

# Geometriai módon csatolt oszcillátorok összefonódottsági entrópiájának vizsgálata

TDK dolgozat

**Emmer Marcell**

Konzulens: Dr. Lévay Péter Pál, BME TTK, Elméleti  
Fizika Tanszék



Elméleti Fizika Tanszék  
BME TTK  
2021.09.09.

## Kivonat

A dolgozat során két harmonikus oszcillátor kvantum-összefonódását vizsgáljuk, melyek Hamilton-operátorát egy  $SO(2,1)$  Lie algebrát alkotó operátorok és kettő szabad paraméter határoznak meg. A paramétereket változtatva egy kétköpenyű hiperboloid felső levelét járjuk be, melynek minden pontjára meghatározzuk a rendszer összefonódottsági (von-Neumann) entrópiáját különböző szeparálható állapotokból kiindulva. Különös figyelmet fordítunk a vákuum állapot összefonódásának vizsgálatára, melyről kiderül, hogy a paramétertéren bejárt görbe geodetikusanak lesz függvénye. A vákuum állapot a paraméterek változtatásán keresztül a fény összenyomott vákuum állapotába (squeezed state vacuum) kerül, mely fontos szerepet játszik a kvantum optikában. Ezen kívül még vizsgáljuk az egyszerűen gerjesztett és az általános szeparálható állapotok összefonódását is a hiperboloidon haladva.

In this work, we investigate the quantum entanglement of two coupled harmonic oscillators represented by an  $SO(2,1)$  symmetric Hamiltonian operator, displaying a dependence on two parameters. Changing the parameters, we explore the geometry of the upper sheet of a two sheeted hyperboloid, and for each point, we determine the entanglement entropy of the system. A special elaboration of the entanglement of the vacuum state shows, that it depends on the geodesic lengths of the curve traversed in parameter space. A change in the external parameters evolves the vacuum state to a squeezed one playing an important role in quantum optics. Traversing paths in the hyperboloid we also study the entanglement properties of separable and excited states.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
1.1. Motiváció . . . . .	3
1.2. Kvantum alrendszerek összefonódottsági entrópiája . . . . .	4
<b>2. Az általánosított harmonikus oszcillátorok</b>	<b>6</b>
2.1. A Hamilton-operátor diagonalizálása . . . . .	6
2.2. Vákuum állapot összefonódottsági entrópiája . . . . .	9
2.3. Vákuum állapot kétszeres összefonása . . . . .	12
2.4. Összefonódott gerjesztett állapotok . . . . .	16
<b>3. Az összefonó operátor analógiája a kvantum-információelméletben</b>	<b>18</b>
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>20</b>
<b>5. Kitekintés</b>	<b>21</b>
<b>A. Hiperbolikus tér geodetikusainak hossza</b>	<b>21</b>
<b>B. <math>U(X)</math> operátor <math>SU(1,1)</math> reprezentációja</b>	<b>22</b>
<b>C. <math>U(X)</math> operátor megfeleltetése egy Lorentz boostként</b>	<b>23</b>
<b>D. Carlitz-formula</b>	<b>24</b>

# 1. Bevezetés

## 1.1. Motiváció

A fekete lyukakról ismert tény, hogy termodinamikai rendszerekként viselkednek a külső megfigyelők számára, tehát van entrópiájuk. Az 1970-es évek óta Bekenstein és Hawking arra következtetésre jutott, hogy ez az entrópia az eseményhorizont felszínével arányos:  $S_{BH} \sim A$  [1]. Egy klasszikus termodinamikai rendszer esetén persze nem ezt várnánk, hiszen az entrópia egy extenzív mennyiség, tehát a rendszer térfogatával arányosan nő. Továbbá, statisztikus mechanikai értelmezésében az entrópia a rendszerben elérhető mikroállapotok számának függvénye, kvantum rendszerek esetén pedig az elérhető kvantum állapotok számának. Azt azonban nem tudjuk, hogy egy fekete lyuk belsejében mennyi kvantum állapot konfiguráció lehetséges egy adott makroállapot esetén, még az sem biztos, hogy ez egy véges mennyiség.

