

Riesz potenciálokkal megvalósított inverz Radon transzformáció

TDK Dolgozat

Roberts Vivienne Astra
Fizika BSc III. évfolyam, BME

Témavezető
Légrády Dávid
BME Nukleáris Technika Intézet

2015

Kivonat

A képalkotásban gyakran használt matematikai eszköz a Radon-transzformáció, mely vonalintegrálok segítségével „tapogat le” egy eloszlást. Ez megfeleltethető több képalkotási modalitás (CT, PET, SPECT) mérési eredményének. Munkám során a kétdimenziós Radon-transzformálttal foglalkoztam. A kétdimenziós Radon-transzformáltból kapott adatok visszaképezésére a szűrt visszavetítés a leggyakrabban alkalmazott eljárás, munkám során ezzel szemben Riesz-potenciálok segítségével végeztem a képrekonstrukciót, annak reményében, hogy ezzel a szűrt visszavetítésbe beágyazott, numerikus matematikai szempontból nem könnyedén elvégezhető Hilbert-transzformációt kikerülhetem.

A Riesz-potenciálokban szerepel egy tetszőlegesen változtatható α paraméter, így nem csak egyetlen alternatív inverziós formulát, hanem egész megoldáscsaládot adnak. Az α paraméter megváltoztatásával több, lényegesen eltérő esetet lehet létrehozni. Pontosabban, α megfelelő megválasztásával lehet olyan megoldást találni, amely kizárólag a Radon térben szűr, illetve kizárólag a képtérben szűr. Ezek mellett több olyan megoldás létezik, ahol egymás után mindkét térben szűrnek a Riesz potenciálok. TDK munkám során készítettem egy programot, amelyben α bemeneti paraméterként szerepelt, azaz általános alfára elvégezte a Riesz potenciálos eljárást.

Ennek segítségével megvizsgáltam az alfa szerinti képminőség-változást. A eredmények azt mutatták, hogy magasabb, illetve negatív α esetén, azaz olyan α paraméter mellett, amely mindkét térben igényel szűrést, csak egyetlen esetben volt elfogadható az eredmény. A magasabb α esetek igen gyorsan elfajultak, és a kép nem csak alacsony minőségű volt, hanem olykor teljesen felismerhetetlen. Ezzel az esettel és a két, alacsony α melletti, azaz kizárólag egy térben lezajló szűrésekkel együtt összesen három α melletti esetet vizsgáltam meg részletesen. A vizsgált esetekre külön-külön optimalizált programokkal vizsgáltam a kialakult képminőséget.

A programokat MATLAB környezetben írtam meg. A bemeneti adatokat szintén MATLAB környezetben generáltam, majd beépített függvénnyel radon transzformáltam. A saját programokkal rekonstruált képeket összehasonlítottam a beépített inverz radon transzformációs rutin által rekonstruált képekkel.

Tartalomjegyzék

1. Elméleti háttér	6
1.1. A Radon-transzformáció és a szűrt visszavetítés	6
1.2. Riesz-potenciálok	10
2. Alfa paraméterezés választása	12
3. Értékelés	18
3.1. Alfa paraméterezés vizsgálata	19
3.2. Lokális transzformációk	24
4. Összefoglalás és kitekintés	29

1. fejezet

Elméleti háttér

1.1. A Radon-transzformáció és a szűrt visszavetítés

Az orvosi képalkotásnál gyakran használt matematikai eszköz a Radon-transzformáció. A képalkotásnak egyik legalapvetőbb matematikai eszköze a vonalintegrál, mely több elterjedt képalkotási modalitásban játszik szerepet.

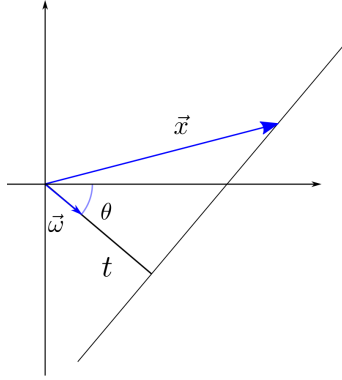
Ennek példája a CT (Computed Tomography), melyben a mért tárgyat röntgen vagy gamma sugárzással világítják át, majd a detektor az áthaladó intenzitást detektálja. A tárgyon átjutó intenzitást a részecsketranszport modellezésében jól ismert Beer-Lambert törvény írja le:

$$I = I_0 e^{-\int \mu(x) dx}$$
$$\ln \frac{I}{I_0} = -\int \mu(x) dx \quad (1.1)$$

ahol az I intenzitást, a $\mu(x)$ pedig a tárgy szelétől mérve x távolság után található abszorpciós együtthatót jelöl. A Beer-Lambert törvényben az abszorpciós együttható vonalintegrálja szerepel, a pozitron emissziós tomográfián alapuló detektorokban (PET, SPECT) azonban a koncentráció vonalintegrálja szerepel.

A Radon transzformációban egyetlen vonalintegrál helyett a mért teret szög szerint végigpásztázó egyenesek mentén vett vonalintegrálok sokasága helyettesíti [1] az alábbi módon:

$$Rf = \int \int f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{t} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) dx dy \quad (1.2)$$



1.1. ábra: Az ω, \mathbf{x}, t geometriai szemléltetése

Két dimenzióban az 1.1. ábrán látható jelöléseket vezetjük be: $\omega = [\cos \theta, \sin \theta]$, $\mathbf{x} = [x, y]$, $t = \omega \mathbf{x}$, $s = \omega^\top \mathbf{x}$. A Radon transzformáció kifejezése ezekkel a következőre egyszerűsödik:

$$\int f(t\omega + s\omega^\top) ds \quad (1.3)$$

A tomográfiában ez több sugárnak, illetve több szögből végzett vizsgálatnak felel meg. Mivel a tomográfia a térbeli eloszlások mérésével foglalkozik, a több szögből végzett mérések szükséges információt hordoznak.

Az inverz radon transzformáció hasonlóan alapvető matematikai módszer, viszont numerikus megvalósítása nem annyira egyszerű. Ennek oka látszik az inverziós képletben:

$$f(x) = \int \int \frac{\partial_t Rf(t, \omega)}{\omega \mathbf{x} - \mathbf{t}} dt d\theta \quad (1.4)$$

A képlet nevezőjében látható, hogy szingularitás található a $\mathbf{t} = \omega \mathbf{x}$ pontban, amely lehetetlenné teszi a megszokott, numerikus számításokban használt Riemann integrálást.

A szingularitás által okozott hiba elkerülése érdekében az integrált át kell alakítanunk. Ehhez a Fourier Szelet Tétel használható [1]. A Fourier Szelet Tétel azt mondja ki, hogy egy két dimenziós függvény két dimenziós Fourier transzformációjának egy "szelete" egyenértékű a függvény egy projekciójának egydimenziós Fourier transzformációjával.

