

TDK Dolgozat

# Összefonódás és dinamikus fázisátalakulás erősen korrelált rendszerekben

**Pataki Dávid**

Fizikus MSc

Kutatófizikus szakirány

**Témavezető:**

**Dr. Dóra Balázs**

egyetemi tanár

BME Fizikai Intézet,  
Elméleti Fizika Tanszék

BME

2018



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>5</b>
1.1. Motiváció . . . . .	5
1.2. Összefonódott állapotok és azok jellemzése . . . . .	6
1.3. Dinamikus fázisátalakulás . . . . .	9
<b>2. A sine-Gordon-modell</b>	<b>12</b>
2.1. Elméleti háttér, kísérleti realizáció . . . . .	12
2.2. Szemiklasszikus határeset . . . . .	14
<b>3. Eredmények</b>	<b>16</b>
3.1. Összefonódási entrópiák egyensúlyban . . . . .	16
3.2. Hirtelen kvencs . . . . .	23
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>30</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>31</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>32</b>



# 1. fejezet

## Bevezetés

### 1.1. Motiváció

Az összefonódás a kvantum soktest-rendszerek bizonyos állapotainak sajátossága, amely a nem-lokális korrelációkban gyökerezik és már a kvantummechanika hajnalán is nagy visszhangot váltott ki a fizikusok körében. Einstein „kísérteties távolhatásnak” („spooky action at a distance”) nevezte és úgy vélte létezniük kell ún. rejtett paramétereknek, amik determinisztikusan leírják ezt a jelenséget (EPR-paradoxon). Ezzel szemben Schrödinger elfogadta a mérések probabilisztikus természetét és a kvantummechanika karakterisztikus jellemvonásának tartotta az összefonódást. Jóval később J. Bell állított fel egy egyenlőtlenséget a rejtett változók létezésének feltételére (modern formalizmusban Clauser–Horne–Shimony–Holt-egyenlőtlenség), amelyet azóta kísérletek sorozata cáfolt [1], kizárva ezzel a lokális rejtett paraméterek létezését (azaz a lokális realizmust).

Látható tehát, hogy az összefonódás tanulmányozása és megértése alapjaiban véve képes megváltoztatni a kvantummechanikáról alkotott képünket, éppen ezért ez manapság is egy intenzív kutatási téma, mind kísérleti, mind elméleti szempontból. A kondenzált anyagok fizikájától, a nagy energiás térelméleten át, a kvantumgravitációig rengeteg területen találkozhatunk az összefonódás fogalmával [2, 3]. Felhasználása technológia szempontból is széleskörű: a kvantum-információelméletben az összefonódásra, mint erőforrásra tekintenek, amelyet kiaknázva olyan folyamatokat valósíthatunk meg, mint pl. kvantumkommunikáció, vagy kvantumtitkosítás. Ugyanide sorolhatjuk a kvantuminformatikát is, ahol a topologikus kvantumszámítógép megépítésében játszhat majd kulcsfontosságú szerepet [4].

Számos modell összefonódási tulajdonságai jól ismertek valós térben, azonban szilárdtestfizikai rendszerek esetén másodkvantált formalizmusban természetes módon adódik a lehetőség hullámszám-térbeli összefonódás vizsgálatára [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Dolgozatomban ezért egy erősen korrelált rendszer vizsgálatával foglalkozom és a különböző módusok közti összefonódást számolom ki. Mielőtt azonban ismertetném a vizsgált rendszert és ahhoz kapcsolódó eredményeimet, érdemes áttekintenünk az összefonódott állapotok általános tulajdonságait és az azokat jellemző főbb mennyiségeket.

## 1.2. Összefonódott állapotok és azok jellemzése

Egy kvantummechanikai rendszernek (vagy alrendszernek) nem minden esetben létezik hullámfüggvénye. Azokat az eseteket, amikor nem létezik hullámfüggvény, kevert állapotoknak hívjuk és leírásukhoz egy teljesen új formalizmus bevezetése szükséges. Ebben a formalizmusban az állapotokat ún. sűrűségoperátorokkal azonosítjuk. Tiszta állapotban (amikor létezik az adott rendszert leíró  $\psi$  hullámfüggvény) a sűrűségoperátor nem más, mint a Hilbert-téren ható 1-rangú projektor

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| .$$

Ezen állapotok

$$\mathcal{P} = \{|\psi\rangle\langle\psi| : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle\psi|\psi\rangle = 1\}$$

halmazán azonban jóval szűkebb a kevert állapotok

$$\mathcal{D} = \{\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1\}$$

halmazánál, amelynek elemei az egységnyi nyomú (normált), pozitív szemidefinit (valós, nemnegatív sajátértékekkel rendelkező) operátorok. Az ilyen tulajdonságokkal bíró operátorokat röviden pozitív operátoroknak nevezzük és belátható, hogy mindig felírhatóak 1-rangú projektorok (tiszta állapotok) lineáris kombinációjaként

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| ,$$

ahol a kifejtési együtthatókra

$$\sum_j p_j = 1$$

teljesül. Lineáris algebrai kifejezéssel élve tehát, a kevert állapotok halmaza a tiszta állapotok konvex burka [11].

A továbbiakban térjünk át az összetett kvantumrendszerek vizsgálatára és az egy-

szerűség kedvéért tekintsük azokat a rendszereket, amelyek két alrendszerre bonthatóak. Ekkor a teljes Hilbert-tér a két alrendszer Hilbert-terének direkt szorzataként írható fel  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Ilyen rendszerekben a legegyszerűbben megkonstruálható állapot tenzorszorzat alakú

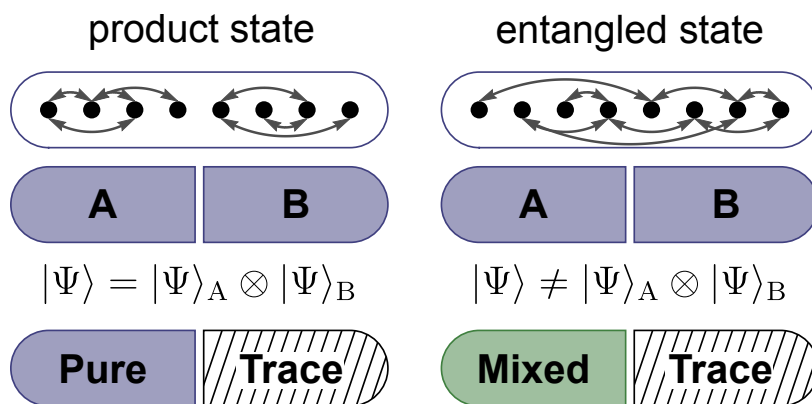
$$\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2,$$

ami fizikailag azt fejezi ki, hogy két alrendszer korrelálatlan. A legtöbb állapot azonban nem írható fel ilyen alakban és az összetett kvantumrendszerek vizsgálata során kiderült, hogy (a klasszikus rendszerekkel ellentétben) általános esetben a tiszta állapotok sem. Tehát, ha a teljes rendszerünk tiszta állapotban van, akkor is lehet korrelált: az egyik részrendszer viselkedése nem írható le a másik figyelembe vétele nélkül. Az alrendszerek között létrejött ezen nem-lokális korrelációkat összefonódásnak, magát az állapotot pedig összefonódott állapotnak nevezzük.

Az összefonódott állapotok karakterisztikus jellemzője, hogy ha az egyik alrendszer a másik figyelembe vétele nélkül próbáljuk leírni, akkor azt találjuk, hogy az kevert állapotban van. Matematikailag ez a parciális trace műveletével fejezhető ki

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho_{12},$$

melynek fizikai tartalma: minden információt "eldobunk" a 2-es részrendszerről (1.1. ábra). Az így kapott állapotot redukált sűrűségoperátornak (ill. redukált sűrűségmátrixnak) nevezzük. Ha az összetett rendszer korrelálatlan, úgy a redukált sűrűségmátrixra tiszta állapot adódik ( $\rho_1 \in \mathcal{P}_1$ ).



**1.1. ábra.** Összefonódás két alrendszerre [12]. Bal oldalt egy tenzorszorzat állapot, jobb oldalt pedig egy összefonódott állapot sematikus rajza látható. Előbbin elvégezve a parciális trace műveletét tiszta állapothoz jutunk, utóbbi esetén viszont kevert állapotot kapunk, ezért összefonódott rendszerekben mindig fennáll az 1.1 összefüggés (az entrópiákra pedig a fordított egyenlőtlenség teljesül).

Az összefonódás kvantitatív jellemzésére leggyakrabban az összefonódási entrópiákat és a sűrűségoperátor négyzetének nyomát használják. Ez utóbbi minden tiszta állapotra  $\text{Tr } \rho_\psi^2 = 1$  (éppen ezért az angol irodalomban a purity elnevezést kapta), hiszen a projektorok négyzete önmagával egyenlő. Kevert állapotokra pedig  $\text{Tr } \rho^2 < 1$ , mivel  $0 \leq p_j \leq 1$  minden  $j$ -re, így

$$\sum_j p_j^2 < 1.$$

Amikor összefonódott állapotról beszélünk, akkor a teljes rendszer egy tiszta állapotban, míg az alrendszerek kevert állapotban vannak (amelyek spektruma összesen két alrendszer esetén a Schmidt-dekompozíció miatt azonos [13]), vagyis

$$\text{Tr } \rho_1^2 = \text{Tr } \rho_2^2 < \text{Tr } \rho_{12}^2 = 1. \quad (1.1)$$