Srednicki híres 1993-as cikkében [2] a Bekenstein-Hawking entrópiának egy tisztán kvantummechanikai magyarázatot adott, ahol is az entrópia a fekete lyuk külső és belső szabadsági fokainak kvantum összefonódottságából adódik. A fekete lyukat egy skaláris kvantum tér alapállapotával modellezte, melynek a szabadsági fokait kiintegrálta egy gömbön belül. Az így kapott alrendszer testesíti meg a fekete lyuk környezetét, és ez az elrendezés visszaadja a feltételt, miszerint a fekete lyukak belsejét egy külső megfigyelő nem ismerheti. Végül az összefonódottsági entrópiáról kiderül, hogy arányos a kiintegrált gömb felszínével.

A TDK dolgozatunkkal összevethető analógia abból ered, hogy első közelítésben a szerző két összekapcsolt harmonikus oszcillátort tekintett, melyben az egyik a fekete lyuk belsejének, a másik pedig a környezetének felelt meg. Ebben a cikkben az összefonódásért egy csatolási tag volt felelős a Hamilton-operátorban, ezzel ellentétben a mi dolgozatunkban egy  $SO(2,1)$  Lie-algebrát alkotó operátor hármast vizsgálunk, melyekben megjelennek a két oszcillátor impulzusának és pozíciójának vegyes szorzatai. A célunk, hogy ebben az elrendezésben meghatározzuk a rendszer összefonódottsági entrópiáját a Hamilton-operátor különböző sajátállapotai esetén, illetve, hogy néhány esetben egy geometriai kapcsolatot találjunk az entrópia és a paramétertér geodetikusai között.

A dolgozat hasonló szellemiséget követ, mint az  $AdS_{d+1}/CFT_d$  megfeleltetés, mellyel a  $d=2$  esetben számolt holografikus összefonódottsági entrópia ad magyarázatot a fekete lyukak entrópiájára. Mi a paramétertér geodetikus hosszai és az alrendszerek összefonódottsági entrópiái között találunk kapcsolatot, hasonlóan az  $AdS_{d+1}/CFT_d$ -vel, mely szintén a klasszikus geometria és a kvantum információelmélet között ad egy megfeleltetést, igaz egy sokkal

összetettebb módon.

Az 1.2-es alfejezetben tárgyaljuk az összetett kvantumrendszerek matematikai alapjait és bevezetjük az összefonódottsági entrópia fogalmát. 2.1-ben egy könnyen kezelhető, diagonális alakra hozzuk a rendszerünk Hamilton-operátorát és megállapítjuk a sajátértékeit. 2.2-ben tárgyaljuk az egyszerűen összefont vákuum állapotot, és kapcsolatot találunk az összefonódottsági entrópia, illetve a paraméterter geodetikusainak hossza között. A 2.3-as alfejezetben megvizsgáljuk, hogy miképp változik a vákuum állapot, ha kétszer mozdítjuk el a paraméterterben különböző irányokban, és egy geometriai analógiát adunk az összefonó operátorunknak. 2.4-ben vizsgáljuk a gerjesztett állapotok összefonását. A 3. fejezetben az összefonó operátorunkhoz egy kvantum-információelméletbeli megfeleltetést is találunk.

## 1.2. Kvantum alrendszerek összefonódottsági entrópiája

Ebben a fejezetben az összetett kvantum rendszereknek szeretnénk összefoglalni néhány tulajdonságát, illetve bevezetjük az összefonódottsági entrópia fogalmát. Erre gondolhatunk úgy, mint az egyes alrendszerek összefonódásának mértékére. Definiáljuk a sűrűségoperátorok fogalmát, mely a kvantummechanika állapotvektorokkal vett leírásának egy ekvivalens alternatíváját adja, és egy sokkal kényelmesebb lehetőséget biztosít olyan rendszerek leírására, melyek állapota nem teljesen ismert.