Ennek alkalmazása a két dimenziós Radon transzformációra:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_t(Rf(t, \theta)) &= \int \int f(t\omega + s\omega^\top) ds e^{-itr} dt = \\ &= \int \int f(x, y) e^{-ir(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy = \mathfrak{F}_{x,y} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Látszik, hogy egy két dimenziós inverz Fourier transzformációval visszahozható az eredeti függvény. Ezt azonban érdemes polárkoordinátákban felírni, felhasználva a korábbi jelöléseket. Ez esetben a két dimenziós inverz Fourier transzformáció alakja:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int f(x, y) e^{ir(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int f(r(\omega)) e^{ir\mathbf{x}\omega} |r| dr d\theta = \\ &= \int \mathfrak{F}_r^{-1}[|r|f(r\omega)] d\theta \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ezt az inverziót az (1.5) egyenletre alkalmazva az eredmény:

$$f(x, y) = \int \mathfrak{F}_r^{-1}[|r|\mathfrak{F}_t(Rf(t, \theta))] d\theta \quad (1.7)$$

Az átláthatóság kedvéért a $\mathfrak{F}_r^{-1}[|r|\mathfrak{F}_t(Rf(t, \theta))]$ kifejezést $g(t, \theta)$ jelöléssel írhatjuk. A korábbi jelölésekre visszatérve, $t = \omega\mathbf{x} = x \cos \theta + y \sin \theta$. Ezzel a (1.7) egyenletben látható integrál alakja:

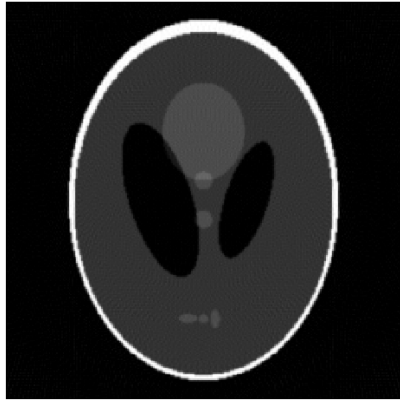
$$f(x, y) = \int g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (1.8)$$

Az $(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$ pár viszont azokat az egyeneseket jellemzi, amik az (x, y) pontokon keresztül mennek át, és az origóval θ szöget zárnak be. Ez azt jelenti, hogy a θ szerinti integrál az adott (x, y) ponton átmenő egyenesekhez tartozó projekciókat integrálja össze, vagyis az integrál egy visszavetítésnek felel meg.

A visszavetítést R^+ operátorral szokás jelölni. Ezzel felírhatjuk a teljes visszavetítést operátor jelölésben:

$$f(x, y) = R^+(\mathfrak{F}_r^{-1}[|r|\mathfrak{F}_t(Rf(t, \theta))]) \quad (1.9)$$

A belső tag a Fourier transzformációknak köszönhetően gyakorlatilag szűrőként működik. Ezt jól lehet látni az alkalmazásban is, mivel az egyszerű visszavetítés egy homályos változatát adja az eredeti képnek (1.2. ábra).



1.2. ábra: A Shepp-Logan fantom szűrt, illetve szűrés nélkül végzett visszavetítése

Ennek köszönhetően ezt az eljárást szűrt visszavetítésnek nevezzük.

1.2. Riesz-potenciálok

A Fourier transzformációk tipikusan könnyedén elvégezhetőek numerikusan. A szűrt visszavetítés esetében viszont bonyolultabb helyzet alakul ki. Ennek oka, hogy a Fourier transzformációkban található egy beágyazott Hilbert-transzformáció, ami az egyes Fourier transzformációkkal ellentétben gondot okozhat a numerikus számításokban.

A Hilbert transzformáció definíciója a következő:

$$\mathfrak{H}_g = \int \frac{g(y)}{x-y} dy \quad (1.10)$$

Az inverz Radon-transzformációhoz hasonlóan, látszik, hogy az $x = y$ pontban szingularitás lesz, ami Cauchy értelemben könnyedén integrálható, Riemann integrálni viszont nem lehet, így numerikusan nem előnyös.

A Hilbert-transzformáció azonban az inverz Radon-transzformációhoz hasonlóan átalakítható. Ebben segít, hogy a Hilbert-transzformáció valójában egy konvolúció, azaz $\frac{1}{\pi x} * g(y)$. Ekkor:

$$\mathfrak{H}_g = \mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F} \left(\frac{1}{\pi x} * g(y) \right) = \mathfrak{F}^{-1} [\mathfrak{F}(g(y)) \mathfrak{F} \left(\frac{1}{\pi x} \right)] = \mathfrak{F}^{-1} [\mathfrak{F}(g(y)) i \operatorname{sgn}(k)] \quad (1.11)$$

Ez az alternatív definíció hasonlít a szűrt visszavetítés szűrő tagjára. A szűrő tagot felbontva látszik, hogy az alternatív definíció valóban megtalálható benne:

$$\mathfrak{F}_r^{-1} [r \mathfrak{F}_t(Rf)] = \mathfrak{F}_r^{-1} [r \operatorname{sgn} r \mathfrak{F}_t(Rf)] = \mathfrak{H}_t(Rf) \quad (1.12)$$

Ennek hátránya az, hogy a Hilbert-transzformációhoz szükséges a teljes színogram, így bármilyen adatvesztés, szűrés, vagy vágás képminőségromlást eredményezhet.

A Hilbert-transzformáció kikerülése érdekében munkám során az inverz Radon-transzformáció egy újabb átalakítását vizsgáltam meg. Erre az úgynevezett Riesz-potenciálokat használtam.

A Riesz potenciál egy, a Hilbert transzformációhoz hasonló konvolúció, amely egy változtatható α paraméterrel rendelkezik:

$$I^\alpha f = \frac{1}{C_\alpha} \int \frac{f(y)}{|x-y|^{2-\alpha}} \quad (1.13)$$

Az előzőekhez hasonlóan a Riesz-potenciál is kifejezhető Fourier transzformációkkal. A Hilbert-transzformáció átalakításában alkalmazott konvolúció tulajdonságok itt is felhasználhatóak, amivel végül az adódik, hogy:

$$\mathfrak{F}[I^\alpha f](k) = |k|^{-\alpha} \mathfrak{F}[f(x)] \quad (1.14)$$

Ennek segítségével az inverz Radon-transzformáció is átalakítható. Ezt a Riesz-potenciál Fourier átalakításából kiindulva lehet levezetni. A (1.14) egyenlet baloldali Fourier transzformációját polárkoordinátákban invertálva megkapható a Riesz-potenciál [1]. A Radon-transzformációra alkalmazva:

$$I^\alpha Rf = (2\pi)^{-1} \int \int e^{irx\omega} |r|^{1-\alpha} \mathfrak{F}Rf(r\omega) dr d\theta \quad (1.15)$$

A Fourier Szelet tétel miatt azonban $\mathfrak{F}Rf(r\omega) = \mathfrak{F}_t Rf(t, \theta)$, így a (1.15) egyenlet:

$$I^\alpha Rf = (2\pi)^{-1} \int \int e^{irx\omega} |r|^{1-\alpha} \mathfrak{F}_t Rf(t, \theta) dr d\theta \quad (1.16)$$

Ebben azonban látszik az $I^{\alpha-1}$ definíciója, így az egyenlet tovább egyszerűsíthető:

$$I^\alpha Rf = (2\pi)^{-1} \int I^{\alpha-1} Rf(t, \theta) d\theta \quad (1.17)$$

Ebben már látszik, hogy a külső integrál a korábban is használt visszavetítés, így a teljes számítást felírhatjuk operátor jelölésben:

$$\begin{aligned} I^\alpha Rf &= (2\pi)^{-1} R^+ I^{\alpha-1} Rf \\ f &= (2\pi)^{-1} I^{-\alpha} R^+ I^{\alpha-1} Rf \end{aligned} \quad (1.18)$$

Az α paraméter tetszőlegesen megválasztható, így a (1.18) egyenlet nemcsak egyetlen megoldást ad, hanem egy egész megoldás családot. Ez megadja a lehetőséget, hogy az α paraméter megválasztásával optimalizáljuk az inverziót.

