

Kvantum-statisztikák és munka statisztika fermionikus nanorendszerekben

TDK Dolgozat

Grabarits András József

KONZULENS: DR. ZARÁND GERGELY

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézet, Elméleti Fizika Tanszék

2018

Önállósági nyilatkozat

Alulírott Grabarits András József a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizika MSc szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a TDK dolgozatot meg nem engedett segédeszközök nélkül, önállóan, a témavezető irányításával készítettem, és csak a megadott forrásokat használtam fel.

Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2018. 10. 27.

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés	3
2.	Az elkerült szint kereszteződések statisztikája	8
	2.1. Analitikus becslés Δ_{min} eloszlására $N = 2$ esetben	8
	2.2. Δ_{min} univerzális statisztikája tetszőleges N esetén	10
	2.3. γ meredekség statisztikája tetszőleges N esetén	13
3.	Egy részecske probléma	15
	3.1. Időfüggő Schrödinger egyenlet	15
	3.2. Schrödinger egyenlet numerikus megoldása	16
4.	Fermi tenger diffúzív kiszélesedése	18
	4.1. Analitikus formula az f_n átlagos betöltöttségekre	18
	4.2. Kiszélesedések diffúzív viselkedése és univerzalitása	20
	4.3. Diffúziós együtthatók sebesség függése, univerzalitása	23
5.	Rendezetlen, mezoszkopikus rendszerek munka statisztikája	26
	5.1. Abszorbeált energia karakterisztikus függvénye	26
	5.2. Univerzalitás	27
6.	Összefoglalás	31
\mathbf{A}	Függelék	33
	A.1. Általános időfüggő Schrödinger egyenlet átalakítása	33
	A.2. Több részecskés Schrödinger egyenlet megoldása	34
	A.3. Betöltési számok determináns formulája	35

1. fejezet Bevezetés

Dolgozatom célja rendezetlen, mezoszkopikus szemcsék munka statisztikájának, illetve mikroszkopikus dinamikájának leírása. Ilyen mezoszkopikus méretű szemcsékre a statisztikus fizikai módszerek alkalmazhatóak, a vizsgált elektronok viszont még koherensek maradnak. Munkavégzés, hőenergia és hasonló makroszkopikusan jól definiált fogalmak az atomi szinten végbe menő folyamatok eredményei, melyek kísérleti vizsgálata csupán az utóbbi évtizedekben vált lehetségessé. Azonban, mint kiderült, a kvantumrendszerek szintjén igencsak nehéz meghatározni precízen a végzett munka fogalmát[9]. A legtöbb kísérlet, mely az említett rendszerek szintjén vizsgálta a klasszikus fluktuációkat leíró elméletek érvényességét (Jarzinsky és Crooks egyenlőség) a lehető legegyszerűbb két nívós rendszert vizsgálta[9, 10]. Ezek esetében a vizsgált rendszert hőfürdő veszi körül, mellyel kezdetben termikus egyensúlyban van. A kísérletekben ilyen kezdeti feltételek mellett kezdjük gerjeszteni a rendszert, mely nem egyensúlyi folyamatokon keresztül éri el végállapotát a gerjesztést előidéző külső tér lekapcsolása után. Mivel a munkavégzés statisztikus jellegű, azaz függ gerjesztés alatt bejárt köztes állapotoktól, szükséges többször megismételni a kísérletet, hogy információt kaphassunk annak eloszlásáról. A tárgyalt kísérletekben ezt úgy valósították meg, hogy a gerjesztés által elért végállapot vagy ugyanaz mint a kiindulási állapot vagy legalább is ugyanakkora a szabadenergiája. A gerjesztés végén így kellően hosszú időt várva a rendszer termalizálódik a hőfürdővel és visszajut az eredeti kiindulási állapotba. A nanotechnológia utóbbi időben végbement robbanásszerű fejlődésének köszönhetően az ilyen munkavégzés kalorimetrikusan mérhető a hőfürdőnek leadott (hőfürdőtől elvont) energia alapján. A teljes rendszert zárt rendszernek tekintjük, így a teljes energia megmaradására alapozva kijelenthetjük, hogy a rendszer által végzett munka megegyezik a környezetben disszipálódott hővel. A legtöbb ilven feltételek mellett elvégzett kísérlet során jó közelítéssel visszakapjuk a fluktuáció elmélet alaptételeit (Jarzinsky és Crooks egyenlőség, termodinamika II. főtétele, Onsager-féle regressziós hipotézis stb.). További kísérletek azt tűzték ki célul, hogy az imént felsorolt alapelvek esetén felmerülő ellentmondásokat feloldják, melvek kvantumos szinteken léphetnek fel. Tipikusan ilven effektusok a kalorimetrikusan nem mérhető, de a vizsgált rendszerhez csatolt hőfürdő[11], illetve a mérésre használt áramkörök által bekövetkezett hőmérséklet változások[12].

A 1.1 ábrán szemlélhetjük a gerjesztés során bekövetkező kvantum átmenetet, illetve a végzett munka statisztikus eloszlását, egy Landau-Zener átmenet során. Ilyenkor két nívó a rendszer energia skálájához képest szignifikánsan közel kerülnek, majd elegendő időt várva kellően eltávolodnak egymástól. Míg a nívók közötti interakció nem elhanyagolható, a különbségük négyzetét egy másodrendű parabolával közelítjük.



1.1. ábra. a: Landau-Zener átmenet, $q \in [-0.5, 0.5]$ intervallumban változtatott kontroll paraméterrel, a nívók távolsága kezdetben E_{max} , az átmenet helyén pedig E_{min} . b: A rendszeren végzett munka eloszlása, három jól kivehető csúccsal.

A (1.1) ábrát a [9]-es cikkből vettem át. Az a ábrán egy Landau-Zener átmenet látható q kontroll paraméterrel, mely a [-0.5, 0.5] intervallumban változik. Kezdetben a nívók távolsága E_{max} , illetve az E_{min} minimumot q = 0-ban éri el, ahol P_{LZ} valószínűséggel átlép az eddig betöltetlen szintre és $1 - P_{LZ}$ valószínűséggel marad az eredeti állapotban. A b ábrán felvázoltuk, hogy mi történik, ha többször gerjesztjük a rendszert ugyanabból a kezdőállapotból. Három éles csúcs látszódik, amelyek a leadott, felvett munkát, illetve azt az esetet indikálják, mikor nem történik átmenet.

Jukka P. Pekola és munkatársai kísérletében[10] az imént vázolt 2-állapotú rendszert Cooper-pár doboz segítségével valósították meg. A kísérleti elrendezésben egy szupravezető sziget kapcsolódik egy Josephson átmenethez, illetve egy ellenálláshoz, mely a hőfürdő szerepét látja el. Az elrendezés jól modellezhető egy két állapotú rendszerrel az alapján, hogy 0 vagy 1-el több Cooper-pár van a szigeten a gerjesztés után mint a gerjesztés előtt. Az elrendezés, illetve a rendszer által végzett munka eloszlása a (1.3) ábrán látható, melyet szintén Jukka P. Pekola és munkatársai [9]-es cikkjéből vettem át.



1.2. ábra. b: Cooper-pár doboz kísérleti elrendezése. Josephson átmenet C_J kapacitással és E_J energiával, szupravezető sziget, ahol a kapu elektróda kapacitása C_g . A hőfürdő szerepét az R ellenállás játssza, illetve V_g a kapu feszültség. Az áramkör mögött a végzett munka kumulatív eloszlása látható. Az eloszlás három helyen mutat ugrást, tipikusan $\pm E_C$ energiáknál, le- illetve fölgerjesztődéseknél, ami a doboz elektrosztatikus energiájának felel meg, illetve E = 0-nál, ami a kiindulási állapotban való maradást indikálja. a: A végzett munka eloszlásának sűrűsége, az (1.1)-es ábrán mutatott három pontban a megfelelő kiszélesedett csúcsokkal.

Dolgozatomban a fentebb leírtakhoz hasonlóan külső kapu feszültséggel és mágneses térrel vezérelt mezoszkopikus, rendezetlen szemcsében végbemenő energiaváltozások statisztikáját elemzem. Vizsgálatunk során olyan sok részecskés modellt használunk, melynek energia szintjei, a rendszer kellő rendezetlensége, komplexitása következtében, véletlenszerűek. A munkavégzés számítása során nem vesszük figyelembe a külső terek hatása alatt a hőfürdővel való kölcsönhatást, illetve kiindulási állapotnak is a T = 0 limesznek megfelelő alapállapotot vesszük.



1.3. ábra. a: Mezoszkopikus szemcse, melyre kapufeszültségeket, illetve időben változó mágneses teret kapcsoltunk. b: A szemcse energiaszintjei véletlenszerűek, a külső terek változása kvantumátmeneteket generál az időfejlődés során.[13]

A következőkben, a BSc szakdolgozatomhoz hasonlóan[14] az itt tárgyalt mezoszkopikus rendszereket, véletlen mátrixok segítségével írom le , két különböző szimmetria osztály esetén (ortogonális és unitér Gauss-sokaság). A véletlen mátrix elmélet alkalmas kellően komplex, illetve rendezetlenek rendszerek leírására.

Munkám során elhanyagolom az elektronok közötti kölcsönhatást és a rendszert a

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_1 \cos \lambda(t) + \mathcal{H}_2 \sin \lambda(t)$$
(1.1)

egy részecske Hamilton operátorral jellemzem, ahol \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 a rendszer kezdő és végállapotát reprezentálják. \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 független Gauss eloszlású mátrixok, $p(\{\mathcal{H}\})_{\beta,N} \propto \propto e^{-\frac{\beta N}{4J^2} \operatorname{Tr}(\mathcal{H}^2)}$, ahol J az energia skála, N a rendszer méret, illetve $\beta = 1$ és $\beta = 2$ esetén beszélünk ortogonális (GOE), illetve unitér (GUE) Gauss-sokaságról. Az ortogonális, illetve unitér sokaság az időtükrözési szimmetriával rendelkező (\mathcal{H} valós, szimmetrikus), illetve az anélküli (\mathcal{H} komplex, hermitikus) rendezetlen rendszereket írják le. Jellegzetes tulajdonságuk, hogy a szomszédos energia szintek Δ távolságának $p(\Delta)$ valószínűségi eloszlása $\sim \Delta^{\beta}$ szerint tűnik el a $\Delta \ll J$ limeszben. Modellünkben a $\lambda(t)$ paraméter időfejlődését

$$\lambda\left(t\right) = \lambda_f \frac{t}{\tau} \tag{1.2}$$

1. FEJEZET. BEVEZETÉS

módon, lineárisnak választjuk meg. $\lambda(t)$ paraméterezi a kvencs során \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 között bejárt ívelemet.

Az (1.1) definíció alakját az motiválja, hogy ha \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 is $N \times N$ -es Gauss eloszlású véletlen mátrix, akkor minden t idő pillanatban $\mathcal{H}(t)$ is az, továbbá a felírt időfejlődés, (1.2) által leírt esetben, a véletlen mátrixok terében végzett egyenletes mozgást ír le, mely a rendezetlen szemcsére ható külső potenciálok hatását (időben egyenletesen változtatott kapu feszültség és mágneses tér) hívatott modellezni.

Az (1.1) által definiált Hamilton mátrix segítségével írjuk fel a sok részecskés rendszer Hamilton operátorát

$$\hat{H} = \sum_{i,j=1}^{N} \mathcal{H}_{ij}(t) \,\hat{c}_{i}^{\dagger} \hat{c}_{j}, \qquad (1.3)$$

ahol \hat{c}_i^+ , illetve \hat{c}_j fermionikus keltő, illetve eltüntető operátorok. Az (1.3) által bevezetett Hamilton operátorral kívánjuk vizsgálni a külső terek által indukált kvantumátmeneteket, kvantum-kvencseket. Egy M = N/2 fermionból álló kezdeti Fermi-tengerből kiindulva, vizsgáljuk az időfejlődés során bekövetkező elektron-lyuk gerjesztések, illetve az abszorbeált energia eloszlását.

Dolgozatom a következő fejezetekből épül fel: Az (1.1) egyenlettel definiált $\mathcal{H}(t)$ szomszédos energia sajátértékeinek különbségei a rendszer idő fejlődése során többször lokális Δ_{min} minimumhoz érnek, melyeket elkerült szint kereszteződésekként azonosítunk (angol: "avoided level crossing"). Ezek igen fontos szerepet játszanak a rendszer munka statisztikájának leírásában. A második fejezetben ezen kereszteződések statisztikáját vizsgálom. Először N=2 esetre analitikus becslést adok, majd N=10, 20, 50 mátrix méretekre numerikusan vizsgálom a lokális minimumok minimális Δ_{min} távolságának eloszlását. Ezt követően kitekintésként a minimum hely kicsi környezetében a szintek γ távolodási sebességének statisztikáját elemzem.