A kvantummechanika egy posztulátuma szerint az összetett kvantum rendszerek Hilbert-terét az egyes alterek tenzorszorzata határozza meg:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (1.1)$$

Itt egy általános tiszta állapotot meghatározó  $|\Psi\rangle$  állapotvektor felírható úgy, mint az egyes altereken vett bázisvektorok tenzorszorzatának szuperpozíciója:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{nm} |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 \quad (1.2)$$

Ahol:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |C_{nm}|^2 = 1 \quad (1.3)$$

Az állapotról azt mondjuk, hogy szeparálható, ha létezik olyan bázis, melyben a  $C_{nm} = a_n b_m$  együttható egy diadikus szorzatként áll elő. Ekkor  $|\Psi\rangle$  az egyes altereken vett tiszta állapotok tenzorszorzata.

$$|\Psi\rangle = \left( \sum_{n=1}^N a_n |n\rangle_1 \right) \otimes \left( \sum_{m=1}^M b_m |m\rangle_2 \right) = |a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2 \quad (1.4)$$

Ha nem létezik ilyen bázis, akkor a kvantum rendszerünk összefonódott állapotban van.

Egy fontos tétele az összetett rendszereknek a tiszta állapotok Schmidt-felbontása, mely azt állítja, hogy minden  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  tiszta állapot esetén léteznek  $\{|i\rangle_1\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$  és  $\{|i\rangle_2\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_2$  ortonormált bázisok, hogy:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sqrt{p_i} |i\rangle_1 \otimes |i\rangle_2 \quad (1.5)$$

Ahol  $\sqrt{p_i} \geq 0$  és  $\sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1$ .

A sűrűségoperátorok a kvantummechanikának az állapotvektorokkal ekvivalens megfogalmazását adják, melyek alakja egy tiszta állapotra:

$$\varrho = |\Phi\rangle \langle \Phi| \quad (1.6)$$

Általánosan pedig a pozitív, hermitikus, egységnyi nyommal rendelkező (positive trace-class) operátorokat hívjuk sűrűségoperátoroknak. Egyik legfontosabb felhasználásuk, hogy a segítségükkel remekül jellemezhetjük az összetett kvantum rendszereknek egyes részrendszereit. Ehhez bevezetjük a redukált sűrűségoperátor fogalmát. A  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  tenzorszorzat Hilbert-tér  $\varrho$  állapotának az 1-es és 2-es részrendszerre vett redukált sűrűségoperátorai:

$$\varrho_1 = \text{Tr}_2(\varrho) \quad \varrho_2 = \text{Tr}_1(\varrho) \quad (1.7)$$

Ahol  $\text{Tr}_2 : \text{Lin}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_1)$  operátorok közti leképezést hívják a 2. altéren vett részleges nyomnak.

A (1.2)-es egyenlet tiszta állapotának a sűrűségoperátora tehát:

$$\varrho = \sum_{n,k=1}^N \sum_{m,l=1}^M C_{nm} \overline{C_{kl}} |n\rangle_1 \langle k| \otimes |m\rangle_2 \langle l| \quad (1.8)$$

Melynek redukált sűrűségoperátorai:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \sum_{n,k=1}^N (CC^\dagger)_{nk} |n\rangle_1 \langle k| \\ \varrho_2 &= \sum_{m,l=1}^M (\overline{C^\dagger C})_{ml} |m\rangle_2 \langle l| \end{aligned} \quad (1.9)$$

A Schmidt-felbontás egy fontos következménye, hogy a redukált sűrűség-operátorok nemzérus<sup>1</sup> sajátértékei megegyeznek:

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i |i\rangle_1 \langle i| \\ \varrho_2 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i |i\rangle_2 \langle i|\end{aligned}\tag{1.10}$$

Végül pedig definiáljuk egy alrendszernek az összefonódottsági entrópiáját a következőképpen:

$$S = -\text{Tr}_1 (\varrho_1 \log \varrho_1) = -\text{Tr}_2 (\varrho_2 \log \varrho_2) = - \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ p_i \neq 0}} p_i \log p_i \tag{1.11}$$

Mely nem más, mint a Gibbs-entrópiának a kvantum rendszerekre vett általánosítása. Tehát az összefonódottsági entrópia megegyezik mindkét alrendszerre. Könnyen belátható, hogy szeparálható állapotok esetén  $S = 0$ , ha pedig összefonódott állapotunk van, akkor  $S > 0$ .

