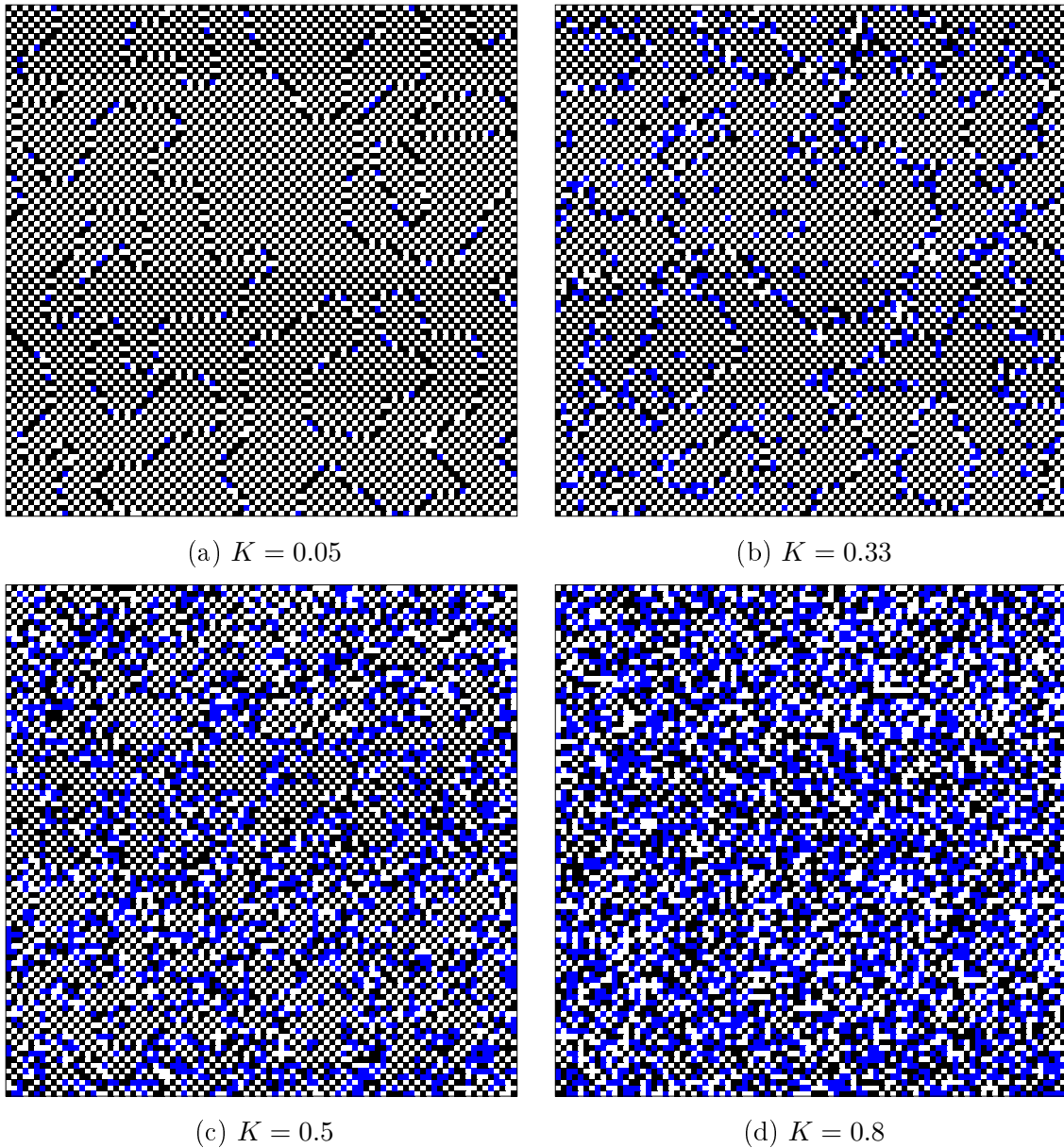
A fenténél egy fokkal érdekesebb kérdés, hogy vajon hogyan alakul a fázisátmenet, ha a paramétersík héja-galamb tartományában vizsgálódunk. Néhány pillanatképpel itt is szemléltethetjük, hogy hogyan kezd megtörni a szabályos sakktábla alakzat (9. ábra).

Az ábrákon látszik, hogy alacsony zaj esetén alig néhány "fonal" mentén képes az egyensúlytól eltérő stratégiaprofil megjelenni, majd egyre nagyobb mértékben nő a véletlenszerűség a stratégiaeloszlásban, jellemzően a kevert stratégia töri meg egyre inkább a  $CD - DC$  párok uralmát, majd homogén  $M$  területek is ki tudnak alakulni. Ez nem meglepő, hiszen ebben a tartományban létezik kevert Nash-egyensúly.

Ezek az eredmények arra engednek következtetni, hogy az antiferromágneses állapotnak megfelelő sakktábla-rendeződésből hasonlóan zajlik le a fázisátmenet a rendezetlenbe, mint kétstratégiás esetben, de a végállapotban (nem meglepően) nem elhanyagolható módon meg fog jelenni a harmadik stratégia is.