A harmadik fejezetben röviden összefoglalom a BSc szakdolgozatomban[14] vizsgált egy részecske problémát, ahol a kvantumstatisztikákat és a Pauli-elvet elhanyagolva írom fel és oldom meg az (1.1) által definiált $\mathcal{H}(t)$ Hamilton mátrix vezérelte időfüggő Schrödinger-egyenletet, illetve ismertetem az alkalmazott numerikus módszer relevánsabb pontjait.

A negyedik fejezetben a kezdeti, M = N/2 fermionból álló, Fermi tenger kiszélesedését vizsgálom. A különböző kezdeti állapotokból indított rendszer betöltési amplitudóit az egy részecske sajátállapotokban a kvencs végén az egy részecske probléma numerikus megoldása szolgáltatja. Ezek segítségével analitikusan megadhatóak a több részecskés rendszer f_n átlagos betöltési számai a kvencs végén. A paraméterek megfelelő skálázása mellett vizsgálom az f_n beöltési számok, illetve a kiszélesedés időfejlődésének univerzalitását. A fejezet végén megmutatom, hogy a kiszélesedések diffúzív viselkedést mutatnak, illetve elemzem, hogyan függ a diffúziós állandó a kvencs gyorsaságától.

Az ötödik fejezetben a kvencs során abszorbeált energia eloszlását vizsgálom. Ismét az egy részecske probléma szolgáltatta amplitudók segítségével meghatározom a karakterisztikus függvényt, melynek numerikus Fourier transzformáltja szolgáltatja a rendszer P(W) munka statisztikáját, melynek megmutatom univerzalitását.

Dolgozatomat eredményeim összefoglalásával zárom.

2. fejezet

Az elkerült szint kereszteződések statisztikája

2.1. Analitikus becslés Δ_{min} eloszlására N = 2 esetben

Az (1.1) által definiált $\mathcal{H}(t)$ szomszédos energia szintjeinek távolsága a rendszer időfejlődése során lokális minimumokhoz érnek és elkerült szint kereszteződéseket formálnak. Ebben a fejezetben ezen kereszteződések minimális Δ_{min} távolságának eloszlására adunk analitikus becslést N = 2 mátrixméret mellett, GUE mátrixsokaság esetén.

Hermitikus mátrixok esetén az (1.1)-et a

$$\mathcal{H}(\lambda) = \cos \lambda \underline{h}_1 \underline{\sigma} + \sin \lambda \underline{h}_2 \underline{\sigma} \equiv \underline{h}(\lambda) \underline{\sigma}$$
(2.1)

formában írhatjuk fel, ahol $\sigma = (\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_2, \underline{\sigma}_3)$ a 3 Pauli mátrix, amik bázist alkotnak a 2×2es hermitikus, spúrtalan mátrixok terében. \mathcal{H} statisztikus tulajdonságait $\underline{h}_{1,2}$ hordozza, melyet a

$$p\left(\{\underline{h}_{1,2}\}\right) \propto e^{-2\frac{\underline{h}_{1,2}^2}{J^2}}$$
 (2.2)

eloszlással jellemezhetünk. Ekkor a (2.1)-es mátrix 2 sajátértéke $E_{\pm} = \pm |\underline{h}(\lambda)|$, ami alapján $\Delta_{min} = 2 \min_{\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]} \{ |\underline{h}(\lambda)| \}$ összefüggéssel adható meg a jelen fejezetben tárgyalt minimális szinttávolság.

A következőkben először alulról becsüljük meg $P(\Delta_{min} < x)$ valószínűséget, majd felső becslést is adunk az $x \ll 1$ limeszben. A alsó becsléshez érdemes olyan koordináta rendszert választani, amelyben \underline{h}_1 párhuzamos a z tengellyel, illetve áttérünk $\{h_2, \theta, \varphi\}$ szférikus koordinátákra. Ekkor

$$(\underline{h}(\lambda))^2 = (h_1 \cos \lambda + h_2 \cos \theta \sin \lambda)^2 + (h_2 \sin \lambda \sin \theta)^2.$$
(2.3)

(2.3) akkor rendelkezik nem triviális minimummal, ha $\theta > \frac{\pi}{2}$. A továbbiakban ezért csak ezt az esetet vizsgáljuk. Ahhoz hogy $P(\Delta_{min} < x)$ valószínűséget alá becsülhessük, Δ_{min} értékét kell fölülről megbecsülnünk. Létezik olyan $\tilde{\lambda} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, melyre (2.3) jobb oldalának első tagja eltűnik, vagyis (2.3) jobb oldalának maradék része ezen $\tilde{\lambda}$ mellett biztosan

nagyobb mint Δ_{min} . Ezen felül (2.3) maradék tagjának vesszük $\lambda = \frac{\pi}{2}$ értéknél lévő maximumát, ahonnan $\Delta_{min} \leq \left| h\left(\tilde{\lambda} \right) \right| \leq h_2 \sin \theta$. Összességében így a

$$P\left(\Delta_{\min} < x\right) > P\left(h_2 \sin \theta < x \text{ és } \theta > \frac{\pi}{2}\right)$$
(2.4)

egyenlőtlenségre jutunk. A
(2.4) jobb oldalán álló kifejezést (2.2) sűrűség ismeretében az alábbi

$$P\left(h_{2}\sin\theta < x \text{ és } \theta > \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sim \int_{0}^{x} dh_{2}h_{2}^{2}e^{-2\frac{h_{2}^{2}}{J^{2}}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \sin\theta$$

$$+ \int_{x}^{\infty} dh_{2}h_{2}^{2}e^{-2\frac{h_{2}^{2}}{J^{2}}}\int_{\left\{\sin\theta < \frac{x}{h_{2}} \text{ és } \theta > \frac{\pi}{2}\right\}} d\theta \sin\theta$$
(2.5)

formában írhatjuk fel, ahol $x \ll 1$ határ esetben a bal oldal első tagja vezető rendben ~ x^3 nagyságrendű és ezért elhanyagoljuk, míg a második tagban bevezetve a $s = \sin \theta$ változó cserét, a ~ $x^2 \int_x^{\infty} dh_2 e^{-2\frac{h_2^2}{J^2}} \sim x^2$ eredményre jutunk a $x \ll 1$ határesetben.

Annak érdekében, hogy precízen belássuk, hogy a $x \ll 1$ limeszben $\frac{dP(\Delta_{min} < x)}{dx} \sim x$, felső becsléssel is szolgálunk, amihez alulról kell megbecsülnünk Δ_{min} értékét. Ha (2.3) jobb oldalán álló első tagot elhagyjuk, illetve a maradék tagot vesszük a $\Delta_{min} = 2 |\underline{h} (\lambda^*)|$ által definiált λ^* helyen,

$$\Delta_{\min} > h_2 \sin \theta \sin \lambda^* \tag{2.6}$$

alsó becslést kapunk. Ennek segítségével az alsó becsléssel analóg módon a

$$P\left(\Delta_{\min} < x\right) < 2P\left(h_2 \sin\theta \sin\lambda^* < x \text{ és } \theta > \frac{\pi}{2}\right) \sim x^2 \int_{\frac{x}{\sin\lambda^*}}^{\infty} dh_2 e^{-2\frac{h_2^2}{J^2}} \sim x^2 \qquad (2.7)$$

módon becsülhetjük fölülről a kérdéses valószínűséget, ahol a 2-es faktor figyelembe veszi a $\{\theta > \frac{\pi}{2}\}$ megszorítást.

(2.7) és (2.5) vezető rendbeli kiértékelésével tehát beláttuk, hogy az $x \ll 1$ limeszben, N = 2 esetén $P(\Delta_{min} < x) \sim x^2$, amiből következik, hogy

$$f(x) = \frac{dP(\Delta_{\min} < x)}{dx} \sim x, \ x \ll 1 \text{ limeszben}$$
(2.8)

A fentiekkel analóg módon GOE sokaság esetén a $(\underline{\sigma}_1, \underline{\sigma}_3)$ valós Pauli mátrixokat tartalmazó vektorral írjuk fel (2.1)-et. Továbbá most \underline{h}_1 -et az x tengellyel párhuzamosan vesszük és áttérünk 2 dimenziós (h_2, φ) polár koordinátákra. Ebben az esetben (2.1) akkor rendelkezik nem triviális lokális minimummal, ha $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$. Ezek ismeretében a (2.4) és (2.7)-hez hasonlóan becsülhető fölé és alá a kérdéses eloszlás. Végeredményben az $x \ll 1$ limeszben a

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}P\left(\Delta_{\min} < x\right)}{\mathrm{d}x} \sim \text{const.}$$
(2.9)

karakterisztikát kapjuk.

2.2. Δ_{min} univerzális statisztikája tetszőleges N esetén

Ebben a fejezetben az (1.1)-es $\mathcal{H}(t)$ mátrix energia spektrumának közepén és felső negyedénél vizsgáljuk az elkerült szint kereszteződések statisztikáját numerikusan, tetszőleges N mátrix méret mellett. Majd Δ_{min} megfelelő skálázása mellett megmutatjuk annak univerzalitását, azaz az N rendszer mérettől, illetve E energiától való függetlenségét, $N \gg 1$ esetén.

 Δ_{min} statisztikájának ismeretéhez szükséges megvizsgálni az elkerült szint kereszteződések átlagos számát a $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ívelem bejárása alatt. Ehhez két kiválasztott szomszédos nívó távolságát vizsgáltuk λ függvényében, rögzített \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 mellett. Leszámoltuk a lokális minimumokat, illetve átlagoltunk \mathcal{H}_1 -re és \mathcal{H}_2 -re. Ahogy a (2.1)es ábrán láthatjuk, N mátrix méret és E = 0 energia mellett numerikusan $\sim 0.32\sqrt{N}$, illetve $\sim 0.39\sqrt{N}$ karakterisztikát kaptunk a kereszteződések átlagos számára, GUE, illetve GOE sokaság esetén.



2.1. ábra. Elkerült szint kereszteződések száma N mátrixméret függvényében, GUE és GOE sokaság esetén, E=0 energiánál. Numerikus eredmény alapján $N_{cross}^{GUE}=0.32\sqrt{N}$ és $N_{cross}^{GOE}==0.39\sqrt{N}$ összhangban azzal, hogy a kereszteződések száma arányos a véletlen mátrixok terében megtett úttal.

A Δ_{min} minimális szinttávolság vizsgálata során numerikusan megkerestük $\Delta(\lambda)$ lokális minimumait az $\frac{N}{2}$ és $\frac{N}{2}$ +1-edik (spektrum közepe), illetve az $\lfloor \frac{3N}{4} \rfloor$ -edik és $\lfloor \frac{3N}{4} \rfloor$ + +1-edik (spektrum felső negyede) szintek között, és a λ_0 minimum hely kis környezetében a

$$\Delta\left(\lambda\right) = \sqrt{\Delta_{\min}^2 + \gamma^2 \left(\lambda - \lambda_0\right)^2} \tag{2.10}$$

függvényt illesztettük, ahol γ a szintek távolodásának kezdeti sebessége, melynek statisztikájával a következő, 2.3-as fejezetben foglalkozunk röviden.