## 2. Az általánosított harmonikus oszcillátorok

### 2.1. A Hamilton-operátor diagonalizálása

Az általunk tekintett összetett kvantum rendszer két általánosított harmonikus oszcillátorból áll, melyet koordináta reprezentációban szeretnénk vizsgálni, tehát a Hilbert-terünk:  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dq_1) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dq_2)$ . Definiáljunk itt három hermitikus operátort, melyek a rendszerünk Hamilton-operátorát határozzák majd meg:

$$\begin{aligned}K_1 &= -\frac{1}{2} (q_1 q_2 - p_1 p_2) \\ K_2 &= \frac{1}{2} (q_1 p_2 + q_2 p_1) \\ K_3 &= \frac{1}{4} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ezek  $\text{SO}(2,1)$  Lie algebrát alkotnak

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} K^k \tag{2.2}$$

---

<sup>1</sup>A zérus sajátértékek számában különbözhetnek

Ahol a metrika:  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, 1)$ .  $K_3$  nem más, mint két csatolatlan harmonikus oszcillátor Hamilton operátora, melyben az egyszerűbb számolás érdekében egységnyiinek választottuk meg a tömeg és szögsebességeket.  $K_1$  illetve  $K_2$  operátorok lesznek felelősek a két alrendszer összefonódásáért, mivel megjelennek bennük az oszcillátorok impulzusának és pozíciójának vegyes szorzatai.

A rendszert leíró Hamilton-operátor:

$$H(X) = X \cdot K = -X_1 K_1 - X_2 K_2 + X_3 K_3 \quad (2.3)$$

Ahol  $X \in \mathbb{R}^{2,1}$  három szabad paraméter, melyek változtatásával valójában kontinuum sok oszcillátor párt vizsgálunk. A szeparálható rendszert leíró  $K_3$  operátort pedig visszakaphatjuk az  $X = (0,0,1)$  paraméterek választásával. A definícióból adódik, hogy a rendszerünk szimmetriacsoportja az  $\text{SO}(2,1)$  Lie csoport.

Szimmetria megfontolásokból adódóan a szabad koordinátáinkat az alábbi módon érdemes átparaméterezni:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv r \sinh \theta \cos \varphi \\ X_2 &\equiv r \sinh \theta \sin \varphi \\ X_3 &\equiv r \cosh \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

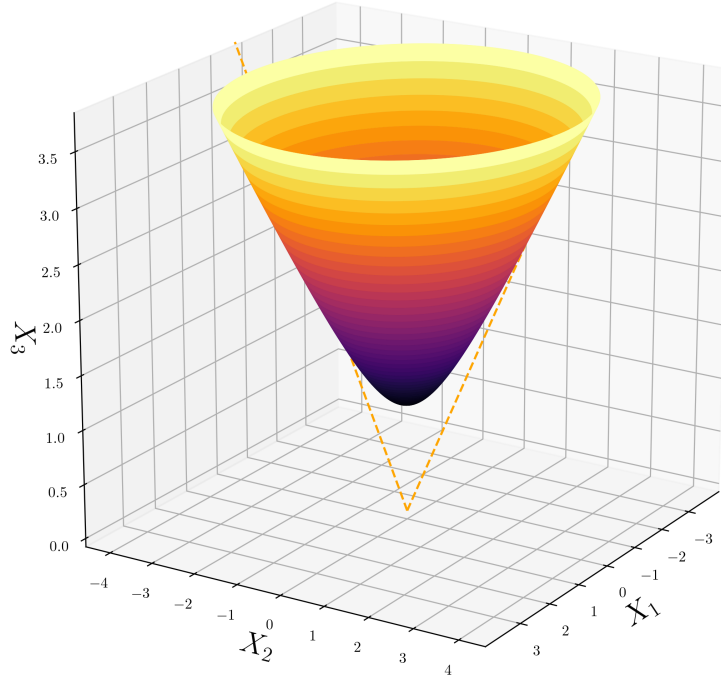
Ahol mi az  $r = 1$ ,  $\theta \in [0, +\infty]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  tartományra korlátozzuk a figyelmünket. Ezen határokkal vett paraméterezés, vagy másképp fogalmazva az alábbi egyenletrendszer egy kétköpenyű  $\mathbb{H}$  hiperboloid felső levelét határozza meg:

$$\mathbb{H} = \left\{ (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^{2,1} \mid -X_1 X_1 - X_2 X_2 + X_3 X_3 = 1, X_3 > 0 \right\} \quad (2.5)$$