Hogy várakozásainkat igazolhassuk, ismételten Monte Carlo szimulációkat futtattunk, annyi különbséggel az előzőkhöz képest, hogy a hőmérséklet-intervallumot nem ekvidisztáns módon osztottuk fel, mivel az Ising-modell itt éles átmenetet jósol a kritikus



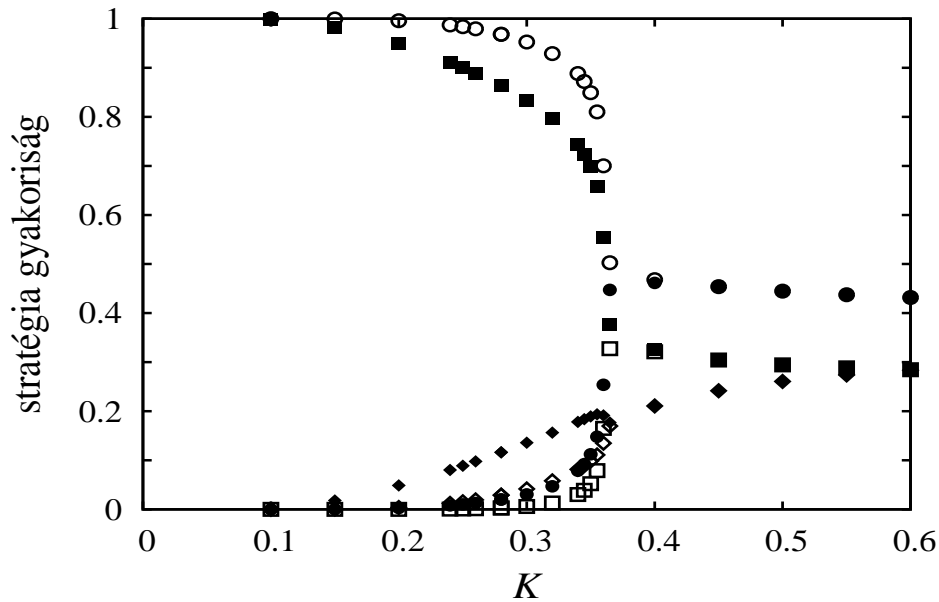


9. ábra. Pillanatfelvételek héja-galamb tartományban ( $T = 1.6$   $S = 0.55$ ) különböző hőmérsékleteknél. Fehérrel  $C$ , feketével  $D$ , kékkel  $M$  stratégia látható.

pont környékén. Az átmenet hőmérsékleténél az előző fejezetben megadott termalizációs és átlagolási időknél nagyságrendekkel hosszabbakkal dolgoztunk ( $t_s$  és  $t_r$   $10^5 MCs$  körül), valamint a rács méretét is növeltük,  $L = 1500$ -ra. Erre azért volt szükség, hogy a különösen éles fázisátalakulás lefolyását minél nagyobb pontossággal rögzíthessük.

Az adatgyűjtés ezúttal úgy zajlott, hogy felosztottuk a rácsot sakktáblaszerűen két alrácra, amelyek közül az egyiket homogén  $D$ , a másikat homogén  $C$  az egyensúlyi állapot, és külön-külön vizsgáltuk a stratégiák megjelenési gyakoriságát. Erre értelem-

szerűen azért volt szükség, hogy számszerűsíteni tudjuk a rendezettséget, ami az egész rácsra átlagolva nem mutatkozna meg.



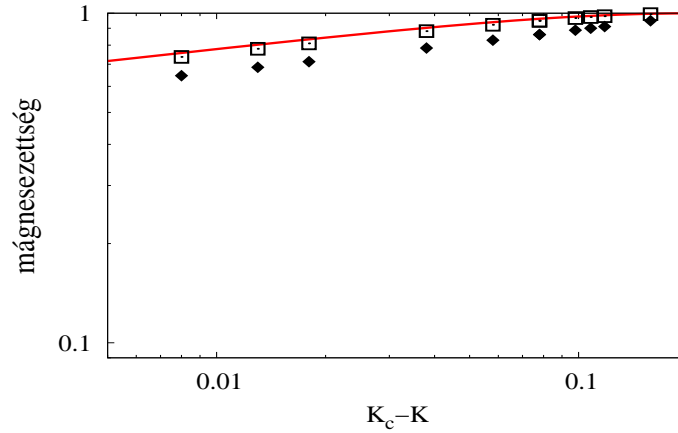
10. ábra. *Stratégia gyakoriságok függése a hőmérséklettől a héja-galamb tartományban ( $T = 1.3$   $S = 0.6$ ). Az egyik alrács adatai teli, a másik alrács adatai üres szimbólumokkal jelennek meg. A körök a  $C$ , a négyzetek a  $D$ , a rombuszok az  $M$  stratégia frekvenciáját jelzik.*

A szimulációk eredményét szemléltető 10. ábrán látható, hogy várakozásainknak megfelelően alakult a fázisátmenet. A fázisátmenet jellegében szembetűnően hasonlít a 3. ábra eredményeihez, noha egy harmadik stratégiával bővítettük rendszerünket.

A kritikus pont értéke csökkent a 3. ábrához képest, ennek oka, hogy más paraméterek mellett végeztük a szimulációt, mint a fenti esetben. Az átmenet jellege azonban egyáltalán nem változott, és ezt logaritmikus skála segítségével is szemléltethetjük. A 11. ábrán megmutatjuk, hogy a kritikus pont környékén a hőmérsékletváltozás  $1/8$ -ik hatványával arányos a mágnesezettség csökkenése, amint azt az Onsager-féle egzakt megoldás is jósolja. Az ezzel való összehasonlítás teszi lehetővé a kritikus pont helyének lehető legpontosabb meghatározását, ezek szerint  $K_c = 0.358$ .

A 2.3. fejezetben használt (15) képletet jelen esetben is alkalmazhatjuk a mágnesezettség számolására, bár ezúttal külön vettük  $C$  és  $D$  stratégia járulékait az összegzésnél.

A fentiekben megmutattuk, hogy az Ising modell alkalmazhatósága kiterjed arra az esetre is, amikor egy kevert stratégiát hozzáadunk a választható lehetőségekhez, hiszen a hőmérséklet változtatása mellett jellegre ugyanolyan jelenségek adódtak. Kérdés még azonban, hogy az elméleti fázisdiagram milyen megszorításokkal írja le a gyakorlatban megvalósuló állapotokat.