2. FEJEZET. AZ ELKERÜLT SZINT KERESZTEZŐDÉSEK STATISZTIKÁJA 11

A következőkben megadjuk azt az univerzális $f^{\beta}(x)$ függvényt, mely csak a rendszert leíró sokaságtól függ és N mátrix mérettől, illetve E energiától függetlenül jellemzi Δ_{min} eloszlását. A véletlen mátrixok terében megtett utat[2]

$$\mathrm{d}s^2 = \left\langle \mathrm{Tr} \left(\mathrm{d}\mathcal{H} \mathrm{d}\mathcal{H}^+ \right) \right\rangle_{RM} \tag{2.11}$$

módon definiáljuk, ahol $\langle ... \rangle_{RM}$ a mátrixsokaságra való átlagot jelöli. Ennek ismeretében bevezetjük az $n_{\Delta} [\Delta, \Delta + d\Delta; s, s + ds]$ jelölést a $[\Delta, \Delta + d\Delta; s, s + ds]$ intervallumba eső kereszteződések számára, illetve az ehhez tartozó általános $\rho_{\Delta} (E, N, \Delta, s)$ sűrűséget,

$$n_{\Delta} \left[\Delta, \Delta + \mathrm{d}\Delta; s, s + \mathrm{d}s \right] = \mathrm{d}\Delta \mathrm{d}s \rho_{\Delta} \left(E, N, \Delta, s \right).$$

$$(2.12)$$

Első észrevételként kimondhatjuk, hogy ρ_{Δ} nem függhet *s*-től, hiszen minden *s*-nél ugyanaz a sokaság írja le $\mathcal{H}(\lambda)$ -t. Kihasználva azt, hogy $\langle \mathcal{H}_{ij} \rangle_{RM} = 0$ és $\langle |\mathcal{H}_{ij}|^2 \rangle_{RM} \sim \frac{J^2}{N}$, illetve (1.1)-et deriválva, (2.10)-ből kapjuk, hogy

$$\mathrm{d}s^2 \cong J^2 N \mathrm{d}\lambda^2. \tag{2.13}$$

E szerint s az s=0és $s=\frac{\pi}{2}\sqrt{N}J$ értékek között változik, azaz $\lambda\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban található elkerült kereszteződések száma

$$N_{cross}\left[\Delta, \Delta + \mathrm{d}\Delta\right] = \mathrm{d}\Delta \frac{\pi}{2} \sqrt{N} J \rho_{\Delta}\left(E, N, \Delta\right)$$
(2.14)

formában írható fel. Mivel (2.13) jobb oldalának dimenziótlannak kell lennie, bevezetjük a

$$\tilde{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J}, N, \frac{\Delta}{J}\right) = J^2 \rho_{\Delta}\left(E, N, \Delta\right) \tag{2.15}$$

módon definiált $\tilde{\rho}_{\Delta}$ dimenziótlan sűrűséget, mely csak dimenziótlan változóktól függhet.

A vizsgált Δ_{min} minimális szinttávolság természetes skálázására érdemes bevezetni a dimenziótlan

$$\tilde{\Delta} = \Delta_{min} \rho_E = \frac{\Delta_{min}}{\Delta_E} \tag{2.16}$$

mennyiséget, ahol $\rho_E = \frac{N}{2\pi J} \sqrt{4 - \frac{E^2}{J^2}}$ a Wigner félkör állapotsűrűség *E* energia esetén, illetve Δ_E az átlagos szinttávolság *E* energián. (2.15) segítségével átírhatjuk (2.14)-et

$$N_{cross}\left[\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta} + \mathrm{d}\tilde{\Delta}\right] = \mathrm{d}\tilde{\Delta}\sqrt{N}\hat{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J}, N, \tilde{\Delta}\right),\tag{2.17}$$

ahol $\hat{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J}, N, \tilde{\Delta}\right) = \Delta_E \frac{\pi}{2} \tilde{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J}, N, \frac{\Delta}{J}\right)$. A fejezet elején megmutattuk, hogy $N_{cross} \sim \sqrt{N}$, ezért $\hat{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J}, N, \tilde{\Delta}\right)$ vezető rendben nem függhet expliciten az N mátrix mérettől. Numerikus vizsgálataink azt mutatják továbbá, hogy $\tilde{\rho}_{\Delta}$ faktorizálódik a változóiban.

$$\hat{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J},\tilde{\Delta}\right) = \mathcal{C}\left(\frac{E}{J}\right)f^{\beta}\left(\tilde{\Delta}\right),\tag{2.18}$$

ahol $\mathcal{C}\left(\frac{E}{J}\right) = \frac{C_{\beta}}{\sqrt{4 - \frac{E^2}{J^2}}}$, ahol C_{β} -t úgy választjuk meg, hogy $f^{\beta}\left(\tilde{\Delta}\right)$ normált legyen.

A (2.2)-es ábra $f^{\beta}\left(\tilde{\Delta}\right) = \hat{\rho}_{\Delta}\left(\frac{E}{J},\tilde{\Delta}\right) / \mathcal{C}\left(\frac{E}{J}\right)$ -t mutatja különféle mátrixméretek és energiák mellett, GOE és GUE sokaság esetén.



2.2. ábra. $\tilde{\Delta}$ eloszlása N=10,20,50 mátrixméretek esetén és $\frac{E}{J}=0$, illetve $\frac{E}{J}=1$ energián. $\tilde{\Delta}=\frac{\Delta_{min}}{\Delta_E}$ skálázás mellett mind a 6 görbe egybeesik, E energiától és N mátrixmérettől függetlenül. Az N=2 esetben analitikusan becsült eredménnyel összhangban $f^{GUE}(\tilde{\Delta}) \sim \tilde{\Delta}$, míg GOE esetben $f^{GOE}(\tilde{\Delta}) \sim const.$ szerint változik a $\tilde{\Delta} \ll 1$ limeszben. A numerikus szimuláció során 20000 véletlen mátrixra átlagoltunk, illetve a λ paraméter értékét a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumban változtattuk.

 Δ_{min} statisztikáját a következőképpen határoztam meg:

- d $\lambda = 0.02 \frac{\pi}{2}$ felosztással megkerestem $\Delta(\lambda) \lambda_0$ minimum helyeit a $\Delta_E < 0.8$ feltétel mellett.
- Az előző lépés során megtalált lokális minimum $[\lambda_0 d\lambda, \lambda_0 + d\lambda]$ környezetében 0.1 $d\lambda$ nagyságú felosztással pontosítottam a minimumhely értékét, majd az így talált minimumhely környezetében 0.01 $d\lambda$ felosztással még pontosabban meghatároztam λ_0 helyét.
- $-\lambda_0 \ 0.0002\frac{\pi}{2}$ pontosságig ismert értéke mellett diagonalizáltam $\mathcal{H}(\lambda_0)$ -át és meghatároztam Δ_{min} értékét.
- A $f^{GUE}\left(\tilde{\Delta}\right)$ függvény Wilkinson és munkatársai eredményeivel összhangban lineárisan

indul, míg $f^{GOE}\left(\tilde{\Delta}\right)$ konstans értékhez tart GOE esetén. [3, 8]

2.3. γ meredekség statisztikája tetszőleges N esetén

Ebben a fejezetben a 2.2-es fejezettel analóg módon az elkerült szint kereszteződések kicsi környezetében az (2.10)-es egyenlettel leírt illesztéssel kapott γ meredekség statisztikáját és annak univerzalitását vizsgáljuk numerikusan az energia spektrum közepén, N = 10,20,50 mátrixméretek esetén.

(2.12) mintájára bevezetjük az

$$n_{\gamma} \left[\gamma, \gamma + \mathrm{d}\gamma; s, s + \mathrm{d}s \right] = \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}s\rho_{\gamma} \left(E, N, \gamma, s \right) \tag{2.19}$$

egyenlet által definiált $n_{\gamma} [\gamma, \gamma + d\gamma; s, s + ds]$ függvényt, mely megadja a $[\gamma, \gamma + d\gamma; s, s + ds]$ intervallumba eső kereszteződések számát, illetve az ehhez tartozó $\rho_{\gamma} (E, N, \gamma, s)$ sűrűséget. Az előző fejezet indoklása alapján ρ_{γ} nem függhet s-től, ami az

$$N_{cross}\left[\gamma,\gamma+\mathrm{d}\gamma\right] = \mathrm{d}\gamma\frac{\pi}{2}\sqrt{N}J\rho_{\gamma}\left(E,N,\gamma\right)$$
(2.20)

összefüggésre vezet, majd bevezetjük ismét a $\tilde{\rho}_{\gamma}\left(\frac{E}{J}, N, \frac{\gamma}{J}\right) = J^2 \rho_{\gamma}\left(E, N, \gamma\right)$ dimenziótlan sűrűséget.

A szintek távolodási meredekségére most a

$$\tilde{\gamma} = \gamma \rho_E \pi = \frac{\gamma \sqrt{N}}{2J} \sqrt{4 - \frac{E^2}{J^2}}$$
(2.21)

természetes skálázást vezetjük be, majd a kereszteződések átlagos számának ismeretében

$$N_{cross}\left[\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} + \mathrm{d}\tilde{\gamma}\right] = \mathrm{d}\tilde{\gamma}\sqrt{N}\hat{\rho}_{\gamma}\left(\frac{E}{J}, N, \tilde{\gamma}\right)$$
(2.22)

alakban írhatjuk át a kiindulási (2.19)-es egyenletet. Az előző alfejezethez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$N_{cross}\left[\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} + \mathrm{d}\tilde{\gamma}\right] \equiv \mathrm{d}\tilde{\gamma}\sqrt{N}\mathcal{C}\left(\frac{E}{J}\right)g^{\beta}\left(\tilde{\gamma}\right), \qquad (2.23)$$

ahol $g^{\beta}(\tilde{\gamma})$ már független mind N-től, mind E-től. A γ meredekségeket a 2.2-es fejezet numerikus lépéseinek elvégzése után a következőképpen határoztuk meg: A 2.2-es fejezet végén $d\lambda = 0.0002\frac{\pi}{2}$ pontossággal megtalált minimumhelyek (λ_0) és minimum szinttávolságok (Δ_{min}) ismeretében (2.1) négyzetére, mint egy ismeretlenes lineáris problémára alkalmazzuk a legkisebb négyzetek módszerét. $g^{\beta}(\tilde{\gamma})$ eltérően $f^{\beta}(\tilde{\Delta})$ -tól jól meghatározott csúcsot mutat $\gamma \approx 3$ környékén. Továbbá a numerikusan meghatározott eloszlás, összhangban Wilkinson és munkatársai eredményeivel, jó közelítéssel, GUE sokaság esetén ~ $\tilde{\gamma}^3$, míg GOE esetén ~ $\tilde{\gamma}^2$ szerint változik a $\tilde{\gamma} \ll 1$ határesetben.[3, 8]



2.3. ábra. $\tilde{\gamma}$ eloszlás
aN=10,20,50mátrix méretek mellett, GUE és GOE sokaság esetén, az energia spektrum közepén
,E=0.A numerikus szimuláció során 20000 véletlen mátrixra átlagoltunk, illetve
a λ paraméter értékét a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban változtat
tuk.

3. fejezet

Egy részecske probléma

3.1. Időfüggő Schrödinger egyenlet

Annak érdekében, hogy a véletlen mátrix elmélet segítségével vizsgálhassuk a sokrészecskés, nem kölcsönható elektronok munka statisztikáját, első lépésként az egy részecske dinamikát kell elemeznünk, mely eredményeivel fel tudjuk építeni a sok- részecskés elméletet. BSc szakdolgozatom[14] fő részében ezen egy részecske dinamikát és annak tulajdonságait vizsgáltam részletesen. Ez az alfejezet ezeket a korábbi eredményeimet foglalja össze.

A következőkben a (1.1)-es egyenlet által definiált időben változó $\mathcal{H}(t)$ vezérelte rendszer egy részecske Schrödinger - egyenletet vizsgáljuk. Majd ennek ismeretében perturbatív kifejtés segítségével megadjuk a végső { $\alpha_i(\tau)$ } betöltési amplitudókat leíró differenciálegyenletet a $\lambda = \lambda_f$ érték mellett $\mathcal{H}(\lambda_f)$ bázisában.

A pillanatnyi bázis módszer szerint minden t időpillanatban diagonalizáljuk a rendszert leíró $\mathcal{H}(\lambda(t))$ egy részecskés Hamilton mátrixot, azaz minden időpillanatban megoldjuk a

$$\mathcal{H}(\lambda(t)) |\theta^{m}(\lambda(t))\rangle = \epsilon_{m}(\lambda(t)) |\theta^{m}(\lambda(t))\rangle$$
(3.1)

sajátérték egyenletet, ahol { $|\theta^m(\lambda(t))\rangle$, m = 1, 2, ..., N} $\mathcal{H}(\lambda(t))$ pillanatnyi sajátvektorai, illetve { $\epsilon_m(\lambda(t)), m = 1, 2, ..., N$ } a megfelelő sajátértékek halmaza. Ez a pillanatnyi bázis különbözik a $|\varphi^m(t)\rangle$ időfejlesztett bázistól, melyet a t = 0 pillanatbeli $|\theta^m(0)\rangle$, bázisból a Schrödinger-egyenlet megoldásával származtatunk. Célunk tehát

$$\left|\varphi^{m}\left(t\right)\right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k}^{m}\left(t\right) e^{-i\Phi_{k}\left(t\right)} \left|\theta^{k}\left(\lambda\left(t\right)\right)\right\rangle$$
(3.2)

kifejtési együtthatóinak meghatározása, ahol $\alpha_k^m(0) = \delta_k^m$, illetve ahol $\Phi_k(t) = \int_0^t dt' \epsilon_k(t')$ a dinamikai fázis.