Az összefonódási entrópiák közül az egyik legáltalánosabb az  $n$  indexű Rényi-entrópia:

$$S_n(\rho) = \frac{1}{1-n} \ln \text{Tr } \rho^n, \quad (1.2)$$

ahol  $1 \leq n \leq \infty$  egész szám (a határokon  $S_n$  értéke határértékszámítással értelmezett). Tiszta állapotban a Rényi-entrópia azonosan nulla, egyébként pozitív és az  $n$  index nem-növekvő függvénye. Megmutatható, hogy  $n \rightarrow 1$  esetén a Neumann-entrópiával egyezik meg

$$S_1(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (1.3)$$

További fontos tulajdonsága, hogy független alrendszerekre additív, azaz

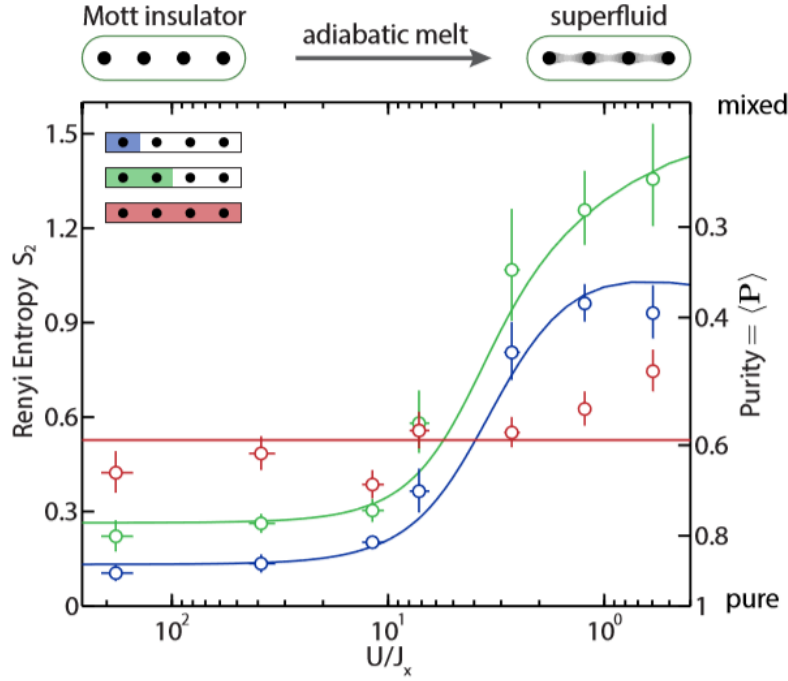
$$S_n(\rho_1 \otimes \rho_2) = S_n(\rho_1) + S_n(\rho_2). \quad (1.4)$$

Számítása a sűrűségoperátor spektrumának ismeretében hozzávetőlegesen egyszerű, hiszen ekkor csak a sajátértékek különböző hatványait kell összegeznünk.

A kísérleti technológia rohamos fejlődésének köszönhetően manapság már lehetőségünk van a Rényi-entrópia közvetlen mérésre is [12, 14]. Optikai rács segítségével csapdázott hideg atomi rendszerek finoman hangolható rendszerparaméterek által, nagyszerű lehetőséget biztosítanak egyszerű elméleti modellek (pl. Hubbard-modell) kísérleti megvalósítására. Ilyen soktest-rendszerekben interferometrikus technika segítségével két kvantumállapot átfedése megmérhető [12], ezáltal a  $\text{Tr}(\rho_1 \rho_2)$  mennyiség megkapható, amelynek logaritmus a  $\rho_1 = \rho_2$  esetén éppen  $S_2$  értékét adja meg. Tehát a kísérletben két azonosan preparált állapotú részecskét (vagy atomot) alkalmazva a második Rényi-entrópia mérésére lehetőségünk nyílik. Nagyobb számú



megegyező állapotot interferáltatva a magasabb rendű Rényi-entrópiák mérése is lehetséges. Az ehhez hasonló kísérletek elősegíthetik az összefonódás felhasználását erősen korrelált rendszerek nemegyensúlyi dinamikájának vizsgálatára és kvantumfázisaik jellemzésére, továbbá lehetőséget nyújthatnak az elméleti eredmények tesztelésére is.



**1.2. ábra.** A második Rényi-entrópia mérési eredményei a Bose–Hubbard-modell alapállapotában, az  $U/J_x$  kölcsönhatási erősség függvényében [12]. A zöld és kék görbék az egyes alrendszerekre számolt elméleti értékek, a piros pedig a teljes rendszerre vonatkozik. A mért pontokat körök jelölik. A kölcsönhatás adiabatikus kikapcsolása összefonódást hoz létre a rendszerben, mivel a részrendszerek entrópiája nagyobb lesz, mint a teljes rendszeré.

### 1.3. Dinamikus fázisátalakulás

Általánosságban a fázisátalakulás egy rendszer valamely fizikai tulajdonságainak ugrásszerű megváltozását jelenti egy kontrollparaméter függvényében. Hagyományos értelemben a fázisátalakulásokat a hőmérséklet függvényében vizsgálták, ami a szabadenergia nem-analitikus viselkedéséhez köthető a kritikus hőmérséklet közelében. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha egy fázisban ismerjük a szabadenergiát, akkor ez alapján semmit nem tudunk kijelenteni tulajdonságairól a másik fázist illetően. Érdeemes megjegyeznünk azt is, hogy ilyen fázisátalakulások mikroszkopikus rendszerek esetén csak és kizárólag a termodinamikai limeszben értelmezhetőek.

Fázisátalakulások azonban nem csak a hőmérséklet függvényében játszódhatnak le, hanem egy kvantumrendszer (zérus hőmérsékleten történő) unitér időfejlődése során is. Ennek vizsgálatához érdemes bevezetnünk az ún. Loschmidt echo-t, amely (a hagyományos bra-ket jelölésben) a kezdeti és az időfejlesztett (tiszta) kvantumállapotok átfedésével arányos

$$\mathcal{L}(t) = \left| \langle \psi | e^{-iHt} | \psi \rangle \right|^2. \quad (1.5)$$

A Loschmidt echo 1.5 definíciója formálisan nagyon hasonló a

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle$$

partíciós függvényhez és ezáltal az

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta)$$

szabadenergiához is. Rögtön felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e fizikai analógia a két mennyiség között, a fázisátalakulások tekintetében. Amennyiben igen, úgy a fázisátalakulást jelenlétét az időfüggő dinamikában kell keresnünk. A legegyszerűbb időfüggő protokoll, ha a rendszerünkben egy kölcsönhatást pillanatszerűen bekapcsolunk, vagy csatolási állandóját megváltoztatjuk  $t = 0$ -ban (hirtelen kvencs). Ennek hatására természetes módon ugrásszerű változás történhet a rendszert leíró fizikai mennyiségekben is, azaz fázisátalakulás mehet végbe a  $t = 0$  időpillanatban.

A fentebb megfogalmazott kérdést elsőként a merőleges mágneses térbe helyezett

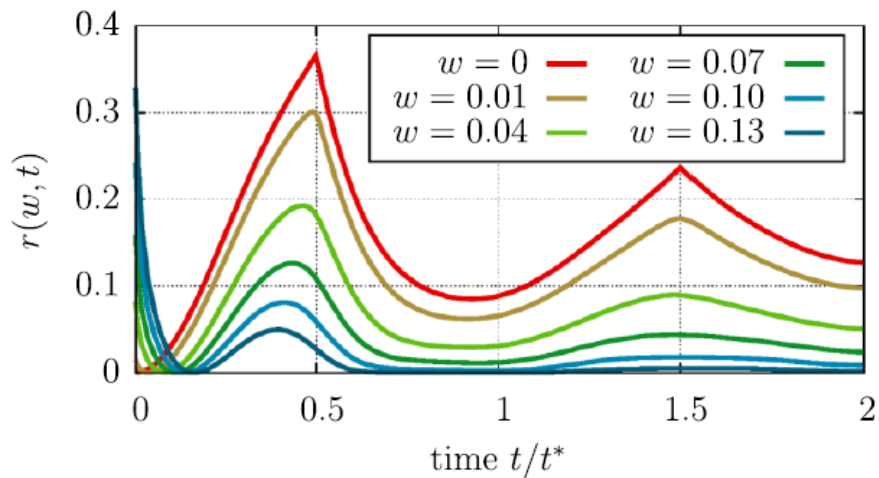
$$H(g_0) = -\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \frac{g_0}{2} \sum_i \sigma_i^x \quad (1.6)$$

1D Ising-modellben vizsgálták, ahol  $g_0$  a mágneses tér nagyságát,  $\sigma^x$  és  $\sigma^z$  pedig a Pauli-mátrixokat jelöli. A részletes komplex analízis kimutatta, hogy a  $\beta \leftrightarrow it$  megfeleltetés valóban megtehető és kvantumkritikus ponton keresztülhaladó hirtelen kvencs esetén  $\mathcal{L}(t)$  struktúrájában nem-analitikus viselkedés jelenik meg a

$$t_n^* = t^* \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

pontokban [15]. A kifejezésben szereplő  $t^*$  kritikus időre  $t^* = \pi/\varepsilon_{k^*}(g_1)$  teljesül, ahol  $g_1$  a kvencs során "bekapcsolt" kölcsönhatás csatolási állandója ( $g_0 \mapsto g_1$ ),  $\varepsilon_k$  az "új" Hamilton-operátor spektruma,  $k^*$ -ot pedig a kvencs dinamikája határozza meg. A következő fejezetben egy olyan rendszert ismertetünk, amelyben mind az

összefonódás, mind a dinamikus fázisátalakulása vizsgálata lehetséges.



**1.3. ábra.** Az 1.6 rendszeren végzett munka eloszlásfüggvénye egy kvantumkritikus ponton ( $g = 1$ ) keresztülhaladó kvencsre [15]. A  $w = 0$ -hoz tartozó görbe felel meg a Loschmidt echo-nak: nem-analitikus viselkedése jól megfigyelhető a  $t_n^*$  pontokban.