11. ábra. Mágnesezettség a kritikus pont közelében log-log skálán, üres négyzettel  $C$ , teli rombuszszal  $D$  stratégia által adott hozzájárulás a mágnesezettséghez. Az egzakt megoldás  $m \approx (K - K_c)^{1/8}$  függést jósol, a szimulációk ezt jó közelítéssel visszaadják.

### 3.2.3. Elméleti fázisdiagram ellenőrzése

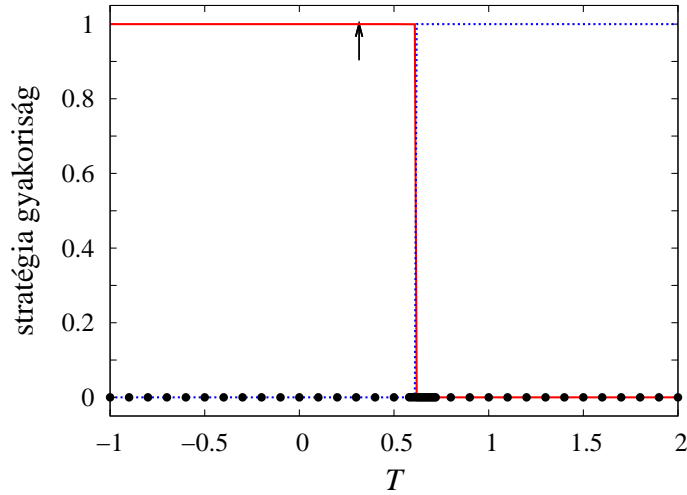
A korábbi alfejezetekben bemutatott szimulációs eredményeink már arra engedtek következtetni, hogy az elméleti fázisdiagram jó leírását adja a ténylegesen megvalósuló állapotoknak, ezek a paramétersík egy meghatározott pontján érvényes helyzetet írtak le, ezért nem tekinthetők döntő bizonyítéknak.

Annak érdekében, hogy átfogóbb képet kapjunk a paramétersík különböző tartományaiban megvalósuló fázisokról, azokat a paraméterek függvényében is meg kell vizsgálnunk. Ezért ezúttal olyan szimulációkat futtattunk, melyek a hőmérséklet és az egyik paraméter állandósága, valamint a másik változása mellett tették lehetővé a stratégiák gyakoriságának vizsgálatát. Első alkalommal  $T$  paramétert végigfuttattuk a teljes releváns intervallumon, így kapott eredményeinket mutatja a 12. ábra.

Első megfigyelésünk, hogy a változás hirtelen történik, az érdekes környezetben 0.01-esre sűrítve a lépésközt sem történt egy lépésnél lassabban, tehát a fázisok közötti határvonal nagyon éles alacsony zajnál.

Második megfigyelésként rögzíthetjük, hogy az átmenet  $T = 0.61$ -nél történt meg, ami nem felel meg az elméleti számításokból adódónak. Ennek oka a szimulációk rosszul megválasztott kezdőállapotában keresendő.

Amennyiben a rácsot nem véletlenszerű stratégiaeloszlással látjuk el a szimuláció kezdetén, különféle jelenségekkel találkozhatunk. Jelen esetben a hiszterézis jelenségét mutattuk meg. Ennek lényege, hogy amikor egy homogén stratégiaprofil szeretnénk átfordítani az ellentétes homogén állapotba, akkor szükségünk van egy hajtóerőre, amit azzal biztosíthatunk, ha a paraméterek változtatásával a paramétersíkon túllépünk a fázishatárokon. Az átmágneseződés néhány kritikus méretet meghaladó ellentétes irányú domén megjelenése után az előnyt élvező domén egyenletes sebességű növekedésével alakul ki.



12. ábra. *Stratégiák gyakoriságának függése  $T$  paramétertől, az állandók  $K = 0.1$ , valamint  $S = -0.7$  értéke mellett. Piros folytonos vonallal  $C$ , kék szaggatottal  $D$ , fekete körökkel  $M$  stratégia van jelölve. Nyíl mutatja a  $T = 0.3$  pontot, ahol a fázisdiagram alapján az átmenetet várnánk.*

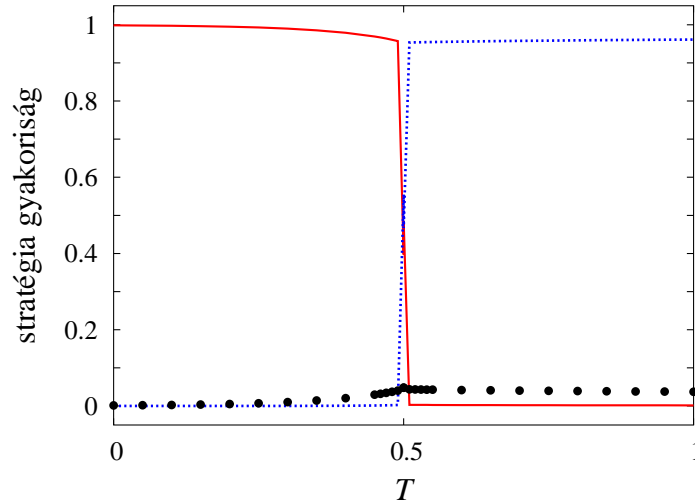
A 12. ábrát eredményező szimulációknál homogén  $C$  doménnel indítottuk a programot, így jelentősen eltolódott az átmenet helye. Ugyanezt a grafikont felvehetnénk, ha magas  $T$  értékekről, homogén  $D$ -vel kezdenénk, és balra haladnánk a paramétersíkon, ekkor balra tolódná az átmenet. Itt jelentkezik a hiszterézis.