A (3.2)-ben definiált állapotra felírva az időfüggő Schrödinger-egyenletet és azt jobbról beszorozva $\langle \theta^l(\lambda(t)) |$ pillanatnyi bázisvektorral, a

$$\dot{\alpha}_{l}^{m}(t) = -\dot{\lambda}(t) e^{i(\Phi_{l}(t) - \Phi_{k}(t))} \left\langle \theta^{l}(\lambda) \left| \frac{\partial \theta^{k}(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle \alpha_{k}^{m}(t) \right\rangle$$
(3.3)

pillanatnyi betöltési amplitudókra felírt differenciálegyenlet rendszerre jutunk, ahol az egyszerűség kedvéért elhagyjuk λ implicit időfüggését. A (A.1)-es függelékben megmutatjuk, hogy a (3.3)-as egyenlet a jobb oldalon álló belső szorzat perturbatív kifejtésével, illetve $\mathcal{H}(\lambda(t))$ alakját kihasználva a numerikusan könnyebben kezelhető,

$$\dot{\alpha}_{l}^{m}(t) = \frac{\dot{\lambda}}{\cos\lambda} \sum_{k\neq l}^{N} e^{i(\Phi_{l}(t) - \Phi_{k}(t))} e^{i(\mathcal{A}_{l}(\lambda) - \mathcal{A}_{k}(\lambda))} \frac{\left\langle \theta^{l}(\lambda) | \mathcal{H}_{2} | \theta^{k}(\lambda) \right\rangle}{\epsilon_{l}(\lambda) - \epsilon_{k}(\lambda)} \alpha_{k}^{m}(t)$$
(3.4)

alakra hozható, ahol $\mathcal{A}_{l}(\lambda) = -i \left\langle \theta^{l}(\lambda) \left| \frac{\partial \theta^{l}(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle$ a Berry-konnekció.

(3.4) numerikus implementálásához bevezetjük $\mathcal{H}(\lambda)$ által leírt rendszer releváns fizikai mennyiségeinek egységeit, illetve skálafaktorait. Először is bevezetjük a véletlen mátrixok terében megtett út és az eltelt idő esetében a

$$\tilde{s} = \frac{s}{J} \tag{3.5}$$

$$\tilde{t} = t\Delta_0 \tag{3.6}$$

változókat, ahol $\Delta_0 = \frac{\pi J}{N}$ az átlagos szinttávolság N mátrix méret mellett és E = 0 energián, illetve J a korábbi módon definiált energia egység. (3.5) segítségével bevezetjük a véletlen mátrixok terében való mozgás dimenziótlan \tilde{v} sebességét is az alábbi módon

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \tilde{v} = \frac{d\tilde{s}}{d\tilde{t}} = \frac{v}{\Delta_0 J}.$$
(3.7)

Mivel jelen dolgozat célkitűzése univerzális tulajdonságok vizsgálata, különböző N rendszer méretek mellett fix \tilde{v} és \tilde{s}_{tot} sokaságban megtett út esetén vizsgáljuk a kvencseket. Mivel $\tilde{s}_{tot} = \int_{\lambda(0)}^{\lambda(\tau)} \frac{d\tilde{s}}{d\lambda} d\lambda = \sqrt{N+1}$ (GOE sokaság esetén), ezért a $\lambda_f \equiv \pi \frac{1.658}{\sqrt{N+1}}$ választással élünk a továbbiakban, azaz $\tilde{s}_{tot} = 5.209$ -et rögzítjük. A bevezetett skálák segítségével a

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{s}_{tot}}{\tilde{v}} \tag{3.8}$$

lineáris összefüggés adható a sokaságban megtett út, sebesség és eltelt idő dimenziótlan megfelelőire.

3.2. Schrödinger egyenlet numerikus megoldása

A (3.2)-es alfejezetben röviden ismertetjük a (3.4)-es egyenlet numerikus megoldási módszerét. A differenciálegyenlet megoldását az ~ $o(\Delta t^4)$ pontosságú negyed rendű Runge-Kutta módszer segítségével készítettük el, melyet a

$$\underline{\dot{\alpha}}(t_i) = f(t_i, \underline{\alpha}(t_i)) \tag{3.9}$$

$$\underline{k}_{1} = \underline{f}\left(t_{i}, \underline{\alpha}\left(t_{i}\right)\right) \tag{3.10}$$

$$\underline{k}_{2} = \underline{f}\left(t_{i} + \frac{\Delta t}{2}, \underline{\alpha}\left(t_{i}\right) + \frac{\Delta t}{2}\underline{k}_{1}\right) \tag{3.11}$$

$$\underline{k}_{3} = \underline{f}\left(t_{i} + \frac{\Delta t}{2}, \underline{\alpha}\left(t_{i}\right) + \frac{\Delta t}{2}\underline{k}_{2}\right)$$

$$(3.12)$$

$$\underline{k}_{4} = \underline{f}\left(t_{i} + \Delta t, \underline{\alpha}\left(t_{i}\right) + \Delta t\underline{k}_{1}\right)$$

$$(3.13)$$

$$\underline{\alpha}\left(t_{i}+\Delta t\right) = \underline{\alpha}\left(t_{i}\right) + \frac{\Delta t}{6}\left(\underline{k}_{1}+2\underline{k}_{2}+2\underline{k}_{3}+\underline{k}_{4}\right) + o\left(\Delta t^{4}\right).$$
(3.14)

egyenletek definiálnak, ahol Δt az alkalmazott időlépés, t_i az i. időpillanat, $\underline{\alpha}(t_i)$ a i. időpillanatbeli pillanatnyi bázisban a kifejtési együtthatókat tartalmazó oszlopvektor, illetve $f_k(t_i, \underline{\alpha}(t_i)) = \frac{\dot{\lambda}}{\cos \lambda_i} \sum_{k \neq l}^{N} e^{i(\Phi_l(t_i) - \Phi_k(t_i))} \frac{\langle \theta^l(\lambda_i) | \mathcal{H}_2 | \theta^k(\lambda_i) \rangle}{\epsilon_k(\lambda_i) - \epsilon_l(\lambda_i)} \alpha_k^m(t_i)$, ahol $\lambda_i \equiv \lambda(t_i)$. Ezen felül a $\Phi_k(t)$ dinamikai fázisokat a ~ $o(\Delta t^3)$ pontosságú Simpson integrálformula segítségével minden Δt nagyságú intervallum esetén a

$$\int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \mathrm{d}t' \epsilon_k\left(t'\right) = \frac{\Delta t}{6} \left(\epsilon_k\left(t_i\right) + \epsilon_k\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) + \epsilon_k\left(t_i + \Delta t\right)\right) + o\left(\Delta t^4\right), \quad (3.15)$$

képlet segítségével számítottuk ki, majd ezt hozzáadtuk a korábbi intervallumokra kiszámolt integrálok összegéhez.

Tipikusan az ehhez hasonló differenciálegyenletek numerikus megoldása során a legtöbb numerikus program (esetünkben C++) a hullámfüggvény gyorsabb megváltozásainál gyakran megváltoztatja a pillanatnyi bázisvektorok aktuális értékét egy -1 faktorral, mely így teljesen hibás végeredményre vezet. A hullámfüggvény fázisának minden *i*. időpillanatban való újradefiniálása egyrészt megoldja az említett problémát, másrészt megfelelő fázisrögzítés mellett kiejthetőek a (3.1)-es fejezetben említett $\mathcal{A}_l(t)$ Berry-fázisok $o(\Delta t^2)$ rendig. Esetünkben a

$$\left|\tilde{\theta}^{m}\left(t+\Delta t\right)\right\rangle = \frac{\left\langle\theta^{m}\left(t+\Delta t\right)\left|\tilde{\theta}^{m}\left(t\right)\right\rangle}{\left|\left\langle\theta^{m}\left(t+\Delta t\right)\left|\tilde{\theta}^{m}\left(t\right)\right\rangle\right|}\right|\theta^{m}\left(t+\Delta t\right)\right\rangle}$$
(3.16)

fázis rögzítést alkalmaztuk a vizsgált bázisvektor egy Δt időpillanattal korábbi értéke alapján, kezdeti feltételnek véve a $t_1 = 0$ időpillanatbeli { $\theta^m(t_1)$ } bázist.

4. fejezet

Fermi tenger diffúzív kiszélesedése

4.1. Analitikus formula az f_n átlagos betöltöttségekre

Mielőtt jelen dolgozat fő problémájára, a rendszeren végzett munka eloszlására fordítjuk figyelmünket, megvizsgáljuk, hogy a kezdeti ideális Fermi-tenger miként szélesedik ki a kvencs során. A (3.3)-as egy részecske egyenlet numerikus megoldása szolgáltatta amplitudók segítségével kiszámítjuk a pillanatnyi $|\theta^n(t)\rangle$ egy részecskés sajátállapotok $f_n(t)$ átlagos betöltési számait különböző, reprezentatív $t \in [0, \tau]$ időpillanatokban. A kiindulási állapot a \mathcal{H}_1 kezdeti Hamilton mátrix alapállapota, melyet a

$$f_n(0) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \text{ ha } n \le M\\ 0, \text{ ha } n \ge M \end{array} \right\}$$

$$(4.1)$$

kezdeti betöltési számokkal írhatunk fel. Először megmutatjuk, hogy ekkor a sok-részecskés Schrödinger-egyenlet megoldása a

$$|\Psi\left(t\right)\rangle = \prod_{m=1}^{M} \hat{c}_{m,t}^{+} \left|0\right\rangle \tag{4.2}$$

hullámfüggvény, ahol $\hat{c}_{m,t}^+ |0\rangle = |\varphi^m(t)\rangle$, a (3.2)-ben definiált időfejleszett bázisvektor, $\hat{c}_{m,t}^+$, pedig az időtől impliciten függő fermionikus keltő operátor. Célunk a

$$\hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle = i\partial_t |\Psi(t)\rangle \tag{4.3}$$

egyenlőség igazolása, ahol $\hat{H}(t)$ a (1.3) által definiált sok-részecskés Hamilton operátor. Az egyenlet mindkét oldalát felírva $\hat{c}_{m,t}^+$ keltő operátorokkal, hattatva a jobb oldalra az idő szerinti deriválást, illetve kihasználva, hogy $\hat{H}\hat{c}_{m,t}^+|0\rangle = \left[\hat{H}, \hat{c}_{m,t}^+\right]|0\rangle$, a $\frac{1}{i}\left[\hat{H}, \hat{c}_{m,t}^+\right] = \hat{c}_{m,t}^+$ alakra jutunk, melyet a (A.2) függelékben bizonyítunk be.