2. fejezet

Alfa paraméterezés választása

Az α paraméternek nincs megkötése, így végtelen megoldás létezik. A megoldások leszűkítésében azonban szerepet játszik az, hogy a megoldást numerikusan szeretnénk alkalmazni. Ez esetben célszerű egész alfákat alkalmazni, mivel így nem adódnak bonyolult gyökök a szűrésben, és a Riesz-potenciálok Fourier alakjai is átírhatóak olyan operációkra, amelyek talán kevesebb numerikus hibával rendelkeznek.

Ennek kiváló példája az $\alpha = -1$ eset. A (1.18) egyenletből és a (1.14) azonosságból azt kapjuk, hogy:

$$f = (2\pi)^{-1} I^1 R^+ I^{-2} R f = (2\pi)^{-1} \mathfrak{F}_r^{-1} (|r|^{-1} \mathfrak{F}_r [R^+ \mathfrak{F}_t^{-1} (r^2 \mathfrak{F}_t (R f))]) \quad (2.1)$$

A belső Riesz-potenciál azonban egyszerűsíthető, mivel:

$$\mathfrak{F}_t^{-1} (r^2 \mathfrak{F}_t (R f)) = \mathfrak{F}_t^{-1} (-i r)^2 \mathfrak{F}_t (R f) = \partial_t^2 R f \quad (2.2)$$

Ezzel a megoldás képlete:

$$f = (2\pi)^{-1} \mathfrak{F}_r^{-1} (|r|^{-1} \mathfrak{F}_r [R^+ \partial_t^2 R f]) \quad (2.3)$$

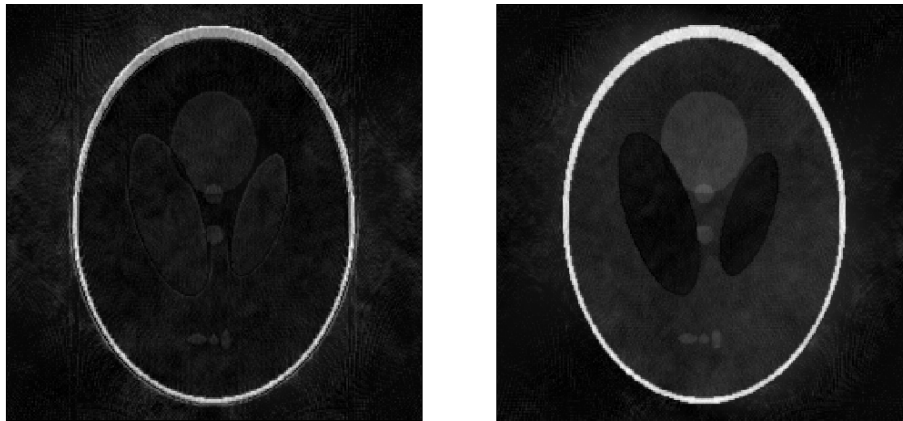
A fenti képletben látszik, hogy bár mindkét térben létezik egy szűrőtag, a Radon-térben már semmilyen Fourier transzformációt nem kell végrehajtani, hanem egy sima deriválás után már a visszavetítés következik, és a Fourier transzformációs szűrésekre már csak a valós térben kerül sor.

Ez egyrészt azért hasznos, mert így eggyel kevesebb műveletet kell végrehajtani, másrészt mert így a Radon-térben teljesen elkerüljük a Hilbert transzformációt, és a valós térben is hasonló szűrőtagot láthatunk, de Hilbert transzformációt már nem alkalmazunk. Ez legalább valamennyire elősegíti a lokalitást.

A különböző eljárásokat MATLAB környezetben valósítottam meg, és a MATLAB környezet beépített Shepp-Logan fantomnak, a *radon* beépített függvénnyel vett Radon-transzformáltját képeztem vissza. Külön programot írtam az $\alpha = -1, 0, 1$ esetekre.

Az $\alpha = -1$ esetben azt vettem észre, hogy a képminőség igen sokat romlott. A kép zajosnak tűnt, viszontmagas frekvenciák levágása csak akkor javított ezen, amikor már határozatlan a láthatóság rovására ment.

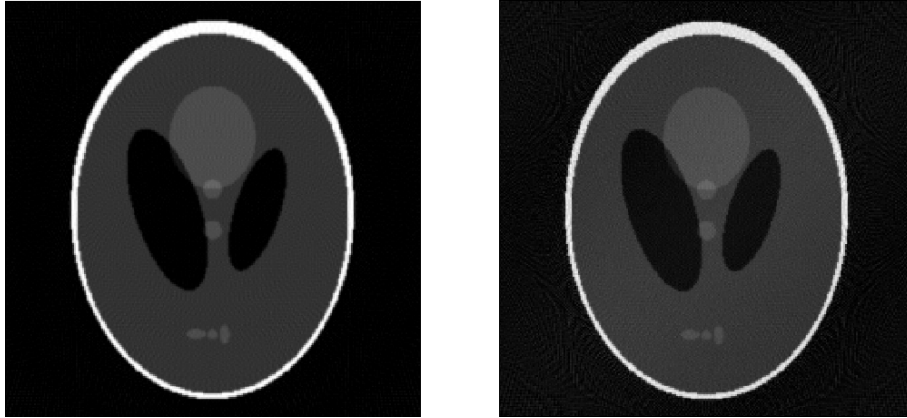
A legvalószínűbb oknak a második derivált tűnt, mivel a számítás során egy négy pontos deriváltat használtam, majd a szélén 3 pontos deriváltra váltottam. Ez még mindig figyelmen kívül hagyott két sort. Ennek elkerülése érdekében a vizsgálatot a belső tag átalakítása nélkül is elvégeztem.



2.1. ábra: $\alpha = -1$ eset átalakítással, illetve anélkül

Látszik, hogy a képminőség jelentősen javult, a kontraszt főleg, de a kisebb zaj-csíkok a második derivált nélkül is megjelentek. Erre is több ok lehet, főként az $1/|r|$ tag a külső szűrésben. Látszik, hogy a középső, $|r| = 0$ pontban a szűrőtag nem reguláris, így ezt a pontot ki kell hagyni a számításból. Mivel ez már a valós térben zajlik, az integrálás elvégzése után, az elhanyagolás nem okoz akkora eltérést, mint az eredeti inverzióban. Az viszont könnyen belátható, hogy valamennyi hibát így is okoz. Emellett az is szerepet játszhat, hogy a kétszeres szűrés során valamennyi információvesztés is lehetséges.