Itt megjegyezzük, hogy ezeknél a szimulációknál  $t_r = t_s = 5000MCs$  volt a mintavételezés ideje  $L = 400$ -as rácsméret mellett, ezeknek a paramétereknek a növelése csökkenthette volna a hiszterézis nagyságát, viszont komoly numerikus erőfeszítéseket igényelt volna. A kezdőállapotok jobb megválasztásával ugyanakkor ilyen szimulációs paraméterek alkalmazásával is kiküszöbölhető a hiszterézis, amint azt alább látni fogjuk.

A következőkben másik  $S$  paraméter melletti metszetet tekintettünk, és nagyobb hőmérséklet,  $K = 0.3$  esetén. Az átmenet ebben az esetben egy sokkal szélesebb intervallumban zajlik, amint a 13. ábra mutatja (a  $T$  paramétert most csak szűkebb tartományon futtattuk, ahol a változást vártuk).

A zaj növekedése amellet, hogy kiszélesíti az átmenetet, a kevert stratégiának is kedvez, gyakoriságának a váltás helyén maximuma van, de  $T > 0.5$  esetben is megmarad a rendszerben. Ez nem meglepő, hiszen itt már közeledünk a kritikus ponthoz, ahol a fázisátmenet miatt a kevert stratégia előtérbe kerül az alacsony hőmérsékletű alaphelyzethez képest.

Kezdőállapotnak most azt állítottuk be, hogy a rácst felosztottuk 6 függőleges csíkra, és rendre  $C$ , illetve  $D$  doméneknek állítottuk be ezen csíkokat. Ilyen beállítások mellett várjuk azt, hogy a lehető legkisebb mértékben jelenjen meg a hiszterézis. Az átmenet tényleges helye (a piros és kék vonalak metszéspontja)  $T = 0.5$ , tehát valóban helytálló a potenciálmátrix alapján megalkotott 6. ábra.



13. ábra. *Stratégiák frekvenciájának függése  $T$  paramétertől, az állandók  $K = 0.3$ , valamint  $S = -0.5$  értéke mellett. Piros folytonos vonallal  $C$ , kék szaggatottal  $D$ , fekete körökkel  $M$  stratégia van jelölve.*

Ebben a fejezetben áttekintettük a fizikailag legérdekesebb logit dinamikai szabály mellett végzett szimulációk eredményeit. Az előzőekben nem csak azt sikerült igazolni, hogy az Ising modellel való analógia érvényben marad tetszőleges kevert stratégia hozzáadásával a rendszerhez, de azt a megállapítást is alátámasztottuk, hogy az elméleti fázisdiagram alacsony hőmérsékletű határesetben jó leírását adja rendszerünknek.

A következőkben olyan körülményeket keresünk, ahol a kevert stratégia életképesnek bizonyulhat. Ehhez imitációs dinamikai szabálynál elvégzett szimulációk eredményeit fogjuk tárgyalni, és ahol lehetséges, diszkutálni a két dinamika közötti alapvető eltéréseket.

### 3.3. Monte Carlo szimulációk imitációs szabálynál

Az alapvető eltérés jelen esetben a logit szabályhoz képest az, hogy itt nem a (10) egyenlet adja meg a stratégiaváltás valószínűségét. Itt egy véletlenszerűen kiválasztott  $x$  játékos egy szintén véletlenszerűen választott  $y$  szomszéd stratégiáját veszi át a (26) összefüggés szerint adott valószínűséggel:

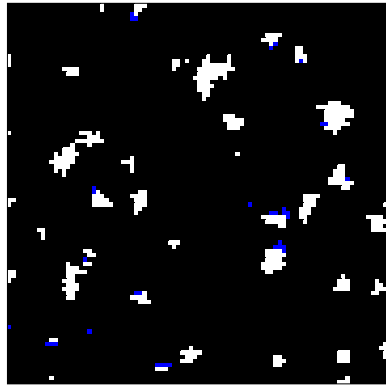
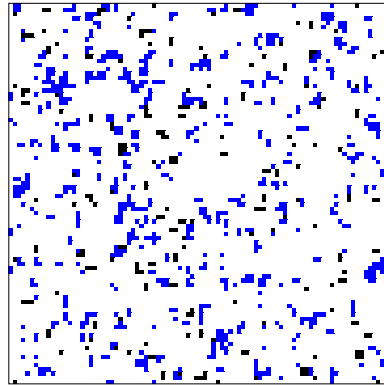
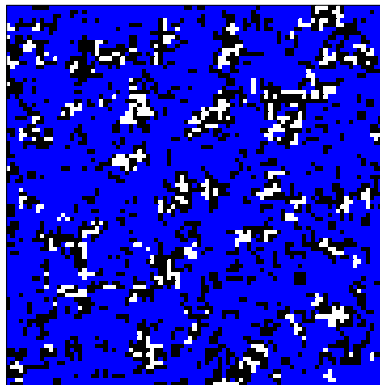
$$w(\mathbf{s}_x \leftarrow \mathbf{s}_y) = \frac{1}{1 + e^{(\tilde{u}_x(\mathbf{s}_x) - \tilde{u}_y(\mathbf{s}_y))/K}}, \quad (26)$$

ami a két játékos nyereménykülönbségétől függ. Amennyiben a nyereménykülönbséget energiával azonosítjuk, szembevetve a párhuzam a Fermi–Dirac-függvénnyel.