4. FEJEZET. FERMI TENGER DIFFÚZÍV KISZÉLESEDÉSE

Ezt követően (3.2) alapján $\hat{c}_{m,t}^{+}$ operátorokat $\mathcal{H}(t)$ Hamilton mátrix $|\theta^{k}(t)\rangle$ pillanatnyi bázisához tartozó $\hat{b}_{k}^{+}(t)$ keltő operátorok segítségével

$$\hat{c}_{m,t}^{+} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k}^{m}(t) e^{-i\Phi_{k}(t)} \hat{b}_{k}^{+}(t)$$
(4.4)

alakban írjuk fel. Ez alapján az $f_n(t) = \left\langle \left\langle \Psi(t) \right| \hat{b}_n^+ \hat{b}_n \left| \Psi(t) \right\rangle \right\rangle_{RM}$ módon definiált átlagos betöltési szám a pillanatnyi bázisban az *n*-edik egy részecske sajátállapot betöltöttségét méri, amelyet a

$$f_{n}(t) = \left\langle \left\langle 0 \right| \prod_{m=1}^{M} \left(\sum_{l_{m}=1}^{N} \left(\alpha_{l_{m}}^{m}(t) \right)^{*} \hat{b}_{l_{m}}(t) e^{i \sum_{m=1}^{M} \Phi_{l_{m}}(t)} \right) \hat{b}_{n}^{+}(t) \hat{b}_{n}(t) \dots \right. \\ \left. \dots \prod_{m=1}^{M} \left(\sum_{l_{m}'=1}^{N} \alpha_{l_{m}'}^{m}(t) \hat{b}_{l_{m}'}^{+}(t) e^{-i \sum_{m=1}^{M} \Phi_{l_{m}'}(t)} \right) \left| 0 \right\rangle_{N} RM$$

$$(4.5)$$

formában írhatunk fel tetszőleges $t \in [0,\tau]$ időpontban. (4.5)-ben felbontva a zárójeleket az alábbi formára jutunk

$$f_{n}(t) = \left\langle \sum_{\{l_{1},\dots,l_{M}\}} \sum_{\{l'_{1},\dots,l'_{M}\}} \left(\alpha_{l_{1}}^{1}(t) \right)^{*} \dots \left(\alpha_{l_{M}}^{M}(t) \right)^{*} \alpha_{l'_{1}}^{1}(t) \dots \alpha_{l'_{M}}^{M}(t) e^{i \left(\sum_{m=1}^{M} \Phi_{l_{m}}(t) - \Phi_{l'_{m}}(t) \right)^{*}} \right)^{*} \left\langle 0 | \hat{b}_{l_{1}}(t) \dots \hat{b}_{l_{M}}(t) \hat{b}_{n}^{+}(t) \hat{b}_{n}(t) \hat{b}_{l'_{1}}^{+}(t) \dots \hat{b}_{l'_{M}}^{+}(t) | 0 \right\rangle \right\rangle_{RM},$$

$$(4.6)$$

ahol $\tilde{\sum}_{\{l_1,\ldots,l_M\}}$ különböző $\{l_1 \neq l_2 \neq l_3 \neq \cdots \neq l_M\}$ értékekre való összegzést jelent. (4.6) jobb oldalának utolsó tagja csak akkor nem nulla, ha pontosan egy l_j és l'_i megegyezik *n*-el. Figyelembe véve az összegzést a különböző $\{l_j, l'_i\}$ értékekre, illetve azt, hogy miután elimináltuk (4.6) utolsó tagjából a $l_j, l'_i = n$ tagokat, $\langle 0| \ \hat{b}_{l_1}(t) \dots \hat{b}_{l_{M-1}}(t) \ \hat{b}^+_{l'_1}(t) \dots \hat{b}^+_{l'_{M-1}} + (t) |0\rangle$ csak akkor nem zérus, ha $\{l_j\}$ egy $\mathcal{P}, M-1$ elemből álló, permutációja $\{l'_i\}$ -nek, ahol $l_j, l'_i \neq n$. Tetszőleges \mathcal{P} permutáció esetén továbbá (4.6)-ban szereplő exponens argumentuma zérus, így ezzel a taggal nem kell a továbbiakban foglalkoznunk. Összességében a

$$f_{n}(t) = \left\langle \sum_{i,j=1}^{M} \left(\alpha_{n}^{j}(t) \right)^{*} \alpha_{n}^{i}(t) (-1)^{i+j} \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \right. \\ \left. \left. \sum_{\{l_{1},\dots,l_{M-1}\neq n\}} \left(S_{1,l_{1}}^{j}(t) \right)^{*} \dots \left(S_{M-1,l_{M-1}}^{j}(t) \right)^{*} S_{1,\mathcal{P}_{l_{1}}}^{i}(t) \dots S_{M-1,\mathcal{P}_{l_{M-1}}}^{i}(t) \right\rangle_{RM} \right.$$

$$(4.7)$$

összefüggést írhatjuk fel, ahol bevezettük a $S_{m,l}^{j}(t) = \begin{cases} \alpha_{l}^{m}(t) , \text{ ha } m < j, \\ \alpha_{l}^{m+1}(t) , \text{ ha } m \ge j \end{cases}$ segéd-változót. Mivel $S_{m,l}^{j}(t)$ csak egy állandó eltolást tartalmaz az $\sim \alpha_{l}^{m}$ amplitudók első

indexében, a $\sum_{\mathcal{P}} \ldots$ összegzésen belül ($\mathcal{P}_{l_m}, g^i(m)$) párokat átírhatjuk ($l_m, g^i(\mathcal{P}_m)$) alakban. Ezt követően a $\tilde{\sum}_{\{l_1,\ldots,l_{M-1}\neq n\}} \ldots$ összegzést kiterjesztjük minden további lehetséges { $l_i \neq n$ } tagra. A (A.3) függelékben bebizonyítjuk, hogy ezzel nem változtatunk az eredeti értéken.

Összességében az átlagos betöltési számokra az

$$f_n(t) = \left\langle \sum_{i,j=1}^{M} \left(\alpha_n^j(t) \right)^* \alpha_n^i(t) \left(-1 \right)^{i+j} \det \left(\underbrace{g_{\equiv ij}^n(t)}_{RM} \right) \right\rangle_{RM}$$
(4.8)

összefüggést írhatjuk fel, ahol

$$\left(\underline{g}_{=ij}^{n}(t)\right)_{mm'} = \sum_{l=1; l \neq n}^{N} \left(S_{m',l}^{i}(t)\right)^{*} S_{m,l}^{j}(t) \,. \tag{4.9}$$

4.2. Kiszélesedések diffúzív viselkedése és univerzalitása

A következő alfejezetben a kezdeti ideális Fermi-tenger kiszélesedését vizsgáljuk meg. Numerikus eredmények alapján, az átlagos $f_n(t)$ betöltési számok diffúzívan szélesednek ki. Azaz a rendszerben elektron-lyuk gerjesztések jelennek meg a

$$\delta n\left(t\right) \sim \sqrt{\tilde{t}} \tag{4.10}$$

nagyságú ablakban, a Fermi tenger M-edik szintje körül. A Fermi tenger kiszélesedésének tanulmányozásával meg lehet becsülni továbbá a rendszeren végzett $\hat{W} = \hat{H}_f - E_{GS}^f(M)$ munka átlagos értékének időfejlődését, ahol \hat{H}_f a (1.3) által definiált több részecskés Hamilton operátor $\lambda = \lambda_f$ időpillanatban, illetve $E_{GS}^f(M)$ a végső, M fermionból álló, Fermi tenger alapállapoti energiája. Ez alapján a munka várható értékét a

$$\left\langle \hat{W}\left(t\right)\right\rangle_{RM} = \sum_{n=1}^{N} \left(f_n\left(t\right) - f_n\left(0\right)\right) \epsilon_n\left(t\right)$$
(4.11)

képlettel adhatjuk meg. (4.11)-ben az összes elektron-lyuk gerjesztés száma ~ $\delta n(t)$ nagyságrendű, illetve gerjesztésekként az átlagosan végzett munka ~ $\delta n(t) \Delta_0$ -el becsülhető. Vagyis korábbi eredményeink alapján

$$\left\langle \hat{W}(t) \right\rangle_{RM} \sim \delta n^2(t) \,\Delta_0 \sim \Delta_0 \tilde{t}$$
(4.12)

összefüggéssel írhatjuk le az átlagos munka időfejlődését, ahol Δ_0 az előző fejezetekben definiált átlagos szinttávolság a spektrum közepén.

A (4.1)-os és a (4.2)-es ábra bal oldalán a Fermi tenger kiszélesedését láthatjuk 4 különböző időpillanatban, $\tilde{v} \ll 1$ és $\tilde{v} \gg 1$ határesetekben. A jobb oldalon a kiszélesedések mértékét jellemző $\frac{\langle \hat{W}(t) \rangle}{\Delta_0}$ átlagos munka időfejlődését ábrázoltuk. A görbék jó közelítéssel

lineáris viselkedést mutatnak. A $\tilde{v} \gg 1$ limeszben a kvencs elején, míg a pillanatnyi Fermi felszín nem simul ki eléggé, nagyobb eltérést tapasztalunk a várt lineáris viselkedéstől, míg az ellentétes $\tilde{v} \ll 1$ határesetben az időfejlődés végén kapunk kisebb eltérést a jósolt lineáris viselkedéstől, mely azzal magyarázható, hogy az átmeneteket ebben a limeszben a szomszédos nívók dominálják.

Miután megbizonyosodtunk a kiszélesedések lineáris időfejlődéséről, a klasszikus $\delta n^2(t) = 2\tilde{D}\tilde{t}$ diffúziós egyenlet alapján jelen dolgozatban most a rendszeren végzett átlagos munka segítségével a következő definíciót vezetjük be:

$$\tilde{D} = \frac{\mathrm{d}\left(\left\langle \hat{W}\left(t\right)\right\rangle_{RM} / \Delta_{0}\right)}{\mathrm{d}t}.$$
(4.13)

Micheal Wilkinson és Elizabeth J. Austin munkájukban is hasonló időfejlődést mutatta ki, mely során egy részecske rendszerek dinamikáját vizsgálták periodikus perturbáció esetén. [7]



4.1. ábra. Fermi tenger kiszélesedése N = 10 mátrixméret és $\tilde{v} = 0.2$ sebesség mellett, GOE mátrixsokaság esetén. Bal oldal: a Fermi tenger kiszélesedése négy különböző időpontban. Jobb oldal: a rendszeren végzett átlagos munka időfejlődése, melyből meghatároztuk a kiszélesedést jellemző $\tilde{D} = 0.0255$ diffúziós együtthatót. A numerikus szimuláció során $N_c = 5$ levágással éltünk, melyet az egy részecske állapotok kiszélesedésének tanulmányozásával verifikáltunk, illetve dt $\Delta_0 = 0.0011$ időlépést választottunk.



4.2. ábra. Fermi tenger kiszélesedése N = 10 mátrixméret és $\tilde{v} = 0.2$ sebesség mellett, GOE mátrixsokaság esetén. Bal oldal: a Fermi-tenger kiszélesedése négy különböző időpontban. Jobb oldal: a rendszeren végzett átlagos munka időfejlődése, melyből meghatároztuk a kiszélesedést jellemző $\tilde{D} = 4.14$ diffúziós együtthatót. A numerikus szimuláció során $N_c = 16$ levágással éltünk, melyet az egy részecske állapotok kiszélesedésének tanulmányozásával verifikáltunk, illetve dt $\Delta_0 = 0.0003$ időlépést választottunk.

Az átlagos betöltöttséget $\Delta n = n - M$ függvényében ábrázoltuk a kvencs előtt, közben és a végén, a (4.1)-os ábra esetében a $\tilde{t} = 0, 0.1\tau\Delta_0, 0.3\tau\Delta_0, \tau\Delta_0$, illetve a (4.2)es ábrán a $\tilde{t} = 0, 0.25\tau\Delta_0, 0.6\tau\Delta_0, \tau\Delta_0$ dimenziótlan idő pillanatokban. A Fermi tenger kiszélesedése diffúzív viselkedést mutat. Továbbá a bal oldalt a rendszeren végzett átlagos munka időfejlődése látható Δ_0 egységekben mérve, \tilde{t} függvényében, melyből megadtuk a folyamatot jellemző \tilde{D} dimenziótlan diffúziós együtthatókat.

A szimulációk szerint az f_n eloszlás kizárólag a mátrix sokaságban megtett s úttól és a dimenziótlan \tilde{v} sebességtől függ. Ezt illusztrálja a (4.3)-as ábra.



4.3. ábra. Fermi tenger kiszélesedése N=10és N=20mátrixméret mellett, GOE mátrixsokaság esetén. Baloldal: Átlagos betöltöttség $\Delta n=n-M$ függvényében ábrázolva a kvencs végén. Jobb oldal: a rendszeren végzett átlagos munka Δ_0 egységekben mérve, \tilde{t} függvényében ábrázolva, melyből meghatározható a dimenziótlan $\tilde{D}\approx 0.1$ diffúziós együttható. A numerikus számítás során N=20 méret mellett $N_c=11$ levágással éltünk, mely érvényességét ismét az egy részecskés probléma vizsgálatával verifikáltuk, továbbá az időlépés nagyságát $\Delta_0 dt = 0.0008$ választottuk meg.

A (3.1)-es alfejezetben bevezetett dimenziótlan paraméterek függvényében a Fermi tenger univerzálisan, N rendszer mérettől függetlenül szélesedik ki, vagyis az átlagos betöltési számok (a legkisebb rendszer tartományán belül) megegyeznek. Ehhez hasonlóan az átlagos munka időfejlődése és a diffúziós állandó is független a vizsgált rendszerek méretétől mindaddig, amíg az elektron-lyuk gerjesztések nem érik el véges valószínűséggel a rendszer szélső állapotait is, tipikusan N = 10 esetén ez $\tilde{v} \approx 1.5$ -nél történik meg. A (4.3)-as ábra alapján N = 10 és N = 20 rendszer méretek esetén a betöltési számokat leíró Fermi eloszlás és a kiszélesedés időfejlődése is egy görbére esik.