Az $\alpha = 0$ és $\alpha = 1$ esetek jobb képeket adtak. Sőt, az $\alpha = 0$ megválasztás mellett a Riesz potenciális eljárás majdnem ugyanazt az eredményt adta, mint az *iradon*:



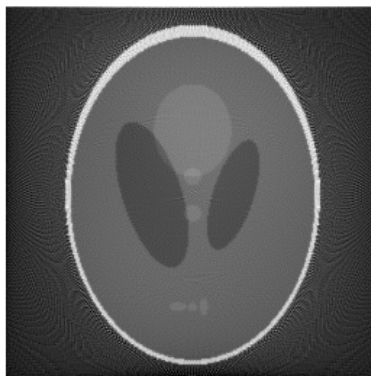
2.2. ábra: *iradon* függvénnyel készült kép, illetve az $\alpha = 1$ eset

Ez az elméletet is tükrözi, mivel az $\alpha = 0$ eset pont a szűrt visszavetítés képletét adja vissza:

$$f = (2\pi)^{-1} I^0 R^+ I^{-1} R f = (2\pi)^{-1} R^+ \mathfrak{F}_r^{-1} (|r| \mathfrak{F}_t(Rf)) \quad (2.4)$$

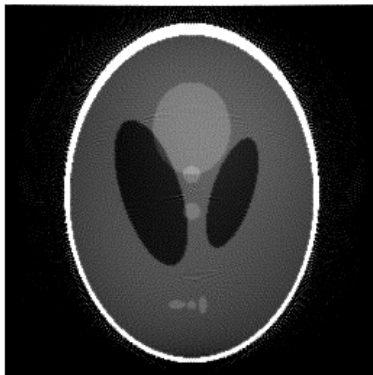
Azt viszont észrevehetjük, hogy az $\alpha = -1$ esetben fellépő zajok a Riesz potenciális eljárásban kicsit jobban láthatóak maradtak, mint a MATLAB program beépített *iradon* függvénnyel készült kép. Ez annak köszönhető, hogy az *iradon* függvény a szűrt visszavetítésben az $|r|$ szűrőtag után még levágja a magasabb frekvenciákat, ami pontosabb zaj szűrést végez.

Az $\alpha = 1$ eset egy igen hasonló eredményt ad, viszont látszik, hogy a kontraszt alacsony volt az eredeti képhez képest:



2.3. ábra: $\alpha = 1$ eset

Ezt az ImageJ képfeldolgozási szoftverrel javítottam.



2.4. ábra: $\alpha = 1$ eset, kontraszt javítás után

Ez megint könnyen magyarázható az elmélettel, mivel az $\alpha = 1$ eset igen hasonló az $\alpha = 0$ esethez, azzal a különbséggel, hogy míg a szűrt visszavetítés csak a Radon-térben szűr, az $\alpha = 1$ kizárólag a valós térben szűr, azaz:

$$f = (2\pi)^{-1} I^{-1} R^+ I^0 R f = (2\pi)^{-1} \mathfrak{F}_r^{-1}(|r| \mathfrak{F}_t(R^+ R f)) \quad (2.5)$$

Ebből azonban látszik, hogy az $\alpha = 0$ és $\alpha = 1$ speciális megoldásokat adtak, pontosabban olyan megoldásokat, ahol egyetlen térben létezik szűrő tag.

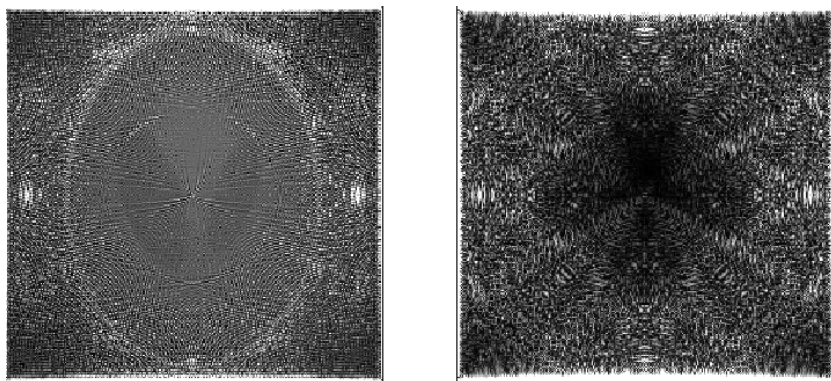
Az $\alpha = 1$ esetben az is látszik, hogy újra előkerül a Hilbert-transzformáció. A Riesz-potenciálokkal viszont már elértük, hogy csak a valós térben kerüljön sor a Hilbert-transzformációra, ami azt jelenti, hogy nem biztos, hogy szükség van a teljes szinogramra, hogy a visszavetítést végrehajtsuk. Emellett a szűrőtag $|r|$ reguláris minden pontban, így a képminőség is jelentősen javult az $\alpha = -1$ esethez képest.

Ezeknek az egyszerű, alacsony α eseteknek a megvizsgálása után felmerült az a kérdés, hogy a magasabb α paraméterek milyen eredményt adnak, mivel lehetséges, hogy az optimum a magasabb α paraméterek között van. Ebben azonban szerepet játszik az is, hogy a magasabb α paraméterű esetek mind, az $\alpha = -1$ esethez hasonlóan, mindkét térben végzik a szűrést.

A magasabb α paramétereket egy olyan MATLAB függvénnyel vizsgáltam meg, amely az α paramétert bemeneti paraméterként kapta, és általános esetben elvégezte a Riesz-potenciálos eljárást. Ennek érdekében a magasabb α paraméterű Riesz-potenciálokat egyszerűen Fourier transzformációs alakban végeztem el, mivel az $\alpha = -1$ esethez hasonló átalakításokat nem lehetett praktikusán általánosítani.

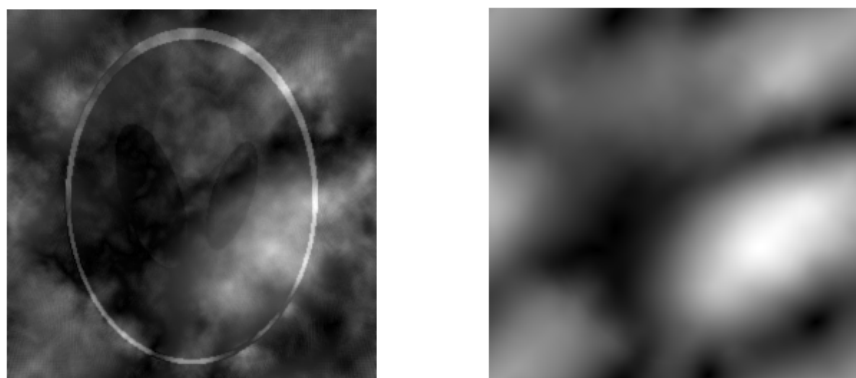
A program eredményéből viszont azt következtettem, hogy nem volt érdemes a magasabb α esetekre elvégezni az átalakításokat, mivel látszott, hogy a ma-

gasabb rendű szűrés olyan gyorsan elrontotta a képminőséget, hogy az $|\alpha| \geq 2$ esetek már felismerhetetlené váltak:



2.5. ábra: $\alpha = 2$, illetve $\alpha = 3$ megválasztás eredményei

Érdekes volt azonban megfigyelni, hogy bár a negatív α paraméterű esetek ugyanannyira gyorsan fajultak el, a jellegük jelentősen eltért a magasabb, pozitív α paraméterű esetektől:



2.6. ábra: $\alpha = -2$, illetve $\alpha = -3$ megválasztás eredményei

A negatív és pozitív α paraméterű esetek között a legfontosabb különbség a szingularitások elhelyezkedése. A pozitív paraméterű esetekben a Riesz potenciális eljárás a következő alakot veszi fel:

$$f = (2\pi)^{-1} I^1 R^+ I^{-2} R f = (2\pi)^{-1} \mathfrak{F}_r^{-1} (|r|^n \mathfrak{F}_r [R^+ \mathfrak{F}_t^{-1} (|r|^{-m} \mathfrak{F}_t (R f))]) \quad (2.6)$$

a negatív paraméterű esetekben pedig a következőt:

$$f = (2\pi)^{-1} I^1 R^+ I^{-2} R f = (2\pi)^{-1} \mathfrak{F}_r^{-1}(|r|^{-n} \mathfrak{F}_r[R^+ \mathfrak{F}_t^{-1}(|r|^m \mathfrak{F}_t(Rf))]) \quad (2.7)$$

ahol $n, m \in \mathbb{N}$.