Ennek következménye, hogy  $K \rightarrow 0$  határesetben mindig megtörténik a magasabb nyereményt hozó stratégiára való váltás. Mivel csak olyan stratégiára válhatnak a játékosok, ami jelen van a rendszerben, ezért van három homogén abszorbaló állapot,

amiből nem tud kibillenni a rendszer. Ez a dinamikai szabály a paraméterek változtatására a homogén és a többstratégiás állapotok között olyan fázisátmenetekre képes, melyek az irányított perkolációs (directed percolation, DP) univerzalitási osztályba tartoznak [3, 26–28].

A szimuláció egyéb jellemző paraméterei és körülményei a 3.2. fejezetben ismertettekkel teljesen megegyezők voltak. A tartományok jellegzetességeit szemléltetendő itt is bemutatunk pár pillanatfelvételt a rácson kialakuló stratégiprofilokról:

(a)  $T = 0.7$   $S = -0.5$ (b)  $T = 0.9$   $S = 0.3$ (c)  $T = 1.5$   $S = 0.5$ 

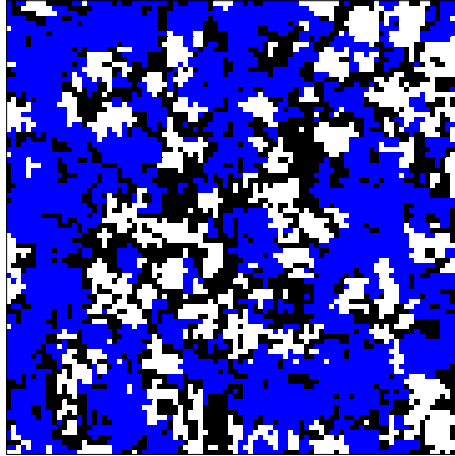
14. ábra. *Pillanatfelvételek a paraméterek különböző értékeinél,  $K = 0.3$ . A felvételek még akkor készültek, amikor az abszorbáló állapotok nem alakultak még ki, de már mindenütt többségben volt az előnyös stratégia. Feketével  $D$ , fehérrel  $D$ , kézzel  $M$  látható.*

### 3.3.1. Fázisdiagram készítése

A 14c ábrán látható a legnagyobb lényegi különbség a logit szabályhoz képest, mégpedig az, hogy itt a héja-galamb stratégiánál megjelenik a kevert stratégia dominanciája. Ez egybevág a 2.4. fejezet eredményeivel, miszerint itt ez a stratégia evolúciósan stabil. Ez természetesen nem az egész héja-galamb tartományban igaz, mert az együttműködési

valószínűséget  $\alpha = 0.5$  konstans értéken tartjuk, tehát az evolúciós stabilitás kritériuma csak a tartomány középső részén teljesül.

Itt megjegyzendő, hogy ebben a tartományban összehasonlítva eredményeinket a logit szabállyal az alrács-rendeződés helyett jelenik meg a kevert stratégia dominanciája. Ez a dinamika ugyanis egyáltalán nem képes alrács-rendezett struktúrák kialakítására, ez kétstratégias esetben sem valósult meg, az ott végzett szimulációk azt mutatták, hogy héja-galamb tartományban  $C$  és  $D$  stratégiák együttélése figyelhető meg, de anélkül, hogy bármilyen jel utalna az alrácsok szerinti rendezettségre [29]. A három stratégia együttélését szemlélteti a 15. ábra.

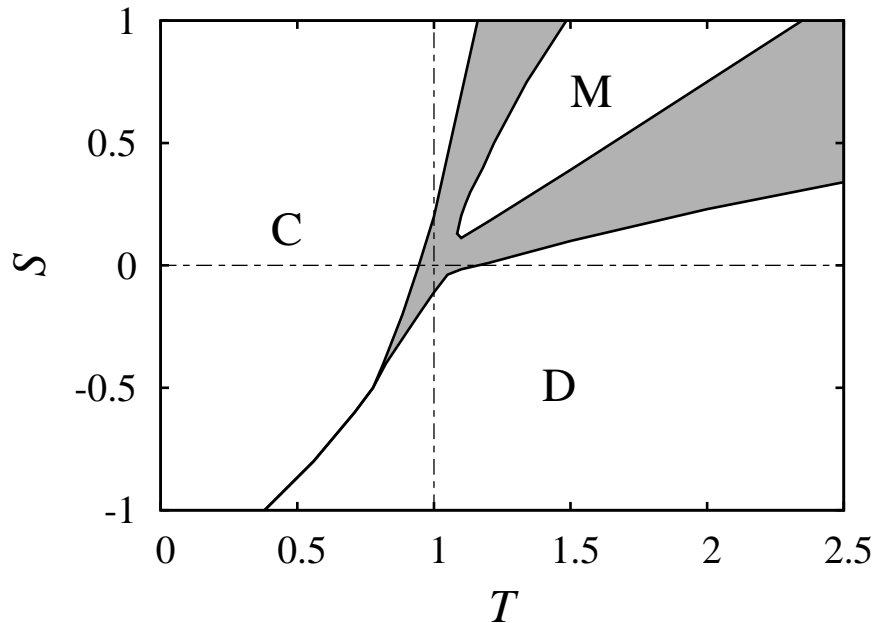


15. ábra. *Három stratégia együttélése  $T = 1.08$ ,  $S = 0.1$ , valamint  $K = 0.3$  paramétereknél. Nincs rendezettség, egyik stratégia sem képes dominálni.*

Az abszorváló állapotok megjelenése lehetőséget ad arra, hogy olyan fázisdiagramot készítsünk, amely kevés numerikus erőfeszítés árán megadja nekünk, hogy a paramétersíkon hol melyik stratégia dominál. Elég ugyanis csak a kialakuló homogén fázisok határait vizsgálni, tehát a paramétersíknak azt a részét, ahol már éppen nem képes kialakulni a homogén állapot. A legpontosabb fázisdiagramot itt is  $K \rightarrow 0$  termodinamikai határesetben kapnánk meg, de a hosszú relaxációs idők miatt ez nagyon sokkal hosszabb szimulációs időket igényelne, mint ha nagyobb zajszintnél futtatunk szimulációkat. Kompromisszumként tehát  $K = 0.3$ -nál dolgoztunk, és így is visszakaptuk az alacsony zajszintnél számolt állapotokra jellegzetességeit.