4.3. Diffúziós együtthatók sebesség függése, univerzalitása

A következő alfejezetben megvizsgáljuk, hogy a (4.2)-es alfejezetben ismertetett \tilde{D} dimenziótlan, univerzális diffúziós együttható hogyan függ a kvencs gyorsaságától. Első lépésként megbecsüljük \tilde{D} karakterisztikus \tilde{v} sebességtől való függését a $\tilde{v} \ll 1$ és $\tilde{v} \gg 1$ határesetekben.

A $\tilde{v} \ll 1$ adiabatikus határesetben a szomszédos nívók közötti átmenetek dominálják a folyamatot. Ezen felül az átmeneteket csak az elkerült szintkereszteződések kis környezetében egy-egy Landau-Zener átmenettel[5][6] közelítjük, aminek releváns $\tilde{\Delta}$ és $\tilde{\gamma}$ paramétereit a $\Delta_{LZ} = \sqrt{\Delta^2 + t^2 \gamma_t^2}$ lokális minimumok kis környezetében érvényes közelítő

4. FEJEZET. FERMI TENGER DIFFÚZÍV KISZÉLESEDÉSE

alakkal veszünk figyelembe. Így a diffúziós állandó nagyságrendjére a

$$\tilde{D} \sim \frac{\mathrm{d}N_{cross}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \left\langle P_{LZ} \right\rangle_{RM} = \frac{N_{cross}}{\mathrm{d}\tilde{s}} \frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \left\langle P_{LZ} \right\rangle_{RM} \sim \tilde{v} \left\langle P_{LZ} \right\rangle_{RM} \tag{4.14}$$

becslést adhatjuk, ahol N_{cross} az elkerült szintkereszteződések száma a kvencs során, illetve $\langle P_{LZ} \rangle_{RM}$ az elkerült szintkereszteződések Landau-Zener átmeneteinek átlagos valószínűsége. GOE sokaság esetén a P_{LZ} valószínűség kifejezhető az elkerült szintkereszteződések paramétereivel, $P_{LZ} = e^{-\frac{\pi}{2} \frac{\Delta_{min}^2}{\gamma_t}}$ [5]. Így a (2.2) és (2.3) alfejezetek alapján a $f^{GOE}\left(\tilde{\Delta}\right)$ és $g^{GOE}\left(\tilde{\gamma}\right)$ eloszlások segítségével meghatározhatjuk a Landau-Zener átmenetek valószínűségének sebesség függését. Először P_{LZ} argumentumát $-\frac{\pi^2}{2} \frac{\tilde{\Delta}^2}{\tilde{v}\tilde{\gamma}}$ alakban írjuk fel dimenziótlan mennyiségek segítségével, majd megadjuk az átlagos átmeneti valószínűséget a

$$\langle P_{LZ} \rangle_{RM} = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{d}\tilde{\Delta} \mathrm{d}\tilde{\gamma} e^{-\frac{\pi^2}{2}\frac{\tilde{\Delta}^2}{\tilde{v}\tilde{\gamma}}} f^{GOE}\left(\tilde{\Delta}\right) g^{GOE}\left(\tilde{\gamma}\right) \tag{4.15}$$

integrállal. A $\tilde{v} \ll 1$ határesetben P_{LZ} nagyon gyorsan levág, ahogy $\tilde{\Delta}$ -t növeljük, így (4.15)-ben $f^{GOE}\left(\tilde{\Delta}\right) \sim const.$ közelítéssel élhetünk. Ennek ismeretében elvégezve a d $\tilde{\Delta}$ szerinti integrált, a

$$\langle P_{LZ} \rangle_{RM} \sim \int_0^\infty \mathrm{d}\tilde{\gamma} \frac{\sqrt{2\tilde{v}\tilde{\gamma}}}{\sqrt{\pi}} g^{GOE}\left(\tilde{\gamma}\right) \sim \sqrt{\tilde{v}} \left\langle \sqrt{\tilde{\gamma}} \right\rangle_{GOE}$$
(4.16)

eredményre jutunk. Ezt a (4.14)-es egyenletbe helyettesítve, kis változási sebességekre, a

$$\tilde{D} \sim \tilde{v}^{1.5}$$
, ha $\tilde{v} \ll 1$ (4.17)

hatványfüggvény viselkedést kapjuk.

GUE mátrixsokaság esetében a fentiekkel analóg módon járunk el annyi különbséggel, hogy $f^{GUE}\left(\tilde{\Delta}\right) \sim \tilde{\Delta}$ közelítő értéket írjuk be a (4.15)-ös integrálba, ami a

$$\langle P_{LZ} \rangle_{RM} \sim \int_0^\infty \mathrm{d}\tilde{\gamma} \frac{2\tilde{v}\tilde{\gamma}}{\pi^2} g^{GUE}\left(\tilde{\gamma}\right) \sim \tilde{v} \left<\tilde{\gamma}\right>_{GUE}$$
(4.18)

eredményre, összességében pedig a $\tilde{D}^{GUE} \sim \tilde{v}^2$ összefüggésre vezet a $\tilde{v} \ll 1$ határesetben.

A $\tilde{v}\gg 1$ limesz esetén a nem adiabatikus időfejlődésnek megfelelően a távolabbi nívók közötti átmenetek dominánsak, emiatt a szomszédos nívók közötti átmenetek erősségét meghatározó szinttaszítás nem játszik többé szignifikáns szerepet. Hogy megbecsüljük a diffúziós állandó sebesség függését ebben a határesetben, felírjuk az átmeneti mátrixelem abszolút érték négyzetét két tetszőleges $|m-m'|\gg 1$ egy részecske sajátállapot között

$$P_{mm'} \sim \dot{\lambda}^2 \left\langle \frac{\left| \left\langle \theta^m \left(\lambda \right) \left| \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\lambda} \right| \theta^{m'} \left(\lambda \right) \right\rangle \right|^2}{\left(\epsilon_m \left(\lambda \right) - \epsilon_{m'} \left(\lambda \right) \right)^2} \right\rangle_{RM}.$$
(4.19)

(4.19) jobb oldalán a nevezőt ~ $(m-m')^2 \Delta_0^2$ szerint, a számlálót ~ $\frac{1}{N}$ szerint becsülhetjük nagy sebességek esetén. Felhasználva továbbá, hogy (1.2) ás (3.7) alapján $\dot{\lambda} = \frac{\Delta_0}{\sqrt{N}}\tilde{v}$, a

$$P_{mm'} \sim \frac{\tilde{v}^2}{\left(m - m'\right)^2 N^2}$$
 (4.20)

becslést kapjuk. Az átmeneti rátákat a Fermi aranyszabály segítségével becsüljük, ami $\left(4.18\right)$ alapján a

$$\tilde{D} \sim \sum_{m'} P_{mm'} / \Delta_0^2 (m - m')^2 \sim \frac{\tilde{v}^2}{\Delta_0^2 N} \sim \tilde{v}^2$$
, ha $\tilde{v} \gg 1$ (4.21)

eredményre vezet, ahol feltételeztük, hogy a végállapotok egyenletesen, $\frac{1}{\Delta_0}$ sűrűséggel helyezkednek el.

A (4.4)-es ábrán a fenti becslést igazoljuk; \tilde{v} függvényében ábrázoljuk a \tilde{D} dimenziótlan diffúziós együtthatókat, melyek a (3.1)-ben bevezetett skálázás mellett ismét ugyanazon-, univerzális görbére esnek. Numerikus eredményeink jó egyezést mutatnak Wilkinson és munkatársai munkáival, melyben az egy részecske állapotok diffúzív kiszélesedését vizsgálták. [4]



4.4. ábra. A \tilde{D}^{GOE} dimenziótlan diffúziós együtthatók \tilde{v} függvényében, logaritmikus skálán ábrázolva, N = 10 és N = 20 mátrixméretek mellett, GOE sokaság esetén. A $\tilde{v} \ll 1$ adiabatikus határesetben adott becslésnek megfelelően a görbe $\sim \tilde{v}^{1.5}$ szerint indul, illetve a nem adiabatikus időfejlődésnek megfelelő $\tilde{v} \gg 1$ limeszben $\sim \tilde{v}^2$ szerint változik.

5. fejezet

Rendezetlen, mezoszkopikus rendszerek munka statisztikája

5.1. Abszorbeált energia karakterisztikus függvénye

A következő fejezetben rátérünk jelen dolgozat legfontosabb célkitűzésének tárgyalására, a rendszer által abszorbeált energia statisztikájának, azaz munka statisztikájának vizsgálatára. A vizsgált $M = \frac{N}{2}$ fermionból álló rendszer kezdetben a kiindulási \mathcal{H}_1 Hamilton operátor alapállapotában tartózkodik, majd a külső, időben változó elektromos és mágneses terek hatására a kezdeti Fermi tenger kiszélesedik és véges valószínűséggel elektronlyuk párok jelennek meg. Ennek következtében véges valószínűséggel betöltöttek lesznek a magasabb energia állapotok is, így szükségszerűen a rendszer átlagos energiája is változni fog. Jelen fejezetben ismét

$$\hat{W} = \hat{H}_{f} - E_{GS}^{f}(M) \,. \tag{5.1}$$

módon definiálom a rendszeren végzett munkát. Az (5.1)-es egyenlet által definiált munka eloszlását a

$$P(W) = \left\langle \sum_{k} P_k \delta\left(W - E_k^f(M) + E_{GS}^f(M) \right) \right\rangle_{RM}$$
(5.2)

módon írhatjuk fel, ahol $E_k^f(M)$ az k-adik sok-részecske állapot energiája \hat{H}_f bázisában, illetve ahol P_k az k-adik sok-részecske állapot valószínűsége, mely általánosan a követ-kező képlettel írható le:

$$P_k = \left| \det \left(\underline{g}_k \right) \right|^2, \tag{5.3}$$

ahol $\left(\underline{g}_{k}\right)_{mm'} = \alpha_{n_{m'}(k)}^{m}(\tau) e^{-i\Phi_{n_{m'}(k)}(\tau)} M \times M$ -es mátrix, illetve $\{n_1(k), n_2(k) \dots n_M(k)\}$ indexeli az k-ik sok-részecske állapotot felépítő egy részecske sajátállapotokat.

Numerikusan könnyebben kezelhető, illetve pontosabb eredményre vezet, ha először P(W) karakterisztikus függvényét adjuk meg, melyből Fourier transzformáció segítsé-

gével származtatható a rendszeren végzett munka eloszlása. Az (5.2)-es egyenlet Fourier-transzformáltját a

$$G(u) = \left\langle \left\langle \Psi(\tau) \left| e^{iu\hat{H}_f} \right| \Psi(\tau) \right\rangle e^{-iuE_{GS}^f(M)} \right\rangle_{RM}$$
(5.4)

karakterisztikus függvény adja meg, ahol $|\Psi\left(\tau\right)\rangle$ a
zMrészecskés hullámfüggvény a kvencs végén.

Az (5.4)-es összefüggés igazolásához elvégezzük \hat{H}_f bázisában a $|\Psi(\tau)\rangle = \sum_k c_k \left|\Theta_k^f\right\rangle$ kifejtést (ahol $\left|\Theta_k^f\right\rangle \hat{H}_f$ k-ik sok-részecskés sajátállapota), melyet, ha felhasználjuk a sok-részecske állapotok $\left\langle\Theta_k^f\right|\Theta_{k'}^f\right\rangle = \delta_{kk'}$ ortogonalitását, a következő alakra hozhatunk:

$$G(u) = \left\langle \sum_{k} |c_{k}|^{2} e^{iu \left(E_{k}^{f}(M) - E_{GS}^{f}(M) \right)} \right\rangle_{RM},$$
(5.5)

ahol definíció szerint $P_k = |c_k|^2$. Mivel $\sim e^{-iu}$ Fourier-transzformáltja $\sim \delta(W)$, a következő összefüggést kapjuk:

$$P(W) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} e^{-iuW} G(u) , \qquad (5.6)$$

mellyel állításunkat igazoltuk.

Továbbá, ha az (5.5) által leírt összegzésből kiválasztjuk azt a $P_k \equiv P_{GS}$ valószínűséget, melyre $E_k^f(M) = E_{GS}^f(M)$, vagyis amikor a kvencs végén a rendszer az alapállapotban marad, a következő alakban írhatjuk fel a karakterisztikus függvényt:

$$G(u) = \langle p_{GS} \rangle_{RM} + \delta G(u), \qquad (5.7)$$

ahol $\delta G(u)$ analitikus és folytonos függvénye *u*-nak. P(W) tartalmaz egy Dirac-delta csúcsot a W = 0 pontban, illetve a karakterisztikus függvényhez hasonlóan $P(W) = \langle P_{GS} \rangle_{RM} \delta(W) + \delta P(W)$ alakban írható. Numerikus eredményeink alapján, a szinttaszítással összhangban, $\delta P(W \to 0) \Big|_{W>0} = 0$, illetve $\delta P(W < 0) = 0$ karakterisztikákat kaptunk.