Ebből látszik, hogy mindkét esetben található szingularitás az $r = 0$ pontban, viszont a szingularitás a pozitív esetekben a Radon térben lép fel, a negatív esetekben pedig a valós térben, így a hatása sem ugyanaz.

Ennek fényében nem túl meglepő, hogy a magasabb α paraméterű esetek elromlanak, mivel a magasabb α paraméterek szűrőtagjai egyre magasabb rendű szingularitásokkal rendelkeznek, amelyeknek egy nagy része még a Radon térben jelenik meg.

A derivált Fourier transzformációjának a tulajdonságai miatt fennáll az a lehetőség, hogy a hibának egy részét ki lehet kerülni átalakítással. Ez azonban leginkább a Hilbert-transzformáció elkerülésére használható, és arra is csak amíg a globális visszavetítés esetén még nem okoz nagy gondot, ráadásul az $\alpha = -1$ esetből látszott, hogy a deriválásra váltás több hibát okozott, mint amennyit kijavított. Továbbá mivel a deriválás a szingularitást nem tartalmazó tagokból hozható ki, ezeknek hibája a deriválás hibája mellett hatna, ami 2.5. és 2.6. ábrákon látható képminőség mellett nem lett volna tűrhető.

Ezeknek a megfontolásoknak eredményeként a magasabb α paraméterű eseteket elvettem, és a pontosabb, számszerű vizsgálatokat a korábban tárgyalt, jól működő $\alpha = -1, 0, 1$ esetekre folytattam.

3. fejezet

Értékelés

A képminőség számszerű értékelésére egy összehasonlító programot írtam. A program az eredeti képhez, illetve a beépített iradon MATLAB parancssal elvégzett szűrt visszavetítés eredményéhez hasonlította a felül tárgyalt három esettel elvégzett visszaképzés eredményét.

A program az esetek eltérését a "jó" képétől való eltérést háromféle normával vizsgálta:

- L^1 norma:

$$\|K_1 - K_2\|_1 = \sum_{i,j} |K_{1ij} - K_{2ij}| \quad (3.1)$$

- L^2 norma:

$$\|K_1 - K_2\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (K_{1ij} - K_{2ij})^2} \quad (3.2)$$

- keresztkorrelációs norma:

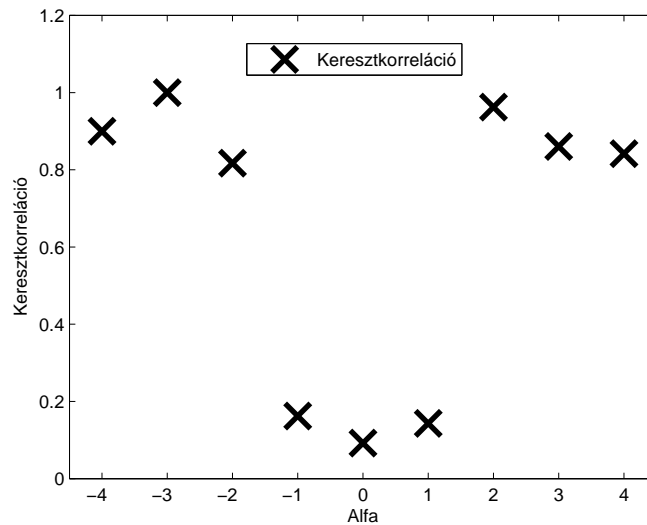
$$\|K_1 - K_2\|_k = \frac{1}{N} \sum_{x,y} \frac{(K_1(x,y) - \overline{K_1})(K_2(x,y) - \overline{K_2})}{\sigma_{K_1} \sigma_{K_2}} \quad (3.3)$$

ahol \overline{K} a MATLAB programban generált K képet leíró mátrix elemeinek az átlaga, σ_K meg azoknak a szórása.

Az L^1, L^2 normák túlságosan érzékenyek voltak a képek normálására, míg a keresztkorrelációs norma a normálási különbségeket a keresztkorrelációs eljárással kiszűri, és csak a képek térbeli eloszlásának különbségét vizsgálja. Mivel a pontos normálási faktor optimális értékét sokáig fejlesztettem, a keresztkorrelációs norma sokkal hasznosabb volt a megvizsgálásra. A teljesség kedvéért viszont minél több normában akartam megvizsgálni az eltéréseket, mivel így a normákat össze lehetett vetni.

3.1. Alfa paraméterezés vizsgálata

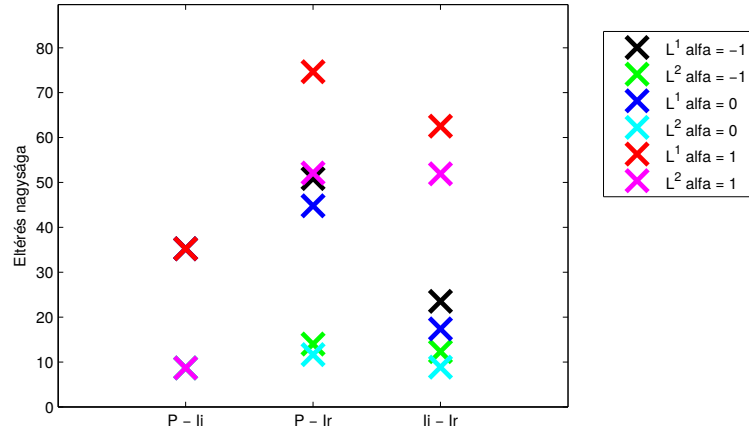
Bár a magasabb α paraméterű esetek láthatóan romlottak, az általános α paraméterre készült program írása előtt ezt még nem láttam. Emiatt a program eleinte úgy készült, hogy minden α paraméterrel készült képet kereszt-korrelációs normában hasonlított az *iradon* függvénnyel készült képhez. Az összehasonlítás igen látványosan kimutatta a szabad szemmel is jól látható problémát, mivel az $\alpha \geq 2$ durván romlott a kis α paraméterű esetekhez képest.



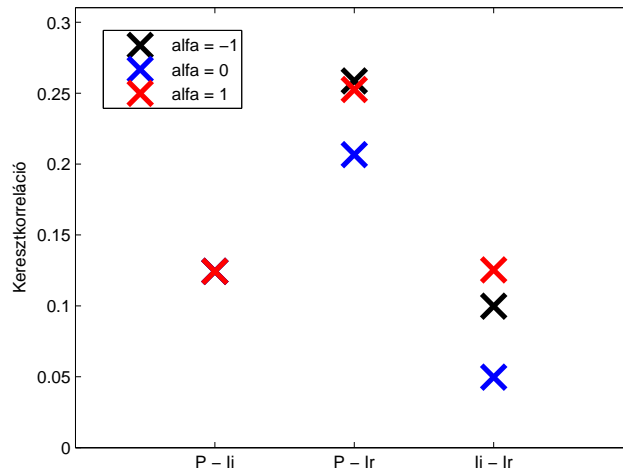
3.1. ábra: Keresztkorrelációs norma α paraméter szerint

A három elfogadható esetet mind a három normában megvizsgáltam. A képeket minden esetben ugyanazzal a jelöléssel ábrázoltam:

- P az eredeti kép
- Ii az *iradon* függvénnyel generált kép
- Ir a Riesz potenciális eljárással generált kép