## 2. fejezet

# A sine-Gordon-modell

### 2.1. Elméleti háttér, kísérleti realizáció

A kvantum sine-Gordon-modell egy egydimenziós integrálnálható modell, Bethe ansatz segítségével egzaktul megoldható [16]. Elnevezése a Klein-Gordon-modellből ered, ahol a

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \sin \phi = 0 \quad (2.1)$$

mozgásegyenletben  $\sin \phi$  helyett  $\phi$  szerepel. Hamilton operátora általánosan

$$\begin{aligned} H_{\text{SG}} &= H_0 - g \int dx \cos(4\phi(x)), \\ H_0 &= \frac{1}{2\pi} \int dx \left[ cK (\pi\Pi(x))^2 + cK^{-1} (\nabla\phi(x))^2 \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

alakban írható fel ( $\hbar = c = 1$  egységekben), ahol  $H_0$  a szabad, tömegtelen skalármező Hamilton-operátora. A kanonikus sebesség- ( $\Pi$ ) és elmozdulásmezők ( $\phi$ ) kielégítik a

$$[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x - y) \quad (2.3)$$

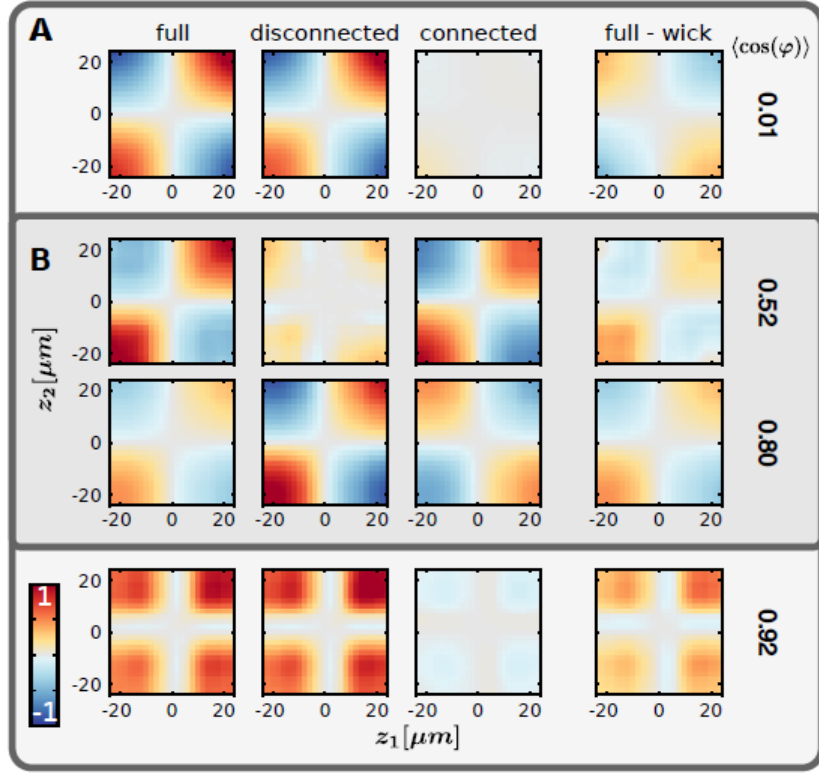
felcserélési relációt és relatív súlyukat a Hamilton-operátorban különbözőnek tételeztük fel (ez két paraméterben foglalható össze, amiket  $c$  és  $K$  jelöl). A  $\cos(4\phi(x))$  kölcsönhatási tagot (melynek csatolási állandója  $g$ ) sorba fejtve tetszőlegesen magas rendű kölcsönhatási tagok hozzávehetőek  $H_0$ -hoz, aminek következtében a 2.1 mozgásegyenletben nemlineáris tagok jelennek meg, így a rendszer érdekes, ún. szolitonikus gerjesztésekkel is rendelkezik [17]. A modell dinamikájának numerikus szimulációjára az utóbbi időben hatékony módszereket fejlesztettek ki [18], továbbá a korrelációs függvények időfejlődésének analitikus kiszámítása bizonyos határesetekben (taszító kölcsönhatás, gap-es fázis, gyenge kvencs) a szemiklasszikus közelítés segítségével is lehetséges [19].

Szilárdtestfizikai szempontból tekintve 2.2 Hamilton-operátor a lineáris rácson első-szomszéd kölcsönható spintelen elektronok problémájából kiindulva is levezethető effektív modell (termodinamikai limeszben). Ezt a folyamatot bozonizációnak nevezik, ami matematikailag egy operátor azonosságon alapul, a fermionikus és az exponencializált bozonikus téroperátorok között [20, 21]. Mindez egyben azt is jelenti, hogy egy dimenzióban a Fermi-folyadék elmélet érvényét veszti, ugyanis a kölcsönható elektronrendszerek alacsony energiás elemi gerjesztései minden esetben bozonikusak (a kvázi-részecske átfedés nullává válik). A levezetések részleteit itt nem közöljük, csak megadjuk az elmélet legfontosabb idevágó eredményeit. Ezek értelmében 2.2 Hamilton-operátor paramétereit az alábbiak szerint azonosíthatjuk elektronok közti kölcsönhatások csatolási állandóival [20]:

$$\begin{aligned} cK &= v_F \left( 1 + \frac{g_4}{2\pi v_F} - \frac{g_2}{2\pi v_F} \right), \\ cK^{-1} &= v_F \left( 1 + \frac{g_4}{2\pi v_F} + \frac{g_2}{2\pi v_F} \right), \\ g &= \frac{2g_3}{(2\pi\alpha)^2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol  $g_4$  az előreszórás erőssége,  $g_2$  a visszaszórásé,  $g_3$  az Umklapp-folyamatok révén a rácsból származik,  $v_F$  a szabad elektrongáz Fermi-sebessége,  $c$  a kölcsönhatások által renormált Fermi-sebesség,  $K$  pedig az ún. Luttinger-paraméter. Itt érdemes megemlítenünk egy fontos határesetet:  $g_3 = 0$  esetén az ún. Luttinger-modellhez jutunk, amely a Luttinger-folyadékok univerzalitási osztálya. A Luttinger-folyadékok elmélettel sok helyen találkozhatunk, ugyanis amellet, hogy kölcsönható elektronokat ír le fémes rendszerekben, bozonikus esetekben is alkalmazható. Ezekre példaként hozható az XXZ Heisenberg spinlánc, valamint az egydimenziós Bose-gázok, de kísérletileg ide sorolhatók a szén nano-struktúrák, nanocsövek és nanopálcák, illetve a tört kvantálású Hall-élállapotok is [20].

Kísérleti szempontból a sine-Gordon-modell is megvalósítható, pl. két egymáshoz csatolt, egydimenziós bozonikus szuperfolyadékokból alkotott rendszer segítségével, ugyanis ekkor a relatív szabadsági fokok effektív leírására alkalmasnak bizonyult [22]. Ezen komplex soktest-rendszer alapvető tulajdonságainak meghatározása korrelációs függvények segítségével lehetséges, amelyek interferenciamintázatok méréséből származtathatóak. Az erre kifejlesztett mérési eljárás hatékonyságát tükrözi, hogy akár tizedrendű korrelációs függvények meghatározására is lehetőséget nyújt [22, 23], így az alapállapot, a kvázi-részecske gerjesztések és azok kölcsönhatása alaposan tanulmányozható. Ezen technikák a későbbiekben fontos szerepet játszhatnak majd soktest-problémák kísérleti megoldásában.



**2.1. ábra.** Tizedrendű fázis korrelációs függvények  $(G^{(10)}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'))$  a sine-Gordon-modell kísérleti realizációjában [22]. A szuperfolyadékok közti erős csatolás esetén  $\langle \cos(\varphi) \rangle \simeq 1$ , ellenkező esetben pedig  $\langle \cos(\varphi) \rangle \simeq 0$ . A korrelációk erősségét a színskála jelzi. A nagy mennyiségű adat ábrázolhatóságát elősegítendő  $z_3 = -z_4$ ,  $z_5 = -z_6$ ,  $z_7 = -z_8$ ,  $z_9 = -z_{10}$  és  $\mathbf{z}' = 0$  rögzített értékek a rendszerben. Emiatt az ábrák közepén egymást szimmetrikusan keresztező kioltások láthatóak.

## 2.2. Szemiklasszikus határeset

A tereket  $\sqrt{K}$ -val átskálázva,  $K \ll 1$  esetén a koszinusz vezető rendig sorba fejthető, ez az ún. szemiklasszikus határeset [24]. A sorfejtés után a tereket visszakálázva

$$H_{\text{SG}} \simeq H = \frac{1}{2\pi} \int dx \left[ cK (\pi\Pi(x))^2 + cK^{-1} (\nabla\phi(x))^2 \right] + \frac{\delta g_3}{(\pi\alpha)^2} \int dx \phi^2(x) \quad (2.5)$$

kvadratikus Hamilton-operátort kapjuk. Fourier módusokat kanonikus bozonok segítségével bevezetve

$$\begin{aligned} \phi(x) &= - (N_R + N_L) \frac{\pi x}{L} - \frac{i\pi}{L} \sum_{q \neq 0} \left( \frac{L|q|}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q} e^{-\alpha|q|/2 - iqx} (b_q^\dagger + b_{-q}), \\ \theta(x) &= (N_R - N_L) \frac{\pi x}{L} + \frac{i\pi}{L} \sum_{q \neq 0} \left( \frac{L|q|}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q} e^{-\alpha|q|/2 - iqx} (b_q^\dagger - b_{-q}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

áttérhetünk hullámszámtérbe (3.1). A kanonikus sebességmező innen

$$\Pi(x) = \frac{1}{\pi} \nabla \theta(x) \quad (2.7)$$

szerint fejezhető ki és a bozonikus keltő, eltüntető operátorok csererelációja

$$[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{q,q'}. \quad (2.8)$$

A fenti kifejezésekben  $L$  a rendszer méretét jelöli és az első tagok a  $q \rightarrow 0$  impulzusú részecskék számával arányosak, amelyek a legtöbb esetben elhagyható konstansok. Az összegzések a Fermi-ponthoz közeli hullámszámokra futnak végig, mivel bevettük az  $\alpha$  (tetszőleges nagyságú) levágást, ami egy véges sáv szélességet biztosít a rendszerben és folytonos esetben az integrálok regularizálásához nélkülözhetetlen.

Habár a koszinuszos tag sorfejtése fizikailag csak  $K \ll 1$  esetén releváns, elképzelhető olyan modell (pl. különböző  $\cos \phi$  és  $\sin \phi$  kölcsönhatási tagokkal), melyet ugyanezen Hamilton-operátor ír le, de a paraméterek nagysága tetszőlegesen nagy lehet.

A következő fejezetben ennek szellemében kiindulópontunk 2.5 Hamilton-operátor lesz és hullámszámtérben vizsgáljuk az összefonódást a  $c$ ,  $K$  és  $m \sim g_3$  paraméterek függvényében.