A határokat folytonos vonallal jelöltük a 16.ábrán, ezt azért tehattük meg, mert a kritikus pont közelében (M terület "sarka", C-D elágazás) nagyon sűrű mintavételezéssel szimuláltunk, a többi részen pedig nem volt drasztikus a változás. A módszerünk az volt, hogy valamely paramétert fixen tartottuk a másik változtatása mellett, és egészen addig finomhangoltuk a beállításokat, amíg azonosítottuk azt a pontot, ami szétválasztja a kétféle viselkedést.

Látható, hogy elképzeléseink igazolódtak: az M stratégia a héja-galamb tartományban a  $T = S + 1$  egyenes mentén tud dominálni, ami az  $\alpha = 0.5$  választással a kevert stratégia ESS. Itt jegyezzük meg, hogy amennyiben  $\alpha$  is változhatna, akkor ez a tartomány



16. ábra. A szimulációk eredményeül adódó fázisdiagram imitációs szabálynál  $K = 0.3$  mellett. A fehér tartományokban mindenhol a jelzett stratégia alakít ki homogén fázist, a szürke zónában két vagy három stratégia marad életben a végső stacionárius állapotban nagy méreteknél.

feltehetőleg kiszélesedne, sőt, adott esetben C és D által dominált területek rovására is növekedhetne. Ennek a sejtésnek az igazolása túlmutat jelen munka keretein, de mindenképpen érdekes vizsgálódásokra nyújt alapot.

### 3.3.2. Irányított perkolációs átmenet szimulálása

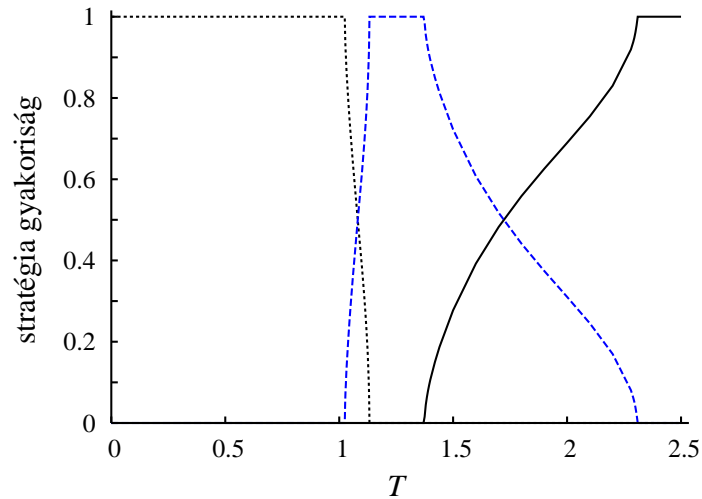
Még átfogóbb képet ad a 16. ábra szürke, együttlétezési zónáiról az, ha a fázisdiagram egy metszetét tekintjük, tehát valamely paraméter állandósága és a másik változtatása mellett vizsgáljuk a stratégiák gyakoriságát a rácson.

Jelen esetben először  $S = 0.3$  értéken rögzítettük a paramétert, és emellett változtattuk  $T$  értékét. Mivel a statisztikai hiba összemérhető a vonalvastagsággal, ezért nem kell a 3.2. fejezetben látott módon különböző szimbólumokkal jelölni a stratégia-gyakoriságokat, hanem vonalakkal is ábrázolhatjuk a változást. Az ábrázolt eredmények nyilvánvalóvá teszik, hogy milyen univerzális jellegzetességekkel bír egy stratégia kihalása az abszorbaló állapot felé közeledve.

Elviekben mind a négy átmenet esetén a kihaló stratégia hatványfüggvény szerűen tűnik el a kritikus  $T_c$ -hez közeledve. Pontosabban az eltűnő stratégia gyakorisága  $\rho \approx |T - T_c|^\beta$ , ahol  $\beta = 0.58$  az összes kétdimenziós esetben [28]. A numerikus adatsor, melyet ábrázoltunk, visszaadja ezt az elméleti várakozást a statisztikai hibán belül.

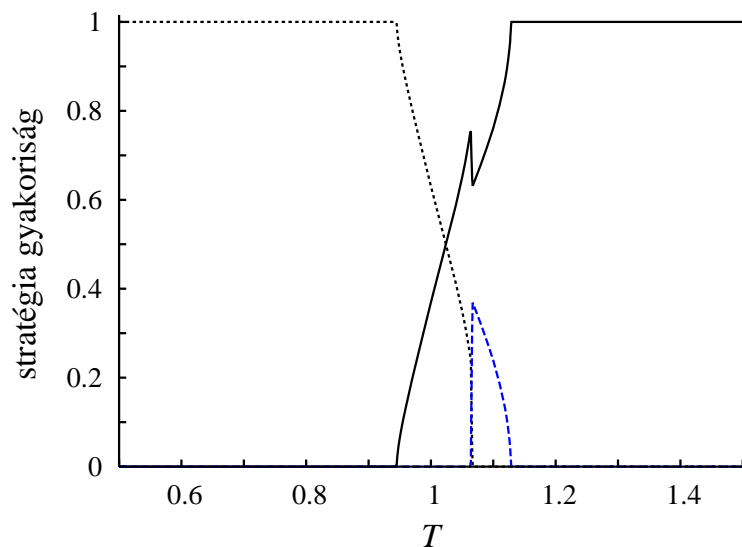
A fázisdiagramnak vizsgálhatjuk olyan metszetét is, ahol egyidejűleg három stratégia





17. ábra. *Stratégia frekvenciák  $T$  függvényében imitációs szabálynál, ha  $S = 0.3$ ,  $K = 0.3$  és  $\alpha = 0.5$ . A folytonos, pontozott és a kék szaggatott vonalak rendre a  $D$ ,  $C$ , és  $M$  stratégiák gyakoriságát szimbolizálják.*

együttlétezése is megengedett egy bizonyos tartományban. Ehhez tekintsük az  $S = 0$  esetet, melyet a 18. ábra szemléltet.