5.2. Univerzalitás

A következő fejezetben a numerikus eredményeket mutatjuk be. Az egy részecske Schrödinger - egyenlet megoldása szolgáltatta amplitudók segítségével adott Δu lépésközzel megkonstruáltuk a G(u) karakterisztikus függvényt, melynek a $\sim o$ (Δu^3) harmadrendig pontos trapéz formula segítségével numerikusan meghatároztuk a Fourier- transzformáltját.

A korábbi fejezetekhez hasonlóan a rendszeren végzett munkára a $\tilde{W} = \frac{W}{\Delta_0}$ természetes, skála invariáns változót vezetjük be. Hogy megkonstruálhassuk a $P\left(\tilde{W}\right)$ eloszlást, a karakterisztikus függvényt is a saját $\tilde{u} = u\Delta_0$ természetes egységeiben generáltuk le.

A (5.1)-es ábrán N = 10 és N = 20 rendszer méretek mellett láthatjuk $\tilde{v} = 0.6$ és $\tilde{v} = 2.2$ sebességek esetén a $P\left(\tilde{W}\right)$ eloszlásokat.



5.1. ábra. A rendszeren végzett munka $P\left(\tilde{W}\right)$ eloszlás függvénye, N=10és N=20rendszer méretek esetén. A $P\left(\tilde{W}\right)$ függvény konstrukciójához 1500 véletlen mátrixra átlagoltunk, illetve a karakterisztikus függvényt $\Delta u \Delta_0 = 0.005$ lépésközzel generáltuk le. A numerikus Fouriertranszformációt $\frac{\Delta W}{\Delta_0} = 0.47$ lépésközt választva trapéz formula segítségével végeztük el.

Felső ábra: $\tilde{v} = 0.6$, jól kivehető csúcs látható $\tilde{W} \approx 2.2$ értéknél. Ebben az esetben közel vagyunk a $\tilde{v} \ll 1$ adiabatikus tartományhoz, ami miatt a $|m - m'| \gg 1$ távoli nívók közötti átmentek elhanyagolhatóak és $P\left(\tilde{W}\right)$ a maximum helyétől távolodva gyorsan levág nullába.

Jobb oldal: $\tilde{v} = 2.2$, a nagyobb sebesség hatására a távolabbi $|m - m'| \gg 1$ nívók között is jelentősek az átmenetek, így kevésbé rendelkezik meghatározó szereppel a szomszédos nívók között fellépő szinttaszítás. Ezzel magyarázható, hogy a $\tilde{v} = 0.6$ esethez képest itt egyrészt $\tilde{W} \approx 7$ -nél található a csúcs, illetve hogy a maximum helytől távolodva jóval

lassabban tart nullába az eloszlás függvény. Ezen felül, mivel ennél a sebességnél N = 10 esetben véges valószínűséggel elektron-lyuk gerjesztések jelennek meg a rendszer szélső állapotaiban is, eltérő $P\left(\tilde{W}\right)$ eloszlás karakterisztikát kapunk az N = 20 esethez képest. Mivel az elektron-lyuk gerjesztések elérik az N = 10 méretű rendszer szélső állapotait is, a $\tilde{W} \gg 1$ limeszben N = 20 rendszer méret esetén nagyobb az abszorbeált energia valószínűsége. Emiatt az eloszlások maximumhelye körüli, illetve a $\tilde{W} \ll 1$ limeszben vett \tilde{W} értékeknél az N = 10 mérethez tartozó eloszlás a domináns.

A (5.2)-es ábrán a $\tilde{v} = 0.15 \ll 1$ és egy $\tilde{v} = 15 \gg 1$ adiabatikus és nem adiabatikus határesetnek megfelelő tartományban láthatjuk a rendszeren végzett munka eloszlását.



5.2. ábra. A rendszer által abszorbeált energia eloszlása a $\tilde{v} \ll 1$ és a $\tilde{v} \gg 1$ adiabatikus és nem-adiabatikus határesetekben. A (5.1)-es ábrához hasonló paramétereket használtunk az ábra megkonstruálásához.

Felső ábra: $P(\tilde{W})$ maximum helyénél egy plató alakul ki. Ennek a magyarázata, hogy az adiabatikus limeszben a végzett munkát nagy mértékben a kezdeti Fermi-tenger feletti első nívótól számított energia különbség határozza meg. Alsó ábra: A $\tilde{v} \gg 1$ nem-

5. FEJEZET. RENDEZETLEN, MEZOSZKOPIKUS RENDSZEREK MUNKA STATISZTIKÁJA30

adiabatikus határesetben a $|m-m'|\!\gg\!1$ távoli nívók közötti átmenetek a meghatározóak, aminek következtében a végzett munka eloszlása egy széles tartományban, a korábbi esettől eltérően, lassan változik.

6. fejezet Összefoglalás

Dolgozatomban sok-részecskés, rendezetlen mezoszkopikus rendszerek dinamikáját és munka statisztikáját vizsgáltam, állandó sebességű kvantum kvencs esetén. A bevezetőben először áttekintettem azokat a számunkra leginkább releváns tanulmányokat, melyek kvantumrendszerek szintjén vizsgálták a rendszeren végzett munkát, mind kísérleti, mind elméleti úton[9, 10, 11, 12], illetve ismertettem az általunk használt modellt, ahol véletlen mátrix elmélet segítségével nem kölcsönható, sok-részecskés rendszer kvantum kvencseit vizsgáltam, a véletlen mátrixok terében megtett állandó sebességű mozgás esetén.

A 2. fejezetben első lépésként elemeztem a vizsgált rendszer energianívóinak statisztikáját. Numerikusan $\Delta\lambda$ időpillanatonként ($\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$) diagonalizáltam az egy részecske $\mathcal{H}(\lambda)$ Hamilton mátrixot és megkerestem a mozgás során a szomszédos nívók különbségének lokális minimumait a spektrum közepén (a $\frac{N}{2}$ és a $\frac{N}{2}$ +1-edik nívó között), illetve felső egy negyedénél (a $\lfloor \frac{3N}{4} \rfloor$ és a $\lfloor \frac{3N}{4} + 1 \rfloor$ -edik nívó között). A lokális minimumokat, elkerült szint kereszteződéseket egy-egy Landau-Zener átmenettel közelítve, meghatároztam az azokat jellemző Δ_{min} minimális szinttávolság és a γ induló meredekség univerzális statisztikáját. Eredményeimet összehasonlítottam Wilkinson és munkatársai hasonló modellekben vizsgált elméleti formuláival. [3, 4, 7, 8]

A 3. fejezetben röviden áttekintettem az egy részecske problémát, mellyel részletesen a BSc szakdolgozatomban[14] foglalkoztam. Első lépésként felírtam a pillanatnyi bázisvektorok betöltési amplitudóira vonatkozó differenciálegyenletet, illetve a A.1-es függelékben egy egyszerűbb és numerikusan könnyebben kezelhető alakra hoztam azt. A fejezet második részében röviden ismertettem a differenciálegyenlet megoldására alkalmazott numerikus módszert: negyed rendű Runge-Kutta módszert alkalmaztam, illetve a köztes lépésekben a dinamikai fázisokat a szintén negyed rendig pontos Simpson közelítő integrál formula segítségével számítottam ki.

A 4. fejezetben a sok-részecskés, nem kölcsönható rendszerek dinamikáját elemeztem. A vizsgált rendszert a (1.3) által definiált, sok-részecske \hat{H} operátor alapállapotából indítottuk, majd az egy részecske Schrödinger-egyenlet szolgáltatta betöltési amplitudók segítségével analitikus kifejezést adtam a sok-részecskés, t időpillanatbeli $f_n(t)$ átlagos betöltés számokra. Továbbá megmutattam az átlagos betöltési számok diffúzív viselkedését, illetve a kezdeti Fermi-tenger kiszélesedésének lineáris szakaszából meghatároztam a kiszélesedést jellemző \tilde{D} dimenziótlan és univerzális diffúziós együtthatókat különböző \tilde{v} sebességek esetén. Ezt követően analitikusan megbecsültem a $\tilde{v} \ll 1$ és $\tilde{v} \gg 1$ határesetekben \tilde{D} sebesség függését. Előbbi esetre $\tilde{D} \sim \tilde{v}^{1.5}$, utóbbira $\tilde{D} \sim \tilde{v}^2$ hatványfüggést kaptam. A fejezet végén numerikus igazolást adtam a diffúziós állandó sebesség függésére.

A 5. fejezetben jelen dolgozat fő témájával, a rendszer által a kvencs során abszorbeált energia eloszlásával foglalkoztam. Ehhez, a numerikusan könnyebben kezelhető módszer alapján, először az eloszlás karakterisztikus függvényére adtam analitikus kifejezést, felhasználva az egy részecske Schrödinger-egyenlet szolgáltatta végső betöltési amplitudókat. Továbbá megmutattam, hogy az eloszlás tartalmaz egy Dirac-delta csúcsot a W = 0 pontban, vagyis amikor a rendszer a kiindulási-, alapállapotában marad. Ezt követően numerikusan, a másodrendig pontos trapéz formulával, Fourier transzformálva a karakterisztikus függvényt, ábrázoltam a munka statisztikát megadó eloszlást és kiemeltem a görbe jellegzetes tulajdonságait. A $\tilde{v}=0.6$ esetben univerzális eloszlás függvényt kaptam, míg $\tilde{v} = 2.2$ esetben, összhangban azzal a megállapítással, hogy a $\tilde{v} \gtrsim 1.5$ sebességekre N = 10 és N = 20 rendszer méretek esetén eltérő diffúzív viselkedést kapunk, szignifikáns különbséget tapasztaltam az eloszlások között. Ez az eredmény azzal magyarázható, hogy a $\tilde{v} \gtrsim 1.5$ sebességekre az elektron-lyuk gerjesztések véges valószínűséggel elérik az N = 10 méretű rendszer szélső állapotait is. A fejezet végén két ábra segítségével szemléltettem az eloszlás függvény tulajdonságait a $\tilde{v} \gg 1$ és a $\tilde{v} \ll 1$ határesetekben.

A függelék

Függelék

A.1. Általános időfüggő Schrödinger egyenlet átalakítása

Ebben a függelékben numerikusan jobban kezelhető, egyszerűbb alakra írjuk át a pillanatnyi betöltési amplitudókra vonatkozó (3.3)-as differenciálegyenletet. Első lépésként $\left|\frac{\partial \theta^k(\lambda)}{\partial \lambda}\right\rangle$ -t kifejtjük $\left|\theta^l(\lambda)\right\rangle$ pillanatnyi bázisvektorok segítségével. Ehhez a t + dt pillanatbeli Hamilton mátrixot vezetőrendben sorba fejtjük a következő módon

$$\mathcal{H}\left(\lambda + \mathrm{d}\lambda\right) = \mathcal{H}\left(\lambda\right) + \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}\lambda} + o\left(\mathrm{d}\lambda^{2}\right),\tag{A.1}$$

ahol a d λ -vel arányos tagra mint elsőrendű perturbációra tekintünk. Ennek megfelelően $\left|\theta^{k}\left(\lambda+\mathrm{d}\lambda\right)\right\rangle$ sajátvektornak is megadjuk a vezetőrendbeli kifejtését $\mathcal{H}\left(\lambda\right)$ bázisában,

$$\left|\theta^{k}\left(\lambda+\mathrm{d}\lambda\right)\right\rangle = \left|\theta^{k}\left(\lambda\right)\right\rangle - \mathrm{d}\lambda\sum_{m\neq k}\frac{\left\langle\theta^{m}\left(\lambda\right)\left|\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\lambda}\right|\theta^{k}\left(\lambda\right)\right\rangle}{\epsilon_{m}\left(\lambda\right) - \epsilon_{k}\left(\lambda\right)}\left|\theta^{m}\left(\lambda\right)\right\rangle + o\left(\mathrm{d}\lambda^{2}\right).\tag{A.2}$$