## 3. fejezet

# Eredmények

### 3.1. Összefonódási entrópiák egyensúlyban

A 2.6 Fourier-módusokat a 2.5 Hamilton-operátorba helyettesítve és az integrálást elvégezve

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \sum_q m(q) \left( b_q^\dagger b_q + b_{-q}^\dagger b_{-q} + b_q^\dagger b_{-q}^\dagger + b_q b_{-q} + 1 \right), \quad (3.1)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_q \tilde{\omega}_0(q) \left[ \frac{K^{-1} + K}{2} \left( b_q^\dagger b_q + b_{-q}^\dagger b_{-q} + 1 \right) + \frac{K^{-1} - K}{2} \left( b_q^\dagger b_{-q}^\dagger + b_q b_{-q} \right) \right]$$

adódik, ahol  $\tilde{\omega}_0(q) = c|q|$  a Luttinger-folyadék gerjesztési spektruma és bevezettünk egy  $c$ -től és  $K$ -tól független paramétert (amely a korábbiak tekintetében  $g_3$ -mal azonosítható), a tömeget

$$m(q) = \frac{m^2}{2\omega_0(q)} = \frac{m^2}{2v_F|q|}. \quad (3.2)$$

A továbbiakban ezen rendszer alapállapotában vizsgáljuk a különböző  $q$ -módusok közti összefonódást, zérus hőmérsékleten. A kölcsönható alapállapot megtalálásához meg kell oldanunk az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet, azaz diagonalizálnunk kell a Hamilton-operátort. A probléma megoldása a

$$\begin{pmatrix} d_q \\ d_{-q}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q & v_q \\ v_{-q}^* & u_{-q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_q \\ b_{-q}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.3)$$



Bogoljubov-transzformációval lehetséges, ahol az  $u_q$  és  $v_q$  esetünkben valós Bogoljubov-együtthatók páros függvényei  $q$ -nak és teljesítik a

$$|u_q|^2 - |v_q|^2 = 1 \quad (3.4)$$

feltételt, így a 2.8 kanonikus kommutációs relációk megőrződnek a  $d$ -bozonokra is.

A diagonalizáció absztrakt módon az  $SU(1, 1)$  algebra

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2} (b_q^\dagger b_{-q}^\dagger + b_q b_{-q}) , \\ J_2 &= \frac{1}{2} i (b_q^\dagger b_{-q}^\dagger - b_q b_{-q}) , \\ J_3 &= \frac{1}{2} (b_q^\dagger b_q + b_{-q}^\dagger b_{-q} + 1) , \end{aligned} \quad (3.5)$$

operátorai segítségével is elvégezhető, melyek kommutációs relációi (rögzített  $q$ -re)

$$[J_1, J_2] = -iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2. \quad (3.6)$$

Ezeket felhasználva

$$H = \sum_q \left[ \left( \tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} + K}{2} + m(q) \right) J_3 - \left( \tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} - K}{2} + m(q) \right) J_1 \right] \quad (3.7)$$

és belátható, hogy az anomális tagok (azaz  $J_1$ ) eltüntetéséhez  $J_2$  által generált forgatás szükséges [25]. A 3.3 Bogoljubov-transzformáció unitér operátora ezen a nyelven tehát

$$R(\vartheta_q) = \prod_q R_1(\vartheta_q) = \prod_q e^{-iJ_2\vartheta_q} \quad (3.8)$$

alakú és a Hausdorff-kifejtés segítségével megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} R_1(\vartheta_q) J_3 R_1(\vartheta_q)^{-1} &= J_3 \cosh \vartheta_q + J_1 \sinh \vartheta_q \\ R_1(\vartheta_q) J_1 R_1(\vartheta_q)^{-1} &= J_1 \cosh \vartheta_q + J_3 \sinh \vartheta_q. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ezért a forgatás után a

$$\tanh \vartheta_q = \frac{\tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} - K}{2} + m(q)}{\tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} + K}{2} + m(q)} = \frac{\omega_0(q) \tilde{\omega}_0(q) (K^{-1} - K) + m^2}{\omega_0(q) \tilde{\omega}_0(q) (K^{-1} + K) + m^2} \quad (3.10)$$

megszorítással a 3.7 Hamilton-operátor a

$$H' = \sum_q \omega(q) \left( b_q^\dagger b_q + \frac{1}{2} \right) \quad (3.11)$$

alakot ölti, ahonnan a kvázi-részecske gerjesztési spektrum leolvasható

$$\omega(q) = \sqrt{\tilde{\omega}_0(q)^2 + \frac{c}{v_F} K m^2}. \quad (3.12)$$

Jól láthatóan egy tiltott sávval rendelkező rendszerrel van dolgunk. Későbbi felhasználás céljából érdemes megjegyeznünk, hogy az off-diagonális tagokat eltüntető 3.10 kikötés az  $m_0 = \frac{m}{\sqrt{c v_F}}$  (energia dimenziójú) változó bevezetésével egyszerűbb alakra hozható:

$$\tanh \vartheta_q = \frac{q^2(K^{-1} - K) + m_0^2}{q^2(K^{-1} + K) + m_0^2}, \quad (3.13)$$

illetve ezen változóval megfogalmazható a fizikailag releváns  $m_0 \ll 1/\alpha$  tartomány a problémában, azaz amikor a momentum levágás által meghatározott energiaskála jóval nagyobb a tiltott sáv méreténél. Ebben a tartományban rögtön találunk egy kis paramétert is,  $m_0\alpha \ll 1$ .

Ha a kölcsönhatást adiabatikusan kapcsoljuk be, akkor a rendszer (egy fázisfaktor erejéig) végig ugyanabban az állapotban marad, azonban a Bogoljubov-transzformáció a Hilbert-tér állapotait is elforgatja

$$\underbrace{[R(\vartheta_q) H R^\dagger(\vartheta_q)]}_{H'} \underbrace{R(\vartheta_q) |\psi_0\rangle}_{|\psi\rangle} = E_0 \underbrace{R(\vartheta_q) |\psi_0\rangle}_{|\psi\rangle} \quad (3.14)$$

szerint, ahol  $|\psi_0\rangle$  most a nem-kölcsönható bozonikus vákuumot jelöli (minden módus betöltetlen):

$$|\psi_0\rangle = \prod_q |0\rangle_q = \prod_{q>0} |0\rangle_{+q} \otimes |0\rangle_{-q}. \quad (3.15)$$

A kölcsönható alapállapot tehát  $|\psi\rangle = R(\vartheta_q) |\psi_0\rangle$  szerint határozható meg. Ha a forgatás szögét  $2\vartheta_q$ -nak választjuk, akkor a Bogoljubov-együtthatókra

$$\begin{aligned} |u_q|^2 &= \cosh^2 \vartheta_q = \frac{(Kq + \sqrt{K m_0^2 + q^2})^2}{4Kq\sqrt{K m_0^2 + q^2}} \\ |v_q|^2 &= \sinh^2 \vartheta_q = \frac{(Kq - \sqrt{K m_0^2 + q^2})^2}{4Kq\sqrt{K m_0^2 + q^2}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

adódik (egyébként  $\vartheta_q/2$  félszögek jelennek meg), amik triviálisan kielégítik a 3.4 feltételt. Mivel ezen együtthatók minden információt kódolnak az elvégzett transzformációról, ezért várhatóan az összefonódási entrópiák kifejezhetőek ezek függvényében. Ehhez azonban tanulmányoznunk kell a forgatás

$$R_1(2\vartheta_q) = e^{-iJ_2 2\vartheta_q} = e^{\vartheta_q (b_q^\dagger b_{-q}^\dagger - b_q b_{-q})} \quad (3.17)$$

operátorát, ami a Baker–Campbell–Hausdorff-formula segítségével az alábbi módon bontható fel [26, 27]:

$$e^{\vartheta_q (b_q^\dagger b_{-q}^\dagger - b_q b_{-q})} = e^{C_+ b_q^\dagger b_{-q}^\dagger} e^{C_0 J_3} e^{C_- b_q b_{-q}}, \quad (3.18)$$

ahol az exponensekben szereplő együtthatók

$$\begin{aligned} C_+ &= \tanh \vartheta_q, \\ C_0 &= -2 \ln \cosh \vartheta_q, \\ C_- &= -C_+ = -\tanh \vartheta_q. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Az így nyert 3.18 operátor vákuumállapotra való hatása

$$e^{C_+ b_q^\dagger b_{-q}^\dagger} e^{C_0 J_3} e^{C_- b_q b_{-q}} |0\rangle_q = e^{\frac{1}{2} C_0} e^{C_+ b_q^\dagger b_{-q}^\dagger} |0\rangle_q \quad (3.20)$$

szerint adható meg, ugyanis az exponenciális függvények sorba fejthetőek és a  $b_q b_{-q}$ ,  $b_q^\dagger b_{-q}^\dagger$  exponensek esetén a nulladrendű tag (egységoperátor) kivételével az összes többi definíció szerint annihilálja a vákuumot. Ezen eredmény egyetlen módusra vonatkozik, de a rendszer teljes állapotának tenzorszorzat struktúrája természetesen változatlan marad, vagyis

$$|\psi\rangle = R(\vartheta_q) |\psi_0\rangle = \prod_q e^{\frac{1}{2} C_0} e^{C_+ b_q^\dagger b_{-q}^\dagger} |0\rangle_q. \quad (3.21)$$

A keltő operátorokat tartalmazó exponenciális függvényt sorfejtve és a vákuumra hattatva, a  $(b_q^\dagger b_{-q}^\dagger)^n |0\rangle_q \equiv |n\rangle_q$  jelölés bevezetésével

$$e^{\frac{1}{2} C_0} e^{C_+ b_q^\dagger b_{-q}^\dagger} |0\rangle_q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(q) |n\rangle_q \quad (3.22)$$

adódik, ahol

$$a_n(q) \equiv e^{\frac{1}{2} C_0} C_+^n = \frac{(\tanh \vartheta_q)^n}{\cosh \vartheta_q} = \frac{1}{u_q} \left( \frac{v_q}{u_q} \right)^n. \quad (3.23)$$