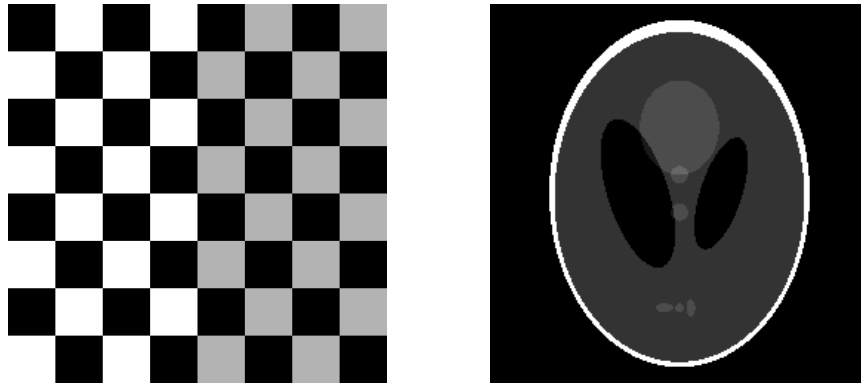


3.2. ábra: Kedvező esetek vizsgálata L^1, L^2 normában, Shepp-Logan fantomra alkalmazva



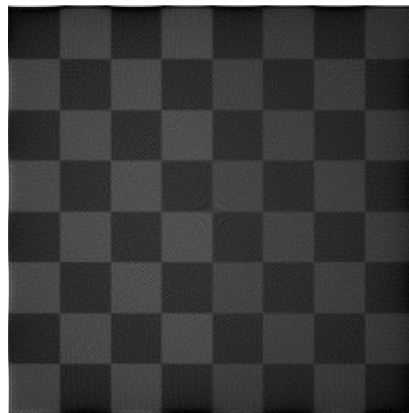
3.3. ábra: Kedvező esetek vizsgálata keresztkorrelációs normában, Shepp-Logan fantomra alkalmazva

A fejlesztéseket a MATLAB program beépített Shepp-Logan fantomjával végeztem, mivel a geometriai sajátosságait könnyen fel lehetett ismerni. A pontosabb vizsgálatokat azonban érdemes volt több fajta bemeneti képpel vizsgálni. Erre a beépített *checkerboard* függvényt és ehhez hasonló saját függvényeket használtam.

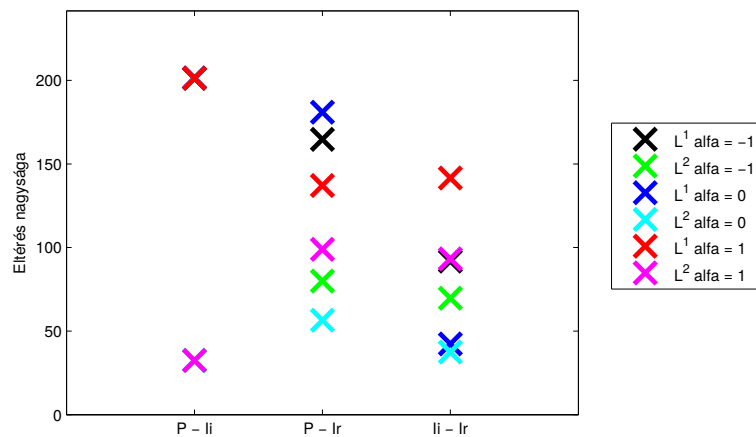


3.4. ábra: A *checkerboard* függvény és a Shepp-Logan fantom

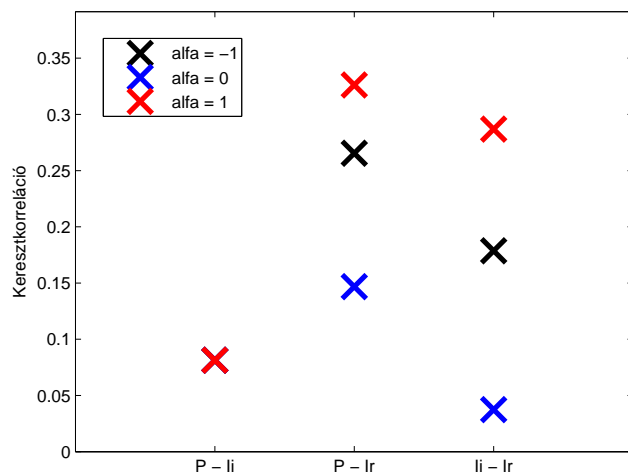
Ez főleg azért volt hasznos, mert ilyen jellegű képeken jól látszott, hogy a legnagyobb hibák a szélén léptek fel, illetve mivel így a három normás értékelést nem csak a Shepp-Logan fantomra alkalmaztam.



3.5. ábra: MATLAB *checkerboard* függvényének visszavetítése $\alpha = 1$ paraméterű Riesz potenciális eljárással



3.6. ábra: Kedvező esetek vizsgálata L^1, L^2 normában, *checkerboard* függvényre alkalmazva



3.7. ábra: Kedvező esetek vizsgálata keresztkorrelációs normában, *checkerboard* függvényre alkalmazva

A háromféle norma nem adott eltérő eredményt: minden esetben a Riesz potenciállal végzett eljárások közül az $\alpha = 0$ eset adta a legjobb eredményt. Ez az eredmény viszont még mindig *messze* nem volt olyan jó, mint az *ira-*

don függvénnyel végzett visszaképzés eredménye. Erre jó példa a Shepp-Logan fantom képe:

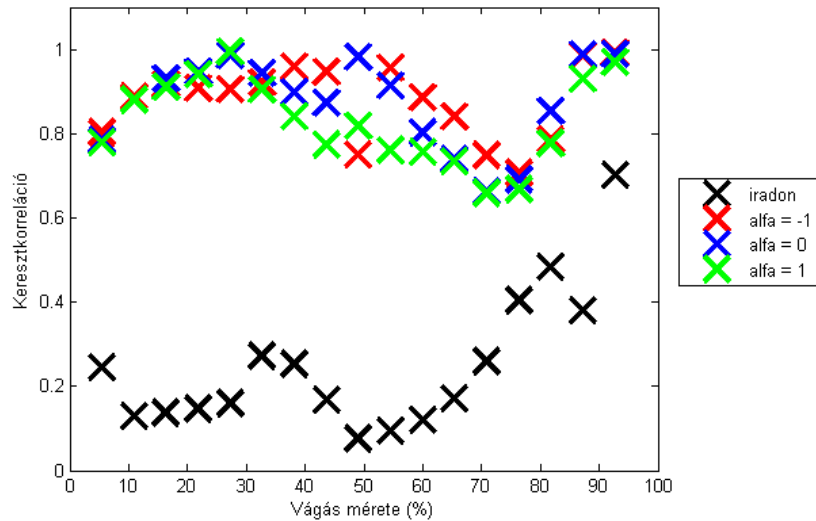
$$\begin{aligned}\|P - I_{iradon}\|_k &= 0.1201 \\ \|P - I_{\alpha=0}\|_k &= 0.2030 \\ \|P - I_{\alpha=1}\|_k &= 0.2597\end{aligned}\tag{3.4}$$

A két korrelációs norma és az eredeti fantom keresztkorrelációs normájának relatív hibájára a következőt kapjuk: Ekkor $\delta I_{\alpha=0} = 69,03\%$ és $\delta I_{\alpha=1} = 69,45\%$. Ebből az látszik, hogy a különböző α paraméterű esetek egymástól sokkal kevésbé térnek el, mint az *iradon* függvénnyel képzett képtől.