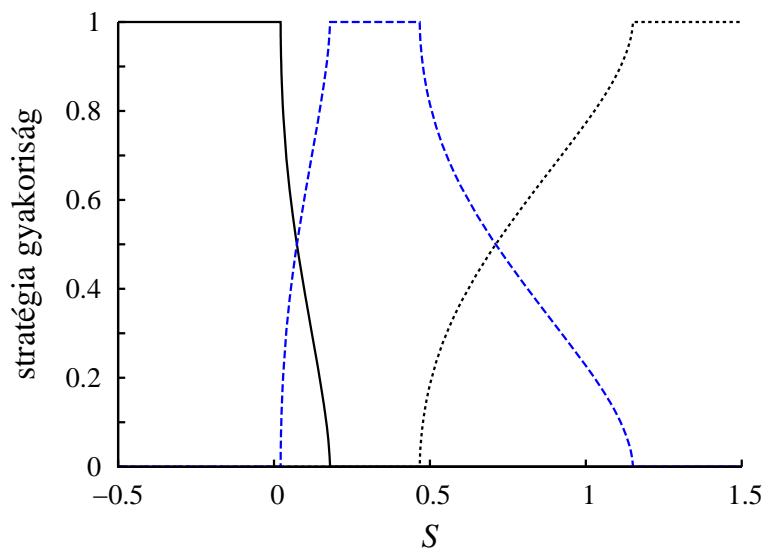


18. ábra. *Stratégia frekvenciák  $T$  függvényében imitációs szabálynál, ha  $S = 0$ ,  $K = 0.3$  és  $\alpha = 0.5$ . A folytonos, pontozott és a kék szaggatott vonalak rendre a  $D$ ,  $C$ , és  $M$  stratégiák gyakoriságát szimbolizálják.*

Jellegre itt is a fentihez hasonló átmeneteket tapasztalunk. Az univerzalitás elve miatt a kevert stratégia eltűnésénél a hármas együttlétezési régióban szintén az irányított perkolációs átmenetek jellemzői tűnnek elő, de ennek elegendően pontos numerikus igazolásához sokkal hosszabb szimulációs kísérletekre van szükség. A 18. ábra adatai nagyjából

4 hónapos szimulációkat igényeltek, ezért ezt a dolgot keretein belül nem tartottuk célszerűnek behatóbban elemezni, hiszen a kvalitatív egyezések már ennyi adatból is igazolhatók.

Fenti eredményeinket még átfogóbban szemléltethetjük, ha a fázisdiagramnak függőleges metszetét is vesszük, a szimulációs eredmények  $T = 1.2$ -nél a 19. ábrán szerepelnek.



19. ábra. *Stratégia frekvenciák  $S$  függvényében imitációs szabálynál, ha  $T = 1.2$ ,  $K = 0.3$  és  $\alpha = 0.5$ . A folytonos, pontozott és a kék szaggatott vonalak rendre a  $D$ ,  $C$ , és  $M$  stratégiák gyakoriságát szimbolizálják.*

Az átmenetek teljesen hasonlóak a korábbiakhoz, itt is a DP univerzalitási osztályba tartozó átalakulásokat kapunk.

## 4. Összegzés

A dolgozat során olyan evolúciós játékelméleti modell tulajdonságait vizsgáltuk, ahol a szokásos kétstratégias társadalmi dilemma játékot kibővítettük egy harmadik stratégiával úgy, hogy az az első kettő kevert stratégiájaként adódik. Ez is tiszta stratégiaként fogható fel, de a kevert stratégiának megfelelő értékekkel a nyereménymátrix vonatkozó elemeinél.

Megmutattuk, hogy az így adódó  $3 \times 3$ -as mátrixjáték potenciáljáték, amennyiben szimmetrikus kétstratégias alapjátékból indulunk ki. A potenciálmátrix kiszámítását követően meg tudtuk adni a kitüntetett Nash-egyensúlyokat a paramétersíkon, amelyek mind a kétszereplős játékra, mind a négyzetrácsra kiterjesztett sokszereplős kölcsönhatásra vonatkoznak. Meglepő módon azt találtuk, hogy a potenciálmaximumok semmilyen esetben nem esnek a  $2 \times 2$ -es alapmátrixon kívülre. Ez maga után vonta a kevert stratégia eltűnését a rendszerből alacsony hőmérsékleteken, ha a stratégiaváltások valószínűségét a logit szabály adja meg.

A potenciáljátékok elméletére alapozó számolások helyességét megerősítették az általunk elvégzett Monte Carlo szimulációk. Éppen emiatt a kétstratégias modelltől nem tapasztaltunk nagy eltéréseket, vagyis a statisztikus fizikából ismert Ising modellel való párhuzamok ebben a modellben is érvényben maradtak. A hőmérséklet változtatásával végzett szimulációk mellett érdekes jelenségeket tudtunk megmutatni akkor is, ha a nyereménymátrix paramétereit változtattuk. Sikertült a mágnességgel való analógiát egy hiszterézis-jelenség szimulálásával tovább mélyíteni, valamint alkalmas kezdőállapot esetén hiszterézis hiányában az elméleti fázisdiagram helyességét is szemléltetni.