Tehát egy adott módus állapota kifejthető az  $n$ -részesekés bázisban és a kifejtési együtthatók képletében a Bogoljubov-együtthatók jelennek meg. Az így kapott tiszta állapot

$$\sum_n a_n(q)^2 = \frac{1}{|u_q|^2 - |v_q|^2} = 1 \quad (3.24)$$

miatt 1-re normált és segítségével megkonstruálható a teljes rendszer

$$\rho_{L+R} = |\psi\rangle\langle\psi| = \prod_q \left( \sum_{n,m} |n\rangle_q a_n(q) a_m(q) \langle m|_q \right) \quad (3.25)$$

sűrűségoperátora, amely teljesíti a

$$\text{Tr} \rho_{L+R}^n = 1 \quad \text{és} \quad S_n(\rho_{L+R}) = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (3.26)$$

azonosságokat. Megfigyelhető azonban, hogy míg  $|n\rangle_q = |n\rangle_{+q} \otimes |n\rangle_{-q}$ , ezzel szemben  $\rho_{L+R}$  operátor 3.25 alakja nem írható fel a pozitív és a negatív módusú állapotok tenzorszorzataként. Ezért érdemes megvizsgálnunk a pozitív hullámszámú, jobbra mozgó (ún. „right mover” [20]) és a negatív hullámszámú, balra mozgó („left mover”) kvázi-részecskék összefonódását. Ehhez nincs más dolgunk, mint a

$$\rho_R = \text{Tr}_L \rho_{L+R} = \prod_{q>0} \left( \sum_m |m\rangle_{+q} a_m(q)^2 \langle m|_{+q} \right) \quad (3.27)$$

redukált sűrűségoperátor segítségével, 1.3 és 1.4 alapján kiszámítani az

$$S_n(\rho_R) = \sum_{q>0} S_n(a_m(q)^2) = \sum_{q>0} \frac{1}{1-n} \ln \left( \sum_n a_m(q)^{2n} \right) \quad (3.28)$$

Rényi-entrópiát. Az  $a_m(q)^2$  sajátértékeket a Bogoljubov-együtthetőkkel kifejezve (3.23) és az összegzést  $n$ -re elvégezve kapjuk, hogy

$$S_n(\rho_R) = S_n(\rho_L) = - \sum_{q>0} \frac{1}{1-n} \ln \left( |u_q|^{2n} - |v_q|^{2n} \right). \quad (3.29)$$

A hullámszámokra történő összegzés termodinamikai limeszben integrálra alakítható

$$S_n(\rho_R) = \frac{1}{n-1} \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty dq \ln \left( |u_q|^{2n} - |v_q|^{2n} \right) e^{-\alpha q}, \quad (3.30)$$

ahol  $L$  a rendszer méretét jelöli, tehát az összefonódási entrópiára hullámszám-térben térfogati törvény teljesül [28]. A kifejezésben szereplő integrál a felső határon divergens lenne, ennek orvoslására vezettük be az  $e^{-\alpha q}$  levágási faktort. Ezen integrál tetszőleges  $n$ -re nem végezhető el analitikusan, azonban dimenzióanalízis segítségével megfontolásokat tehetünk  $S_n(\rho_R)$  alakjára vonatkozóan. Mivel az összefonódási entrópia dimenziótlan mennyiség, ezért feltételezhetjük, hogy

$$S_n(\rho_R) \sim \frac{L}{2\pi\alpha} \cdot f_n(m_0\alpha, K) \approx \frac{L}{2\pi\alpha} \left[ \lambda_n^{(1)}(K) + m_0\alpha \cdot \lambda_n^{(2)}(K) \right], \quad (3.31)$$

ahol  $f_n$  egy univerzális függvény, amelyet az  $m_0\alpha$  kis paraméter függvényében vezetõ rendig sorba fejtvé közelíthetünk,  $\lambda_n^{(1)}$  és  $\lambda_n^{(2)}$  pedig a Luttinger-paramétertõl függõ dimenziótlan konstansok. Tehát a Rényi-entrópiák felbonthatóak egy  $m_0$ -tól függõ (és a levágás nagyságától független), valamint egy  $m_0$ -tól független (de  $\alpha$ -tól függõ) tag összegére

$$S_n(\rho_R) \sim \frac{L}{\alpha} \lambda_n^{(1)} + m_0 L \cdot \lambda_n^{(2)}. \quad (3.32)$$

Ezen megfontolások segítségével néhány speciális esetben lehetőségünk nyílik analitikus eredmények kiszámítására. Így a második Rényi-entrópia

$$S_2(\rho_R) = \frac{L}{2\pi\alpha} \ln \left( \frac{K^2 + 1}{2K} \right) + m_0 L \cdot \frac{\sqrt{K}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}} - \frac{1}{2} \right), \quad (3.33)$$

valamint az ún. single copy entanglement [29, 30], ami definíció szerint a redukált sűrűségoperátor legnagyobb sajátértékének ( $a_0(q)^2 = 1/|u_q|^2$ ) negatív logaritmus,

$$S_\infty(\rho_R) = \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty dq \ln |u_q|^2 e^{-\alpha q} = \frac{L}{2\pi\alpha} 2 \ln \left( \frac{K + 1}{2\sqrt{K}} \right) + m_0 L \cdot \frac{\sqrt{K}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K + 1}} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.34)$$

valóban 3.32 alakú.

Létezik még egy fontos, idekapcsolódó mennyiség, az ún. entanglement gap ( $\Delta$ ), ami a

$$\rho_R = \frac{1}{Z} e^{-H_{\text{ent}}}, \quad Z = \text{Tr} e^{-H_{\text{ent}}} \quad (3.35)$$

szerint definiált összefonódási (entanglement) Hamilton-operátor két legnagyobb (degenerációval együtt) sajátértékének különbsége. Ez a mennyiség esetünkben arra a módusra értelmezett, amelyre értéke minimális. A 3.27 redukált sűrűségoperátor spektrumának ismeretében

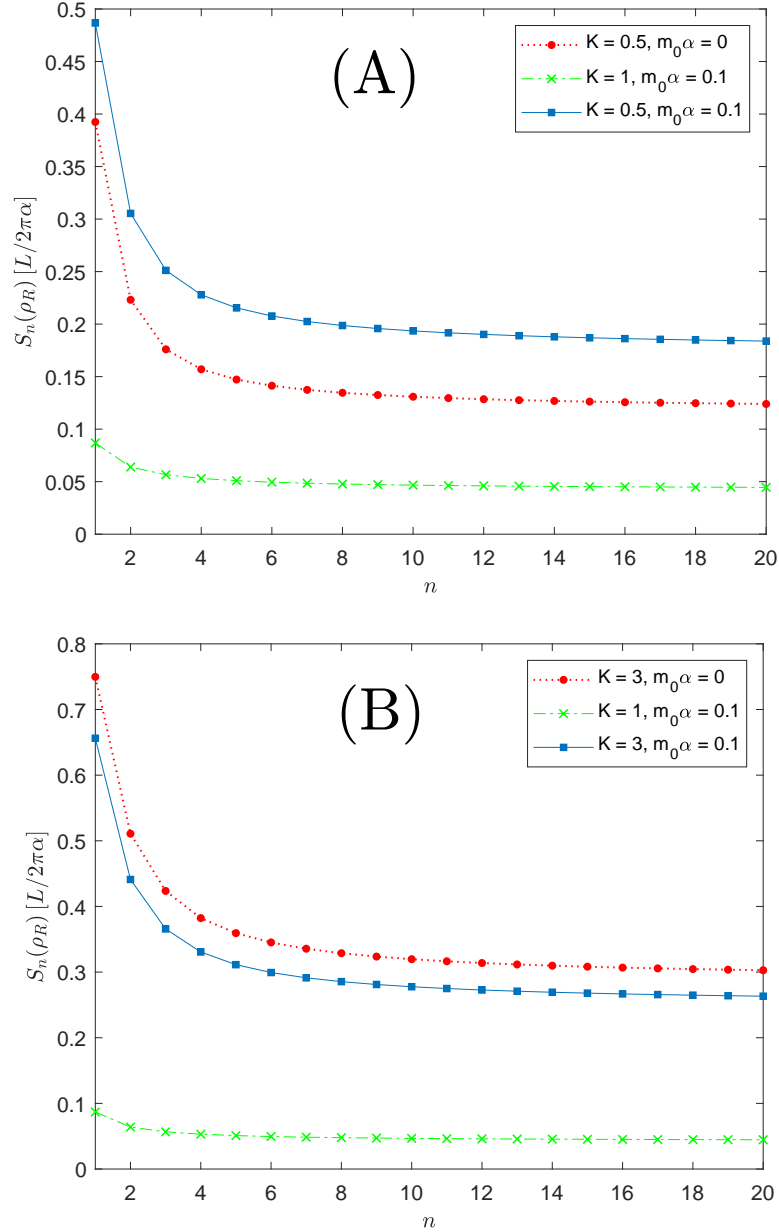
$$\Delta = \ln \frac{a_0(q)^2}{a_1(q)^2} = - \ln \frac{|v_q|^2}{|u_q|^2} = 2 \ln \frac{\sqrt{K m_0^2 + q^2} + K q}{\sqrt{K m_0^2 + q^2} - K q}. \quad (3.36)$$

Jól láthatóan  $q = 0$  esetén  $\Delta = 0$ , vagyis a tiltott sávval rendelkező rendszerünk összefonódási spektrumában nincsen gap. Ezzel szemben, ha  $m$  értékét nullának választjuk (azaz  $m_0 = 0$ ), akkor  $q$ -tól függetlenül

$$\Delta_0 = 2 \ln \frac{1 + K}{1 - K} \quad (3.37)$$

adódik, tehát a Luttinger-folyadék fázisban az összefonódási spektrumban ( $K \neq 1$  esetén) gap nyílik. Érdekes kettősség figyelhető tehát meg ezen rendszerek valódi és összefonódási spektruma között.

Numerikusan szinte bármely Rényi-entrópia könnyen számolható adott paraméterek mellett. Ez lehetőséget nyújt a 3.33 és 3.34 analitikus eredmények ellenőrzésére, illetve a többi entrópia eloszlásának feltérképezésére. A numerikus számítások eredményei a 3.1 ábrán láthatóak, melyek az említett analitikus eredményeket kielégítő pontossággal megközelítik.