A harmonikus oszcillátorok jól ismert léptető operátorait bevezetve, a  $K_i$  operátorokat új alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 + ip_1) & a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1 - ip_1) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_2 + ip_2) & b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_2 - ip_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$





1. ábra. A szabad paraméterek terében a rendszer egy kétköpenyű hiperboloid felső levelén mozoghat.

Melyekkel kifejezve a  $K_i$  operátorok:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -\frac{1}{2} (a^\dagger b^\dagger + ab) \\
 K_2 &= -\frac{i}{2} (ab - a^\dagger b^\dagger) \\
 K_3 &= \frac{1}{2} (a^\dagger a + b^\dagger b + 1)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Az alábbi unitér operátor bevezetésével  $H(X)$ -et egy egyszerűbb alakra hozhatjuk, mellyel könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeit:

$$U(\theta, \varphi) = \exp [i\theta (-\sin \varphi K_1 + \cos \varphi K_2)] \tag{2.8}$$

Ekkor a Baker–Campbell–Hausdorff formulát felhasználva belátható, hogy:

$$H(X) = X \cdot K = U(\theta, \varphi) r K_3 U^\dagger(\theta, \varphi) \tag{2.9}$$

Tehát  $r = 1$  esetén  $K_3$  és  $H(X)$  sajátértékei megegyeznek, és értékük a (2.7)-es egyenlet alapján a csatolatlan harmonikus oszcillátorok sajátértékeinek fele:

$$K_3 |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 = \frac{1}{2} (n + m + 1) |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 \quad (2.10)$$

$$H(X) |n, m; X\rangle = \frac{1}{2} (n + m + 1) |n, m; X\rangle \quad (2.11)$$

Az  $SO(2,1)$  Lie algebra  $2 \times 2$ -es mátrixokkal vett reprezentációjában bebizonyítható, hogy az  $U(\theta, \varphi)$  unitér operátor az alábbi alakra hozható:

$$U(\theta, \varphi) = \exp[\bar{\eta}K_+] \exp\left[\log\left(1 - |\eta|^2\right) K_3\right] \exp[-\eta K_-] \quad (2.12)$$

Ahol

$$K_{\pm} = K_1 \pm iK_2 \quad (2.13)$$

$$\eta = \tanh(\theta/2) \exp(i\varphi) = \frac{X_1 + iX_2}{X_3 + r} \in \mathbb{D} \quad (2.14)$$

Ahol  $\eta$  egy sztereografikus projekció,  $r = 1$  esetén a vizsgált hiperboloid levelet levetíti a komplex egységkörbe. Az így képzett projekciót nevezzük Poincaré-körmodellnek.

## 2.2. Vákuum állapot összefonódottsági entrópiája

A Hamilton-operátor ügyes átalakításával, meghatároztuk a sajátértékeit a paraméterterbeli hiperboloid minden pontjára, azonban a sajátállapotait kezdetben csak az  $X = (0,0,1)$  pontban lehet könnyen megmondani, hiszen itt  $H(0,0,1) = K_3 = \frac{1}{4} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$ , mely egy kétdimenziós izotróp harmonikus oszcillátor Hamilton-operátora. A sajátállapot tehát nem más mint két oszcillátor sajátfüggvény szorzata:

$$|n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 = \psi_n(q_1) \psi_m(q_2) \quad (2.15)$$

Ahol:

$$\psi_k(q) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^k k!}} H_k(q) \exp\left(-q^2/2\right) \quad (2.16)$$

Melyben a  $H_k(q)$  függvény jelöli a  $k$ . Hermite-polinomot.