3.2. Lokális transzformációk

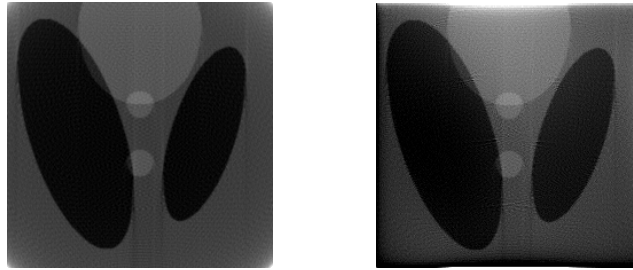
Egy érdekes kérdés, hogy a visszavetítés lokalitásán lehet-e javítani a Riesz potenciál bevezetésével, mivel így a Hilbert-transzformáció a vizsgált esetekben nem játszik szerepet. Ennek érdekében néhány különböző képnek a radon transzformáltját vágtuk. A "vágás" alatt olyan vágásokat értelmünk, amelyek a szinogram tetejéről és aljáról ugyanakkora csíkokat vágunk le. A vágott szinogramot továbbra is Riesz potenciálos eljárással képeztem vissza, majd a beépített *iradon* függvényvel is. Mindkét esetben ugyanazt a vágott szinogramot képeztem vissza.

Mindegyik esetet az eredeti képpel hasonlítottam össze. A különbségek tanulmányozásához azonban az eredeti fantomot is méretre kellett venni, ügyelve arra, hogy az eredeti képnek is ugyanaz a tartománya maradjon meg, ami a vágott szinogram visszaképzése után maradt. Az összehasonlításra ezúttal csak a keresztkorrelációt használtam, mivel a többi norma nem adott újabb információt, csak pontatlanabb értékeket.



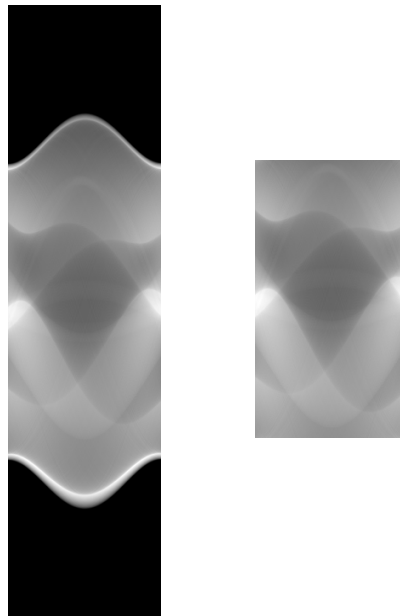
3.8. ábra: Vágás vizsgálata keresztkorrelációs normában, Shepp-Logan fantomra

Mivel a keresztkorrelációs norma nem adott térbeli információt, csak egy átlagértéket, a lokális transzformációk eredményeit vizuálisan is megvizsgáltam, hogy a keresztkorreláció eredményének "hihetőségét" tudjam értékelni. Ennek egy látható eredménye, az 55%-os vágás a 3.9. ábrán látszik példaként.



3.9. ábra: A Shepp-Logan lokális inverz radon transzformációja iradonnal, illetve $\alpha = 1$ paraméterű Riesz potenciális eljárással

Itt azonban fontos megjegyezni, hogy az 55%-os vágás a MATLAB programban képzett szinogramra vett adat, ami a MATLAB számolási érdekességei miatt még egy viszonylag kicsi vágás. A MATLAB program *radon* függvénye egy olyan algoritmust használ, ami több esetben is nagy, 0 értékű sávot hagy a szinogram körül. Ennek elkerülése érdekében az 55%-os vágás csak a szinogram szélét vágja le:

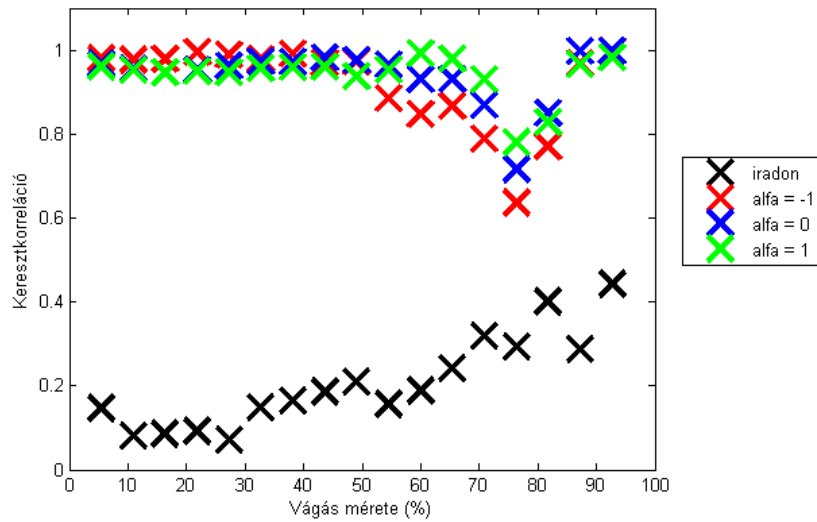


3.10. ábra: A Shepp-Logan radon transzformáltja, illetve annak 55 százalékos vágása

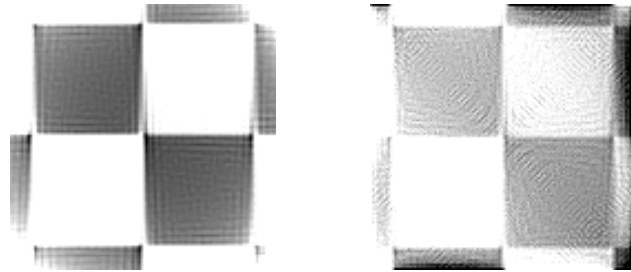
Ez abban is látszik, hogy a keresztkorrelációs vizsgálat csak 30%-os vágás

után mutat minőségromlást.

Az összehasonlítás során megint több fantomot használtam. A globális visszaképzéssel ellentétben itt valamennyire eltérő eredményeket láttam a különböző bemeneti képeknél. A *checkerboard* függvényre végrehajtott vágások látszólag nem igazán hatottak a képminőségre. Ez viszont a keresztkorrelációs norma pontatlanságának köszönhető, mivel a vizuális vizsgálat azt mutatta, hogy a *checkerboard* függvénnyel előállított fantom az "elmosódottsága" miatt adott jobb eredményt, és a kiugró hibák nem hatottak bele a normába. A kép viszont láthatóan rosszabb minőségű volt, főleg a széleken, ahol korábban is látszódtak bajok.