A fentiekől alapjaiban eltérő eredmények adódtak viszont akkor, ha a stratégiák térbeli eloszlásának alakulását a jobban teljesítő szomszéd utánzása határozta meg. Ebben az esetben a kevert stratégia dominálni tudott a paramétersíknak azon tartományaiban, ahol evolúciósan stabil stratégia. A fázisdiagramot itt is meghatároztuk és összehasonlítottuk az elméleti számolásokkal, de ebben az esetben a sakktábla-szerű rendeződést felváltotta a kevert stratégia elterjedése a rácson.

Ennél a dinamikai szabálynál is párhuzamot tudtunk vonni egy statisztikus fizikai modellel: ilyen körülmények között a paraméterek függvényében végbemenő fázisátalakulások az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartoztak.

A két evolúciós dinamika közötti alapvető eltérést az okozza, hogy az utánzásos szabály nem képes alrácsonrendezett stratégiaprofil kialakítására, ami viszont a logit szabály esetén a paramétersík széles tartományában képes elterjedni a rácson. Ebből azt a következtetést szűrhetjük le, hogy míg a logit szabály alkalmazásával kapható eredmények állnak legközelebb a termodinamikából ismert rendszerekhez, az utánzásos dinamika jobban alkalmazható evolúcióbiológiai modellekben, ahol a jól elkevert ökológiai rendszerben az ESS közelebb van az átlagtér-jellegű közelítések feltételeihez.

## Hivatkozások

- [1] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- [2] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2006.
- [3] G. Szabó and G. Fáth, „Evolutionary games on graphs,” *Phys. Rep.*, vol. 446, pp. 97–216, 2007.
- [4] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, „Evolutionary game theory: Temporal and spatial effects beyond replicator dynamics,” *Phys. Life Rev.*, vol. 6, pp. 208–249, 2009.
- [5] B. Allen and M. A. Nowak, „Games on graphs,” *EMS Surv. Math. Sci.*, vol. 1, pp. 113–151, 2014.
- [6] J. Nash, „Equilibrium points in n-person games,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 36, pp. 48–49, 1950.
- [7] J. Maynard Smith and G. R. Price, „The logic of animal conflict,” *Nature*, vol. 246, pp. 15–18, 1973.
- [8] M. A. Nowak and R. M. May, „The spatial dilemmas of evolution,” *Int. J. Bifurcat. Chaos*, vol. 3, pp. 35–78, 1993.
- [9] G. Szabó and C. Tóke, „Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice,” *Phys. Rev. E*, vol. 58, pp. 69–73, 1998.
- [10] L. E. Blume, „The statistical mechanics of strategic interactions,” *Games Econ. Behav.*, vol. 5, pp. 387–424, 1993.
- [11] L. E. Blume, „The statistical-mechanics of best-response strategy revision,” *Games Econ. Behav.*, vol. 11, pp. 111–145, 1995.
- [12] D. Monderer and L. S. Shapley, „Potential games,” *Games Econ. Behav.*, vol. 14, pp. 124–143, 1996.
- [13] C. Domb, „Ising model,” in *Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 3* (C. Domb and M. S. Green, eds.), pp. 357–484, London: Academic Press, 1974.
- [14] R. J. Glauber, „Time-dependent statistics of the Ising model,” *J. Math. Phys.*, vol. 4, pp. 294–307, 1963.
- [15] S. Galam, Y. Gefen, and Y. Shapir, „Sociophysics: A mean behavior model for the process of strike,” *Math. J. Sociol.*, vol. 9, pp. 1–13, 1982.
- [16] A. V. M. Herz, „Collective phenomena in spatially extended evolutionary games,” *J. Theor. Biol.*, vol. 169, pp. 65–87, 1994.
- [17] W. A. Brock and S. N. Durlauf, „Discrete choice with social interactions,” *Rev. Econ. Stud.*, vol. 68, pp. 235–260, 2001.

- 
- [18] G. Weisbuch and D. Stauffer, „antiferromagnetism" in social relations and Bonabeau model," *Physica A*, vol. 384, pp. 542–548, 2007.
- [19] S. Galam and B. Walliser, „Ising model versus normal form game," *Physica A*, vol. 389, pp. 481–489, 2010.
- [20] S. Grauwin, D. Hunt, E. Bertin, and P. Jensen, „Effective free energy for individual dynamics," *Adv. Complex Systems*, vol. 14, pp. 529–536, 2011.
- [21] K. Sigmund, *The Calculus of Selfishness*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010.
- [22] G. Szabó, K. S. Bodó, B. Allen, and M. A. Nowak, „Fourier decomposition of payoff matrix for symmetric three-strategy games," *Phys. Rev. E*, vol. 90, p. 042811, 2014.
- [23] E. Ising, „Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus," *Z. Physik*, vol. 31, pp. 253–258, 1925.
- [24] L. Onsager, „Crystal statistics. I. a two-dimensional model with an order-disorder transition," *Physical Review*, vol. 65, pp. 117–149, 1944.
- [25] R. Cressman, *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games*. Cambridge, MA: MIT Press, 2003.
- [26] P. Grassberger, „On phase-transitions in Schlögl 2nd model," *Z. Phys. B*, vol. 47, pp. 365–374, 1982.
- [27] J. Marro and R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.
- [28] H. Hinrichsen, „Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states," *Adv. Phys.*, vol. 49, pp. 815–958, 2000.
- [29] C. Hauert and M. Doebeli, „Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game," *Nature*, vol. 428, pp. 643–646, 2004.