Ennek ismeretében, a $\left|\theta^{l}(\lambda + d\lambda)\right\rangle = \left|\theta^{l}(\lambda)\right\rangle + d\lambda \left|\frac{\partial\theta^{k}(\lambda)}{\partial\lambda}\right\rangle + o(d\lambda^{2})$ egyenlőség felhasználásával, kifejezve a kérdéses $\left|\theta^{l}(\lambda + d\lambda)\right\rangle$ tagot, illetve felhasználva a pillanatnyi bázisvektorok $\left\langle\theta^{l}(\lambda)\right|\theta^{k}(\lambda)\right\rangle = \delta_{lk}$ ortogonalitását, a következő összefüggésre jutunk:

$$\left\langle \theta^{l}\left(\lambda\right) \left| \frac{\partial \theta^{k}\left(\lambda\right)}{\partial \lambda} \right\rangle = -\frac{\left\langle \theta^{l}\left(\lambda\right) \left| \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\lambda} \right| \theta^{k}\left(\lambda\right) \right\rangle}{\epsilon_{l}\left(\lambda\right) - \epsilon_{k}\left(\lambda\right)}.$$
(A.3)

Ezt követően (A.3) alapján az alábbi módon írhatjuk át a (3.3)-as differenciálegyenletet:

$$\dot{\alpha}_{l}^{m}(t) = \sum_{k \neq l} \alpha_{k}^{m}(t) \frac{\left\langle \theta^{l}(\lambda) \left| \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\lambda} \right| \theta^{k}(\lambda) \right\rangle}{\epsilon_{l}(\lambda) - \epsilon_{k}(\lambda)} e^{i(\Phi_{l}(t) - \Phi_{k}(t))} e^{i(A_{l}(\lambda) - A_{k}(\lambda))}.$$
(A.4)

A FÜGGELÉK. FÜGGELÉK

Következő lépésként megvizsgáljuk az összegzésben megjelenő $\left\langle \theta^{l}(\lambda) \left| \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\lambda} \right| \theta^{k}(\lambda) \right\rangle$ mátrixelemeket a $k \neq l$ feltétel mellett. $\mathcal{H}(\lambda)$ alakját felhasználva a mátrixelemben megjelenő deriváltat a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \dot{\lambda} \left(-\mathrm{tg}\left(\lambda\right) \mathcal{H}\left(\lambda\right) + \frac{\mathcal{H}_2}{\cos\lambda} \right) \tag{A.5}$$

alakba írhatjuk át, melyből a (A.4)-es egyenletben, felhasználva pillanatnyi bázisvektorok ortogonalitását, a ~ $\mathcal{H}(\lambda)$ arányos tag nem ad járulékot az összegzésben a $k \neq l$ feltétel mellett. Összességében tehát csak (A.5) második tagját kell figyelembe vennünk, mely a

$$\dot{\alpha}_{l}^{m}(t) = \frac{\dot{\lambda}}{\cos\lambda} \sum_{k\neq l}^{N} e^{i(\Phi_{l}(t) - \Phi_{k}(t))} e^{i(\mathcal{A}_{l}(\lambda) - \mathcal{A}_{k}(\lambda))} \frac{\left\langle \theta^{l}(\lambda) | \mathcal{H}_{2} | \theta^{k}(\lambda) \right\rangle}{\epsilon_{l}(\lambda) - \epsilon_{k}(\lambda)} \alpha_{k}^{m}(t)$$
(A.6)

végső egyenletre vezet.

r

A.2. Több részecskés Schrödinger egyenlet megoldása

A következő függelékben megmutatjuk, hogy a $\hat{c}_{m,t}^+ |0\rangle = |\varphi^m(t)\rangle$ módon definiált operátorokkal felírt sok-részecskés $|\Psi(t)\rangle = \prod_{m=1}^M \hat{c}_{m,t}^+ |0\rangle$ hullámfüggvény kielégíti a $\hat{H} |\Psi(t)\rangle = i\partial_t |\Psi(t)\rangle$ sok-részecskés, idöfüggő Schrödinger-egyenletet. A (4.1)-es fejezetben leírtak alapján feladatunk a $\frac{1}{i} \left[\hat{H}, \hat{c}_{m,t}^+\right] = \dot{c}_{m,t}^+$ összefüggés igazolásával ekvivalens.

Ehhez először felírunk egy tetszőleges időfüggetlen $\hat{\Psi}^+_\mu$ mezőt $\hat{c}^+_{m,t}$ operátorok segítségével a következő módon

$$\hat{\Psi}_{\mu}^{+} = \sum_{m=1}^{N} \left\langle \varphi^{m}\left(t\right) \left| \mu \right\rangle \hat{c}_{m,t}^{+}, \qquad (A.7)$$

ahol $\hat{\Psi}^{+}_{\mu}|0\rangle = |\mu\rangle$. Majd kihasználva, hogy $\dot{\hat{\Psi}}^{+}_{\mu} = 0$ és összegezve $\sum_{\mu} \langle \mu | \varphi^{k}(t) \rangle (...)$ szerint, az alábbi alakra jutunk

$$\sum_{n,\mu=1}^{N} \dot{\hat{c}}_{m,t}^{+} \left\langle \varphi^{m}\left(t\right) \left|\mu\right\rangle \left\langle \mu\right| \varphi^{k}\left(t\right) \right\rangle + i \hat{c}_{m,t}^{+} \left\langle \varphi^{m}\left(t\right) \left|\mathcal{H}\left(t\right)\right| \mu\right\rangle \left\langle \mu\right| \varphi^{k}\left(t\right) \right\rangle = 0.$$
(A.8)

Kihasználva, hogy $\sum_{\mu=1}^{N} |\mu\rangle \langle \mu|$ az egység operátor, illetve az időfejlesztett bázisvektorok $\left\langle \varphi^{m}\left(t\right) \middle| \varphi^{k}\left(t\right) \right\rangle = \delta_{mk}$ ortogonalitását, a

$$\dot{\hat{c}}_{k,t}^{+} = \sum_{m=1}^{N} -i\mathcal{H}\left(t\right)_{m,k} \hat{c}_{m,t}^{+}$$
(A.9)

egyenlőségre jutunk, ahol $\mathcal{H}(t)_{m,k} = \left\langle \varphi^m(t) | \mathcal{H}(t) | \varphi^k(t) \right\rangle$. Ezt követően a kérdéses kommutátort a $\sum_{n,m=1}^{N} \mathcal{H}_{n,m} \left[\hat{c}_{n,t}^+ \hat{c}_{m,t}, \hat{c}_{k,t}^+ \right]$ alakba írhatjuk át, ahol az időfejlesztett

bázisban $\hat{H} = \sum_{n,m=1}^{N} \mathcal{H}(t)_{n,m} \hat{c}_{n,t}^{+} \hat{c}_{m,t}$. Továbbá felhasználva a $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left\{\hat{B}, \hat{C}\right\} - \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}\hat{B}$ és a $\left\{\hat{c}_{m,t}, \hat{c}_{k,t}^{+}\right\} = \delta_{m,k}$ kommutációs azonosságokat a következőt kapjuk:

$$\left[\hat{H}, \hat{c}_{k,t}^{+}\right] = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{H}\left(t\right)_{n,k} \hat{c}_{n,t}^{+}.$$
(A.10)

Összevetve (A.9)-et és (A.10)-et megkapjuk a $\frac{1}{i} \left[\hat{H}, \hat{c}_{m,t}^+ \right] = \dot{\hat{c}}_{m,t}^+$ összefüggést, amivel állításunkat igazoltuk.

A.3. Betöltési számok determináns formulája

A következő függelékben igazoljuk, hogy a (4.1)-es fejezet (4.7)-es összefüggésében a $\sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \tilde{\sum}_{\{l_1,\ldots,l_{M-1}\neq n\}} \ldots$ összegzést kiterjeszthetjük minden lehetséges $\{l_i \neq n\}$ értékre. Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy a

$$\sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} S^i_{1,\mathcal{P}_{l_1}} \dots S^i_{M,\mathcal{P}_{l_M}}$$
(A.11)

összeg eltűnik ha 2 vagy több $\{l_i\}$ index megegyezik. A (A.11) összegben az egyszerűség kedvéért a (4.1)-es fejezethez képest elhagytuk az idő függést, illetve az elemek szorzatát M elemre írtuk fel. Az általánosság csorbítása nélkül feltesszük, hogy az első k < M $\{l_1 = l_2 = \cdots = l_k\}$ index egyenlő. Ekkor szétválasztjuk az M elemből álló \mathcal{P} permutációt \mathcal{P}^{M-k} és \mathcal{P}^k permutációkra. \mathcal{P}^{M-k} azon ismétléses permutációkat tartalmazza, ahol a k megegyező tag egymáshoz viszonyított sorrendje nem változik, míg \mathcal{P}^k csak a megegyező tagokat permutálja egymás között. Ezzel a konstrukcióval az eredeti (A.11)-es összeg az alábbi formába írható

$$\sum_{\mathcal{P}^{M-k}} (-1)^{\mathcal{P}^{M-k}} S^{i}_{k+1,\mathcal{P}^{M-k}_{l_{k+1}}} \dots S^{i}_{M,\mathcal{P}^{M-k}_{l_{M}}} \sum_{\mathcal{P}^{k}} (-1)^{\mathcal{P}^{k}} S^{i}_{1,\mathcal{P}^{k}_{l_{1}}} \dots S^{i}_{k,\mathcal{P}^{k}_{l_{k}}}.$$
 (A.12)

A ketté bontott kifejezés második részében minden index megegyezik vagyis (A.12) arányos $\sim \sum_{\mathcal{P}^k} (-1)^{\mathcal{P}^k}$ -val, ami azonban nyilvánvalóan zérus. Ezzel beláttuk, hogy (4.7)ben minden olyan tag a $\sum_{\mathcal{P}}$ összegzésben, amiben 2 vagy több alsó index megegyezik, nulla járulékot ad, ami igazolja a teljes determinánsá való bővítést.

Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Zaránd Gergelynek munkám irányításáért, az eredményeim alapos felülvizsgálatáért és a dolgozatomat érintő észrevételeiért. Továbbá szeretnék köszönetet mondani Lovas Lia Izabellának, aki A BSc szakdolgozatom írásakor munkám kisebb lépéseiben való eligazításában és részeredményeim precíz felülvizsgálatában segédkezett.

Irodalomjegyzék

- Eric G. Arrais, Diego A. Wisniacki, Lucas C. Celeri, Norton G. de Almeida, Augusto J. Roncaglia and Fabricio Toscano, Quantum work for sudden quenches in Gaussian random Hamiltonians, Phys. Rev. E 98, 012106 (2018)
- [2] Pier A. Mello, Narendra Kumar, Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations, A Maximum entropy View (2004)
- [3] Paul N. Walker, María José Sánchez, and Michael Wilkinson, Singularities in the spectra of random matrices, Journal of Mathematical Physics 37, 5019 (1996)
- [4] Michael Wilkinson, Diffusion and dissipation in complex quantum systems, Physical Review A, Volume 41, Number 9, 1. MAY 1990
- [5] Clarence Zener, National Research Fellow of U.S.A., Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels, July 19, 1932
- [6] Curt Wittig, J. Phys. Chem. B, 109 (17), (2005)
- [7] Micheal Wilkinson and Elizabeth J. Austin, Dynamics of a generic quantum system under a periodic perturbation, Physical Review A, 1 JULY 1992
- [8] Micheal Wilkinson, Statistical aspects of dissipation by Landau-Zener transitions, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) 4021-4037.
- [9] O.-P-Saira, Y.Yoon, T.Tanttu, M.Möttönen, D.V.Averin, J.P.Pekola, Test of Jarzinsky and Crooks fluctuation relations in an electronic system, Phys. Rev. Lett. 109, 180601, 2012
- [10] Jukka P. Pekola, Paolo Solinas, Alexander Shnirman, Dmitri V. Averin, Calorimetric measurement of quantum work, December 27, arXiv:1212.5808, 2012
- [11] Klaara Viisanen, Samu Suomela, Simone Gasparinetti, Olli-Pentti Saira, Joachim Ankerhold, Jukka P. Pekola, Incomplete measirement of work in a dissipative two level system, New Journal of Physics, Volume 17, May 2015, 2014

- [12] Y. Utsumi, D.S.Golubev, M.Marthaler, K.Saito, T.Fujisawa, Gerd Schön; Bidirectional single-electron counting and the fluctuation theorem; Physical Review B 81, (2015)
- [13] I. Lovas, A.Grabarits, G. Zaránd, közlésre előkészítve
- $[14]\,$ A. Grabarits, Munka statisztika nanorendszerekben, BSc szakdolgozat, BME, 2018 $_9$