3.11. ábra: Vágás vizsgálata keresztkorrelációs normában, *checkerboard* függvényre



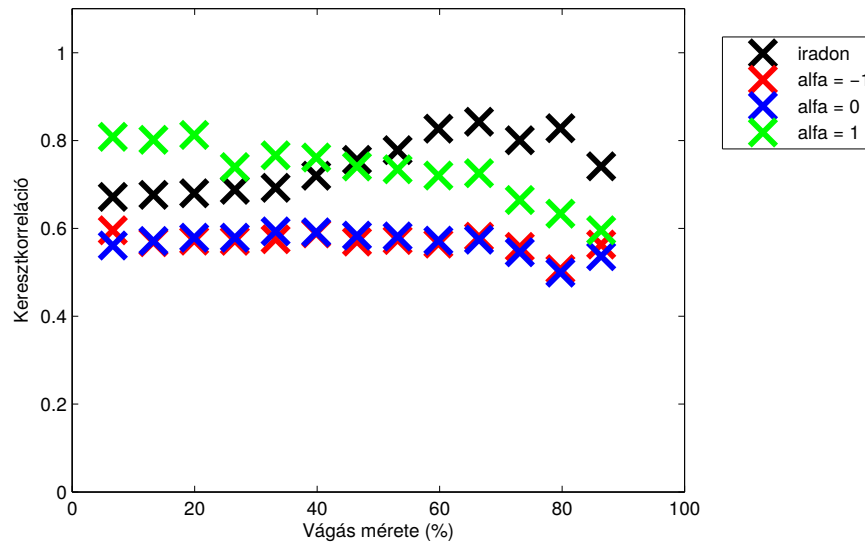
3.12. ábra: A *checkerboard* lokális inverz radon transzformációja iradonnal, illetve $\alpha = 1$ paraméterű Riesz potenciális eljárással

A vágást szintén megnéztem egy szövegre, mivel ez egy részletes, határozott

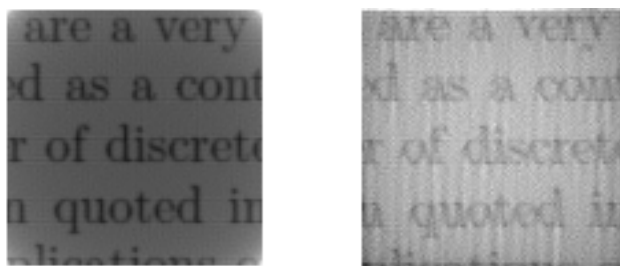
élekkel rendelkező ábra volt, és így a kisebb eltéréseket jobban lehetett látni. Ennek hátránya viszont azt volt, hogy a 2.3 ábrán látható halványság igen gyorsan elmosta a szöveget, és a kontrasztnöveléssel könnyű volt "elrontani" a képet azzal, hogy a háttérrel és zajt hoztam ki belőle, és nem a szöveget. Emiatt nem tudtam annyira megbízhatóan megnézni, hogy milyen képminőséget adott az eljárás. Ennek ellenére a keresztkorrelációs norma azt mutatta, hogy a képminőség enyhén *javult* a vágás után, vagy legalábbis nagyjából ugyanaz maradt.

We now turn our attention to
of X-rays to reconstruct a 3-c
X-rays are a very high energ
modeled as a continuous flu
number of discrete particles
is often quoted in units of
the implications of this fact.
though adequate description
physical assumptions are use

3.13. ábra: Alkalmazott szöveg



3.14. ábra: Vágás vizsgálata keresztkorrelációs normában, szövegre alkalmazva



3.15. ábra: Szöveg lokális inverz radon transzformációja iradonnal, illetve $\alpha = 1$ paraméterű Riesz potenciális eljárással

Mind a három esetben az látszik, hogy a Riesz-potenciálokkal végzett módszer kevésbé érzékeny a vágásra, viszont a kimentí képek minősége alapból annyira rossz, hogy az *iradon* eredménye 90%-os vágás esetén se tér el az eredeti képtől annyira, mint a Riesz-potenciálokkal képzett kép 90%-os vágás esetén.

4. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Munkám során az inverz Radon-transzformációt a Hilbert-transzformációt tartalmazó szűrt visszavetítés helyett Riesz-potenciálokra alapuló módszerekkel valósítottam meg. A Riesz-potenciálos eljárás olyan α paraméterű megoldáscsaládot ad, amely lehetőséget ad a Hilbert-transzformáció kiszűrésére, ami nélkül az inverz Radon-transzformációt könnyebb elvégezni numerikusan.

A Riesz-potenciálos eljárás tanulmányozását az $\alpha = -1$ eset vizsgálatával kezdtem. Ezt két különböző numerikus módszerrel végigcsináltam: a belső Riesz potenciálban lévő Fourier transzformációt egy második deriválttal helyettesítettem, majd mivel ez sok hibát hozott a végeredményben, a belső Riesz potenciált visszaírtam Fourier alakba. Ennek eredménye még mindig nem adott jó képminőséget, így az α paraméter változtatásával folytattam.

Következő lépésként olyan α paramétereket választottam, amelyek csak egy-egy térben szűrtek. Az $\alpha = 0$ eset az eredeti, gyakran használt szűrt visszavetítést adta vissza, amelyben a szűrés a Radon-térben történik. Az $\alpha = 1$ eset viszont a valós térben végezte a szűrést, így a Hilbert-transzformációra is a visszavetítés után kerül sor.

Bár az $\alpha = 1$ eset jó minőségű képet adott, a kérdés felmerült, hogy a α paraméter szerinti optimum nem lehetne a magasabb, illetve negatív α paraméterek között. Erre egy programot írtam, amely az α paramétert kapta bemeneti paraméterként, majd megadta az adott α paraméterhez tartozó visszavetített képét, illetve annak eltérését az eredeti képtől. A program eredményeként azt láttam, hogy az $|\alpha| \geq 2$ esetekben gyorsan romlott a képminőség. Ezt vizuális vizsgálatokkal és numerikus vizsgálatokkal is megállapítottam.

Az eredeti képtől való eltérést keresztkorrelációs normában mértem, amit a továbbiakban is felhasználtam, az L^1, L^2 normákkal együtt. A három normával az eredeti képtől, illetve a beépített *iradon* függvénnyel képzett eredménytől való eltéréseket vizsgáltam. A keresztkorrelációs normával megvizsgáltam a magas α paraméterek vizsgálására alkalmaztam, majd mind a három normában megvizsgáltam az elfogadható $\alpha = -1, 0, 1$ eseteket.

Érdekességként megvizsgáltam a lokális transzformációkat, hogy kiderítsem, hogy a Hilbert transzformáció nélkül javult-e a módszer lokalitása. A szinogramot egyenletesen kisebbre vágtam, majd megvizsgáltam a keresztkorrelációs normában. A vizsgálat során azt vettem észre, hogy bár a Riesz-potenciális módszer kevésbé volt érzékeny a vágásokra, a minőségük alapból túl rossz volt, hogy ez egy kifejezett előnyt adjon.

A vizsgálatokból az következtettem, hogy bár a módszer működik, a minősége nem kiváló, és így az előnyökkel sem nyerünk sokat

A továbbiakban a fan-beam geometriára szeretném alkalmazni a dolgozatban tárgyalt módszereket. A fan-beam geometria t szerint egyenletlen felbontású adatokat ad, ami a numerikus Fourier transzformációkat megnehezíti, így a szűrt visszavetítés helyett súlyozással való szűrésre térünk át. Az $\alpha = 1$ megválasztással lehetőséget láttam arra, hogy a szűrést a visszavetítés után végezzem, amikor már talán egyenletes felbontású adatokkal végezhetjük a szűrést.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Légrády Dávidnak, akinek türelmes és inspiráló hozzáállása nélkül nem készült volna el ez a dolgozat, valamint családomnak és barátaimnak támogatásukért és építőjelleű kritikáikért.

Irodalomjegyzék

- [1] D. Legrády B. Kári, K. Karlinger. *Elektronikus oktatási anyag kialakítása az élő szervezet strukturális összetevőinek és biokémiai folyamatainak képkalkotó elemzésére.* 2013.
- [2] Charles L. Epstein. *The Mathematics of Medical Imaging.* Pearson Education/Prentice Hall, 2001.