**3.1. ábra.** A numerikusan számolt Rényi-entrópiák eloszlása egyensúlyban. A paraméterek értékei és a jelmagyarázat az ábrákon láthatóak ( $K = 1$  esetén 3.30 integrál levágás nélkül is konvergens.). Az (A) ábrán  $K \leq 1$ , ekkor a  $(g_2)$  kölcsönhatás taszító, a (B) ábrán pedig  $K \geq 1$ , vagyis a kölcsönhatás vonzó jellegű [20]. Megfigyelhető, hogy taszító kölcsönhatás mellett, a gap ( $m$ ) jelenléte növeli, azonban vonzó kölcsönhatás mellett csökkenti az összefonódás mértékét a rendszerben.

## 3.2. Hirtelen kvencs

A nem-egyensúlyi dinamika vizsgálatához most időfüggést tételezünk fel. Tekintsük a legegyszerűbb protokollt, amikor a 3.15 alapállapotból kiindulva  $t = 0$ -ban pillanatszerűen kapcsoljuk be az összes kölcsönhatást (ez épp az adiabatikus bekapcsolás ellentéte). Ekkor a rendszer Hamilton-operátora

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_q \left\{ \left( \tilde{\omega}_0(q, t) \frac{K(t)^{-1} + K(t)}{2} + m(q, t) \right) [2b_q^\dagger(t)b_q(t) + 1] + \left( \tilde{\omega}_0(q, t) \frac{K(t)^{-1} - K(t)}{2} + m(q, t) \right) [b_q^\dagger(t)b_{-q}^\dagger(t) + b_q(t)b_{-q}(t)] \right\}, \quad (3.38)$$

ahol az időfüggő paraméterek:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0(q, t) &= (v_F \theta(-t) + c \theta(t)) |q|, \\ K(t) &= \theta(-t) + K \theta(t), \\ m(q, t) &= \frac{m^2 \theta(t)}{2v_F |q|}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

azaz  $t = 0$ -ban  $v_F$  a renormált  $c$  Fermi-sebességre,  $K$  értéke pedig 1-ről tetszőlegesen változik és bekapcsoljuk az  $m$  tömeg tagot is. Az időfejlődést a Hamilton-operátor irányítja, Heisenberg-képben a mozgásegyenlet

$$\dot{b}_q(t) = i[H(t), b_q(t)] \quad (3.40)$$

alakú, amiből a 2.8 kanonikus kommutációs relációk segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{b}_q(t) &= -i \left[ \left( \tilde{\omega}_0(q, t) \frac{K(t)^{-1} + K(t)}{2} + m(q, t) \right) b_q(t) \right. \\ &\quad \left. + \left( \tilde{\omega}_0(q, t) \frac{K(t)^{-1} - K(t)}{2} + m(q, t) \right) b_{-q}^\dagger(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Innen  $b_{-q}^\dagger(t)$ -re egy hasonló mozgásegyenlet származtatható. Ezek megoldása során feltételezhetjük, hogy az időfüggés áthárítható az operátorok együtthatóira, vagyis az

$$\begin{pmatrix} b_q(t) \\ b_{-q}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q(t) & v_q(t) \\ v_q^*(t) & u_q^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_q \\ b_{-q}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

ansatz használható, amely formálisan teljesen azonos a 3.3 Bogoljubov-transzformációval (a forgatás generátora most  $H$ , paramétere pedig az idő), ezért jogosan feltételezhetjük, hogy a Rényi-entrópiára levezetett 3.30 eredmény most is

helytálló lesz. Tehát a továbbiakban nincs más dolgunk, mint az  $u_q(t)$  és  $v_q(t)$  együtthatók meghatározása. A fenti ansatz-ot 3.41 mozgásegyenletbe helyettesítve,  $t > 0$ -ra az együtthatókra egy elsőrendű, homogén lineáris differenciálegyenlet rendszert kapunk,

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_q(t) \\ \dot{v}_q^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \left( \tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} + K}{2} + m(q) \right) & -i \left( \tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} - K}{2} + m(q) \right) \\ i \left( \tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} - K}{2} + m(q) \right) & i \left( \tilde{\omega}_0(q) \frac{K^{-1} + K}{2} + m(q) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_q(t) \\ v_q^*(t) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

amelynek

$$u_q(0) = 1, \quad v_q(0) = 0 \quad (3.44)$$

kezdeti feltételei kielégítik a 3.4 egyenlőséget és megoldása

$$\begin{pmatrix} u_q(t) \\ v_q(t) \end{pmatrix} = A \mathbf{v}_1 e^{i\omega(q)t} + B \mathbf{v}_2 e^{-i\omega(q)t} \quad (3.45)$$

alakban kereshető, ahol  $\mathbf{v}_1$  és  $\mathbf{v}_2$  a 3.43 egyenlet mátrixának sajátvektorait jelöli, sajátértékeit pedig a korábban kiszámolt 3.12 spektrum ismeretében  $\pm i\omega(q)$ . Ezen próbafüggvény segítségével az együtthatókra az

$$\begin{aligned} u_q(t) &= \cos(\omega(q)t) - i \sin(\omega(q)t) \cosh(2\vartheta_q) \\ v_q(t) &= i \sin(\omega(q)t) \sinh(2\vartheta_q) \end{aligned} \quad (3.46)$$

megoldás adódik, ahol  $\vartheta_q$  a 3.8 Bogoljubov-forgatás szögét jelöli és 3.16 szerint adott. Innen a Rényi-entrópia kiszámításához szükséges abszolútérték négyzetek

$$\begin{aligned} |u_q(t)|^2 &= \cos^2(\omega(q)t) + \sin^2(\omega(q)t) \cosh^2(2\vartheta_q), \\ |v_q(t)|^2 &= \sin^2(\omega(q)t) \sinh^2(2\vartheta_q). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ezzel minden információnk megvan az

$$S_n(\rho_R(t)) = S_n(\rho_L(t)) = \frac{1}{n-1} \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty dq \ln \left( |u_q(t)|^{2n} - |v_q(t)|^{2n} \right) e^{-\alpha q}, \quad (3.48)$$

időfüggő összefonódási entrópiák kiszámításához. Analitikusan ezen integrál kiszámítása reménytelen feladat (minden  $n$ -re), azonban megvizsgálhatjuk rövid idejű viselkedését, periodikusságát és állandósult állapotbeli értékét. Mivel a Rényi-entrópiák viselkedése ezen tulajdonságok szempontjából megegyezik, az egyszerűség



kedvéért vizsgáljuk most az

$$S_\infty(t) \equiv S_\infty(\rho_R(t)) = S_\infty(\rho_L(t)) = \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty dq \ln |u_q(t)|^2 e^{-\alpha q} \quad (3.49)$$

single copy entanglement struktúráját, amely azért is érdekes, mert összefüggésbe hozható az 1.5 Loschmidt echo-val [31, 32]. Ennek igazolásához 3.7 és 3.22 alapján bevezetjük a következő jelöléseket

$$H \equiv \sum_q H_1(q), \quad (3.50)$$

$$e^{-iH_1(q)t} |0\rangle_q \equiv \sum_n a_n(q, t) |n\rangle_q. \quad (3.51)$$

Ezekkel a jelölésekkel a Loschmidt echo

$$\mathcal{L}(t) = |\langle \psi_0 | e^{-iHt} | \psi_0 \rangle|^2 = \prod_q |\langle 0 | e^{-iH_1(q)t} | 0 \rangle_q|^2 = \prod_q |a_0(q, t)|^2, \quad (3.52)$$

ami nem más, mint

$$\mathcal{L}(t) = \prod_q \frac{1}{|u_q(t)|^2} = e^{-\sum_q \ln |u_q(t)|^2} = \exp \left\{ -2 S_\infty(t) \right\}. \quad (3.53)$$

A  $t = 0$ -ban lejátszódó hirtelen kvencs egy fázisátalakuláson hajtja keresztül a rendszert, mivel annak gerjesztési spektrumában gap nyílik. Így az exponensben megjelenő single copy entanglement várhatóan nem lesz minden pontban analitikus, ahogyan a Loschmidt echo sem.

Rövid időkre vizsgálódva  $|u_q(t)|^2$  sorba fejthető  $t$ -ben vezető rendig

$$|u_q(t)|^2 \approx 1 + \sinh(2\vartheta_q)^2 \omega(q)^2 t^2. \quad (3.54)$$

Ezzel elvégezve a 3.49 integrálást  $K = 1$  esetén az  $S_\infty(t) \sim t$  lineáris felfutás adódik,  $m_0 = 0$  (és  $K \neq 1$ ) mellett pedig  $S_\infty(t) \sim t^2 \ln t$ . Általános esetben, amikor  $K \neq 1$  és  $m_0 \neq 0$ , az integrált numerikusan értékeltük ki és  $S_\infty(t) \sim t^2$  viselkedést találtuk.

Ezután  $S_\infty(t)$  alakja várhatóan időben periodikus lesz, hiszen 3.47 Bogoljubov-együtthetők periodikus függvényei az időnek. Az  $|u_q(t)|^2$  együtthetót jobban megvizsgálva látszik, hogy  $q \rightarrow 0$  esetén  $\cosh(2\vartheta_q)^2$  hatványfüggvény szerint divergál

$$|u_q(t)|^2 = \cos(\omega(q)t)^2 + \sin(\omega(q)t)^2 \frac{\left( (K^2 + 1)q^2 + Km_0^2 \right)^2}{4K^2q^2(Km_0^2 + q^2)}, \quad (3.55)$$

aminek logaritmusát integrálható, azonban amikor a  $q = 0$  feltétel mellett

$\sin(\omega(q)t)$  eltűnik, akkor megszünteti ezt a divergenciát. Mindez a

$$t^* = \frac{n\pi}{\omega(0)} = \frac{n\pi}{cm_0\sqrt{K}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.56)$$

pontokban lehetséges. Ekkor a logaritmus argumentumában  $\cos(\omega(0)t^*)^2 = 1$  szerepel, tehát az integrál értéke nulla lesz, ezért ezekben a pontokban éles levágásokra ( $\mathcal{L}(t)$  esetében pedig éles csúcsokra) számíthatunk. Másként megfogalmazva, az  $y = cm_0t$  dimenziótlan időskálán  $S_\infty(y)$  struktúrájában nem-analitikus viselkedés jelenik meg az

$$y_n^* = y^* n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.57)$$

pontokban, ahol  $y^* = \pi/\sqrt{K}$ . Egyértelmű tehát, hogy a kvantum kvencs során egy dinamikus fázisátalakulás játszódik le a rendszerben, ami a Loschmidt echo mellett egy termodinamikai mennyiségben, az összefonódási entrópiában is megfigyelhető. Ez teljes mértékben analóg az egyensúlyi fázisátalakulásoknál megszokott viselkedéssel, ahol a nem-analitikusság szintén az entrópiában (és a szabadenergiában) jelentkezik. Ezen tulajdonság általánosságának vizsgálata további kutatások tárgyát képezheti.

Végül vizsgáljuk meg az aszimptotikus viselkedést is. Hosszú időkre feltételezhetjük, hogy a rendszer egy állandósult állapot felé tart [33, 23]. Ezen állapot entrópiájának kiszámításához először időátlagolást végzünk

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \ln |u_q(t)|^2 = 4 \ln(e^{2\vartheta_q} + 1) - 4\vartheta_q - 4 \ln(2), \quad (3.58)$$

ahol  $T = 2\pi/\omega(q)$  a szinusz és a koszinusz függvények periódusa (3.47),  $\vartheta_q$  pedig a 3.8 Bogoljubov-forgatás szöge, majd ezután értékeljük ki az

$$S_\infty(t \rightarrow \infty) = \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty dq \left( 4 \ln(e^{2\vartheta_q} + 1) - 4\vartheta_q - 4 \ln(2) \right) e^{-\alpha q} \quad (3.59)$$

$q$  szerinti integrált, amelyre azt kapjuk, hogy

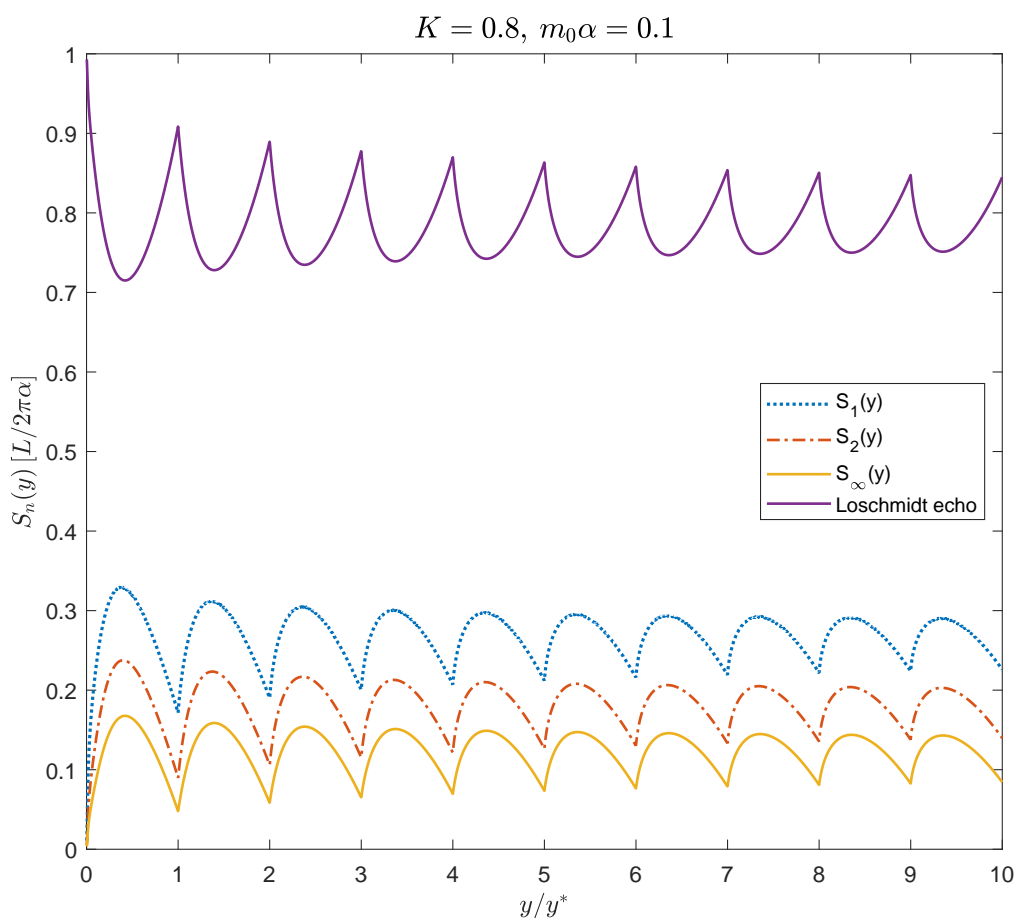
$$S_\infty(t \rightarrow \infty) = \frac{L}{2\pi\alpha} 4 \ln \left( \frac{K+1}{2\sqrt{K}} \right) + m_0 L \cdot \sqrt{K} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K+1}} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.60)$$

A kapott eredmény éppen az  $S_\infty(\rho_R)$  egyensúlyi entrópia (3.34) kétszerese. Tehát a hirtelen kvencs utáni állandósult  $\rho_R(t \rightarrow \infty)$  állapot és az egyensúlyi  $\rho_R^{\text{eq}}$  állapot single copy entanglement entrópiájának aránya

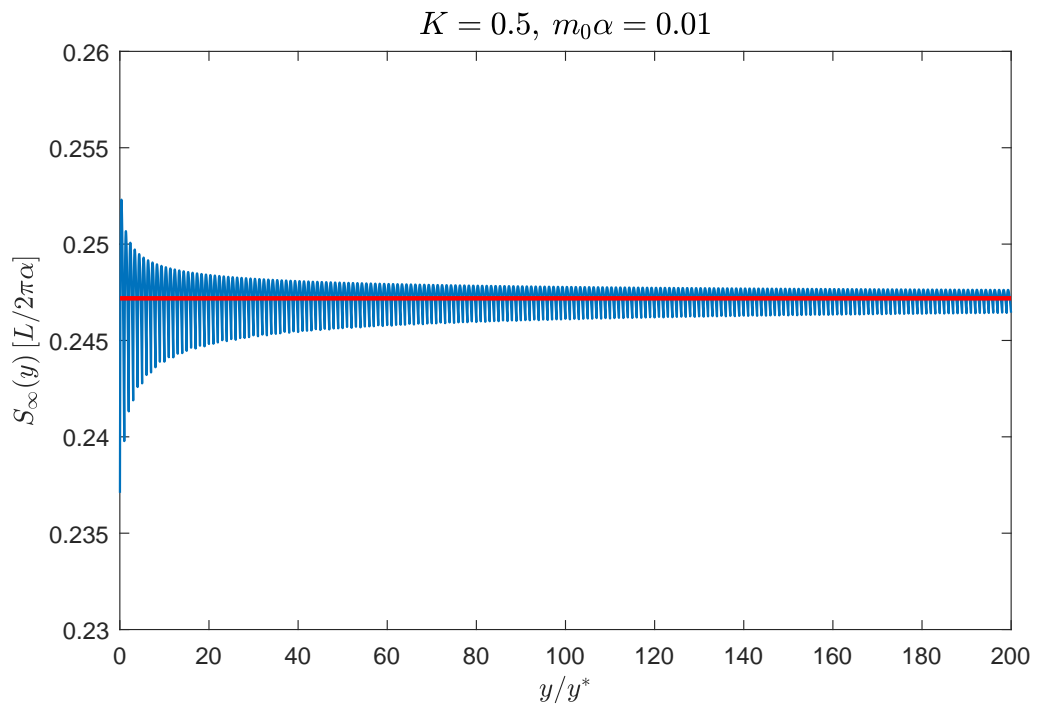
$$S_\infty^{\text{noneq.}}(t \rightarrow \infty)/S_\infty^{\text{eq.}} = 2. \quad (3.61)$$

Ezen kettes faktor az irodalomban is fellelhető [31], de eredete jelenleg még nem tisztázott. Mindenesetre azt kijelenthetjük, hogy a kvencs során entrópiaprodukció történt.

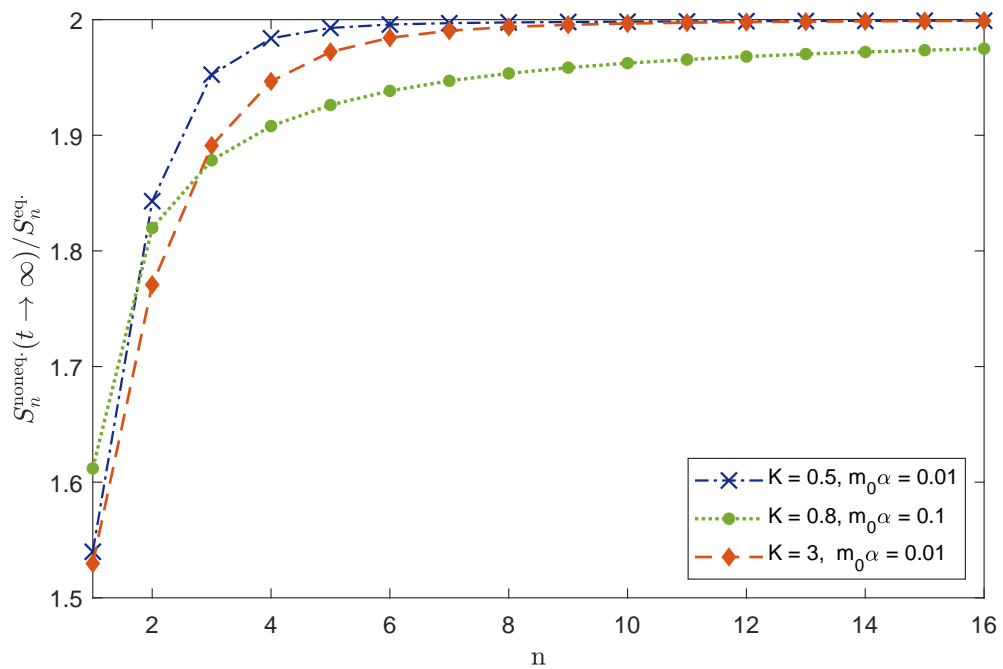
Analitikusan sikerült tehát megértenünk  $S_\infty(t)$  struktúráját, ezután érdemes lehet numerikusan is megvizsgálnunk azt, illetve a többi entrópiát is. Numerikus számításaink eredményeit a 3.2–3.4 ábrákon foglaltuk össze. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a különböző indexű Rényi-entrópiák struktúrája azonos, eltérés csak nagyságukban mutatkozik.



**3.2. ábra.** Néhány Rényi-entrópia és a Loschmidt echo a hirtelen kvencs után, a dimenziótlan idő ( $y = c m_0 t$ ) függvényében. Periodikus nem-analitikus viselkedésük jól megfigyelhető a  $y_n^*$  pontokban. A Luttinger-paraméter ( $K$ ) függvényében nem tapasztalható érdemi változás a görbék jellegét tekintve.



**3.3. ábra.** A kvencs után hosszú időskálán vizsgálva a rendszer egy (a megmaradó mennyiségek által meghatározott) állandósult állapothoz tart [23]. Ez az összefonódási entrópiában is megfigyelhető: idővel a fluktuációk lecsengenek és egy állandósult értékhez konvergál. A görbe időátlaga ( $0.2475 L/2\pi\alpha$ , az ábrán piros vonal jelöli) jó közelítéssel visszaadja [3.60](#) megegyező paraméterekkel számított értékét.



**3.4. ábra.** Entrópiaprodukción az  $n$ -index függvényében. A Rényi-entrópia az  $n$  index nem-növekvő függvénye, azonban  $n$  növelésével a relatív entrópiaprodukción (az állandósult és az egyensúlyi állapotok entrópiájának aránya) növekszik,  $n \rightarrow \infty$  esetén jól láthatóan 2-höz tart.

## 4. fejezet

# Összefoglalás

Dolgozatom első felében motiváltam az összefonódás kulcsfontosságú szerepét a kvantummechanikában, ismertettem az összefonódott állapotok fogalmát, illetve azok kvantitatív leírására szolgáló legfontosabb mennyiségeket, kihangsúlyozva azok mérhetőségét. Itt kitértem a dinamikus fázisátalakulás fogalmára is. Ezután röviden bemutattam a vizsgált sine-Gordon-modellt, annak elméleti vonatkozásait és lehetséges kísérleti realizációját.

A továbbiakban a rendszert hullámszámtérben vizsgáltam, ahol Bogoljubov-transzformáció segítségével diagonalizáltam a Hamilton-oprátort, meghatároztam a kölcsönható alapállapotot és ebből megkonstruáltam a megfelelő sűrűségoperátort. A különböző módusok összefonódásának kvantitatív jellemzésére a kvantum Rényi-entrópiákat használtam, amiket először egyensúlyban számítottam ki, majd rátértem az időfüggő dinamika tanulmányozására. Az elképzelhető legegyszerűbb időfüggő folyamatot tekintettem, amikor a kölcsönhatásokat pillanatszerűen kapcsoljuk be a nem-kölcsönható bozonikus vákuumban preparált rendszerben, azonban már ez is nem várt eredményeket hozott, ugyanis sikerült összefüggést találni két karakterisztikus mennyiség, a single copy entanglement és a Loschmidt echo között. Ezek időfüggésének részletes vizsgálata során kiderült, hogy megegyező nem-analitikus struktúrával rendelkeznek, ami egyértelműen jelzi, hogy a hirtelen kvencs egy dinamikus fázisátalakuláson hajtotta keresztül a rendszert.

Az összefonódási entrópiák tanulmányozása tehát önmagában is lehetőséget nyújt a fázisátalakulás kimutatására, amelyről az azokban megjelenő periodikus szingularitások tanúskodnak. Ezen tulajdonság univerzalitásának vizsgálata további kutatások tárgyát képezheti.

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Dóra Balázsnak az eddigi és az ez utáni közös munkát, iránymutatását, valamint rengeteg rám fordított idejét. Mindezek nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Ezt a kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal K119442 azonosítójú pályázata támogatta.

# Irodalomjegyzék

- [1] A. Aspect. „Bell’s inequality test: more ideal than ever”. *Nature*, **398** 189 (1999)
- [2] P. Calabrese and J. Cardy. „Entanglement entropy and conformal field theory”. *Journal of Physics*, **A42** 504005 (2009)
- [3] T. Nishioka, S. Ryu, and T. Takayanagi. „Holographic Entanglement Entropy: An Overview”. *Journal of Physics*, **A42** 504008 (2009)
- [4] A. Kitaev and J. Preskill. „Topological Entanglement Entropy”. *Physical Review Letters*, **96** 110404 (2006)
- [5] M. Ibáñez-Berganza, J. Rodríguez-Laguna, and G. Sierra. „Fourier-space entanglement of spin chains”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2016(5)** 053112 (2016)
- [6] R. Lundgren, J. Blair, M. Greiter, A. Läuchli, G. A. Fiete, and R. Thomale. „Momentum-Space Entanglement Spectrum of Bosons and Fermions with Interactions”. *Physical Review Letters*, **113(25)** 256404 (2014)
- [7] B. Dóra, R. Lundgren, M. Selover, and F. Pollmann. „Momentum-Space Entanglement and Loschmidt Echo in Luttinger Liquids after a Quantum Quench”. *Physical Review Letters*, **117(1)** 010603 (2016)
- [8] B. Dóra, I. Lovas, and F. Pollmann. „Distilling momentum-space entanglement in Luttinger liquids at finite temperature”. *Physical Review B*, **96(8)** 085109 (2017)
- [9] G. Ehlers, J. Sólyom, O. Legeza, and R. M. Noack. „Entanglement structure of the Hubbard model in momentum space”. *Physical Review B*, **92** 235116 (2015)
- [10] D. Das and S. Datta. „Universal Features of Left-Right Entanglement Entropy”. *Physical Review Letters*, **115** 131602 (2015)



- [11] I. Bengtsson and K. Zyczkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, (Cambridge University Press, 2006)
- [12] R. Islam, R. Ma, P. M. Preiss, M. Eric Tai, A. Lukin, M. Rispoli, and M. Greiner. „Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system”. *Nature*, **528** 77–83 (2015)
- [13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*, (Cambridge University Press, 2010)
- [14] N. M. Linke, S. Johri, C. Figgatt, K. A. Landsman, A. Y. Matsuura, and C. Monroe. „Measuring the Renyi entropy of a two-site Fermi-Hubbard model on a trapped ion quantum computer”. *arXiv:1712.08581* (2017)
- [15] M. Heyl, A. Polkovnikov, and S. Kehrein. „Dynamical Quantum Phase Transitions in the Transverse-Field Ising Model”. *Physical Review Letters*, **110** 135704 (2013)
- [16] G. Niccoli and J. Teschner. „The sine–Gordon model revisited: I”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2010(09)** P09014 (2010)
- [17] S. Mandelstam. „Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation”. *Physical Review D*, **11** 3026–3030 (1975)
- [18] D. X. Horváth and G. Takács. „Overlaps after quantum quenches in the sine-Gordon model”. *Physics Letters B*, **771** 539–545 (2017)
- [19] M. Kormos and G. Zaránd. „Quantum quenches in the sine-Gordon model: A semiclassical approach”. *Physical Review E*, **93(6)** 062101 (2016)
- [20] T. Giamarchi. *Quantum Physics in One Dimension*, (Oxford University Press, 2004)
- [21] R. Shankar. „Bosonization: How to make it work for you in condensed matter”. *Acta Physica Polonica*, **B26** 1835–1867 (1995)
- [22] T. Schweigler, V. Kasper, S. Erne, I. Mazets, B. Rauer, F. Cataldini, T. Langen, T. Gasenzer, J. Berges, and J. Schmiedmayer. „Experimental characterization of a quantum many-body system via higher-order correlations”. *Nature*, **545** 323 EP (2017)

- [23] T. Langen, S. Erne, R. Geiger, B. Rauer, T. Schweigler, M. Kuhnert, W. Rohringer, I. E. Mazets, T. Gasenzer, and J. Schmiedmayer. „Experimental observation of a generalized Gibbs ensemble”. *Science*, **348(6231)** 207–211 (2015)
- [24] A. Iucci and M. A. Cazalilla. „Quantum quench dynamics of the sine-Gordon model in some solvable limits”. *New Journal of Physics*, **12(5)** 055019 (2010)
- [25] A. I. Solomon. „Group Theory of Superfluidity”. *Journal of Mathematical Physics*, **12(3)** 390–394 (1971)
- [26] R. Gilmore. „Baker-Campbell-Hausdorff formulas”. *Journal of Mathematical Physics*, **15(12)** 2090–2092 (1974)
- [27] G. P. Agrawal and C. L. Mehta. „Ordering of the exponential of a quadratic in boson operators. II. Multimode case”. *Journal of Mathematical Physics*, **18** 408–412 (1977)
- [28] Y. O. Nakagawa, M. Watanabe, H. Fujita, and S. Sugiura. „Universality in volume-law entanglement of scrambled pure quantum states”. *Nature Communications*, **9** 1635 (2018)
- [29] I. Peschel and J. Zhao. „On single-copy entanglement”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2005(11)** P11002 (2005)
- [30] J. Eisert and M. Cramer. „Single-copy entanglement in critical quantum spin chains”. *Physical Review A*, **72(4)** 042112 (2005)
- [31] B. Dóra, F. Pollmann, J. Fortágh, and G. Zaránd. „Loschmidt Echo and the Many-Body Orthogonality Catastrophe in a Qubit-Coupled Luttinger Liquid”. *Physical Review Letters*, **111** 046402 (2013)
- [32] A. Silva. „Statistics of the Work Done on a Quantum Critical System by Quenching a Control Parameter”. *Physical Review Letters*, **101** 120603 (2008)
- [33] B. Pozsgay, E. Vernier, and M. A. Werner. „On generalized Gibbs ensembles with an infinite set of conserved charges”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **9** 093103 (2017)