Ebben a fejezetben a vákuum állapot, azaz a legalacsonyabb energiaszintű kvantum állapot változását tárgyaljuk a hiperboloid különböző pontjaiban. Az általános  $X$  pontban található vákuum állapot előállítható úgy, hogy az  $U(\theta, \varphi)$  operátort hattatjuk a  $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$  állapoton:

$$\begin{aligned} |0,0; X\rangle &= U(X) |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \\ &= \cosh^{-1} \frac{\theta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\tanh \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right)^k |k\rangle_1 \otimes |k\rangle_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ahhoz, hogy a fenti számolást elvégezzük, érdemes  $U(X)$ -nek a (2.12)-es egyenletben felírt alakját használni, és egymás után hattatni a  $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$  állapoton az exponenciális operátorokat.

A kapott eredményünk koordináta reprezentációban kifejezve:

$$\langle q_1, q_2 | 0,0; X \rangle = \cosh^{-1} \frac{\theta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\tanh \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right)^k \psi_k(q_1) \psi_k(q_2) \quad (2.18)$$

Mivel most a rendszerünket a hiperboloid egy általános pontjában vizsgáljuk, a Hamilton-operátorban megjelenik  $K_1$  és  $K_2$  is, tehát feltehetően  $|0,0; X\rangle$  már nem egy szeparálható állapot. Az összefonódottság kvantitatív elemzéséhez érdemes kiszámolnunk a sűrűségoperátorunk koordináta reprezentációban:

$$\varrho^{0,0}(q_1, q'_1; q_2, q'_2) = \langle q_1, q_2 | \varrho^{0,0} | q'_1, q'_2 \rangle = \langle q_1, q_2 | 0,0; X \rangle \langle 0,0; X | q'_1, q'_2 \rangle \quad (2.19)$$

Ezt ismerve, meghatározható az 1-es oszcillátor redukált sűrűségmátrixa az (1.7)-es egyenlet alapján. Koordináta reprezentációban tehát ki kell integrálnunk a 2. oszcillátor szabadsági fokait:

$$\begin{aligned} \varrho_1^{0,0}(q_1, q'_1) &= \text{Tr}_2 (\varrho^{0,0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q_1, q_2 | 0,0; X \rangle \langle 0,0; X | q'_1, q_2 \rangle dq_2 = \\ &= \left( 1 - \tanh^2 \frac{\theta}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \tanh^{2k} \frac{\theta}{2} \psi_k(q_1) \psi_k(q'_1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Itt felhasználtuk, hogy a harmonikus oszcillátor sajátfüggvények ortonormáltak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_k(q_2)} \psi_l(q_2) dq_2 = \delta_{kl} \quad (2.21)$$

Ahhoz hogy kiszámolhassuk az összefonódottsági entrópiát, szükségünk van még  $\varrho_1^{0,0}$  sajátértékeire. Ezeket ismerve, a Schmidt-felbontásnak köszönhetően az entrópia már könnyen meghatározható. Tehát az alábbi integráloperátor sajátérték egyenletét kell megoldanunk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_1^{0,0}(q_1, q'_1) f_n(q'_1) dq'_1 = p_n f_n(q_1) \quad (2.22)$$

Mivel  $\varrho_1^{0,0}$  egy végtelen sorként áll elő, így könnyen láthatjuk, hogy a sajátfüggvények a harmonikus oszcillátor sajátfüggvényei lesznek:

$$f_n(q_1) = \psi_n(q_1) \quad (2.23)$$

Ezt behelyettesítve a (2.22)-as egyenletbe, a sajátértékekre az alábbi kifejezést kapjuk:

$$p_n = \left(1 - \tanh^2 \frac{\theta}{2}\right) \tanh^{2n} \frac{\theta}{2} = (1 - |\eta|^2) |\eta|^{2n} \quad (2.24)$$

Fontos észrevennünk, hogy a tanh függvény értékészletéből adódóan  $0 < |\eta| < 1$ . Ez pedig egy elengedhetetlen feltétel ahhoz, hogy  $p_n$  egy jól definiált valószínűségi eloszlást írjon le és, hogy az entrópia kifejezése egy konvergens sor legyen.

Az alapállapotí összefonódottsági entrópia tehát:

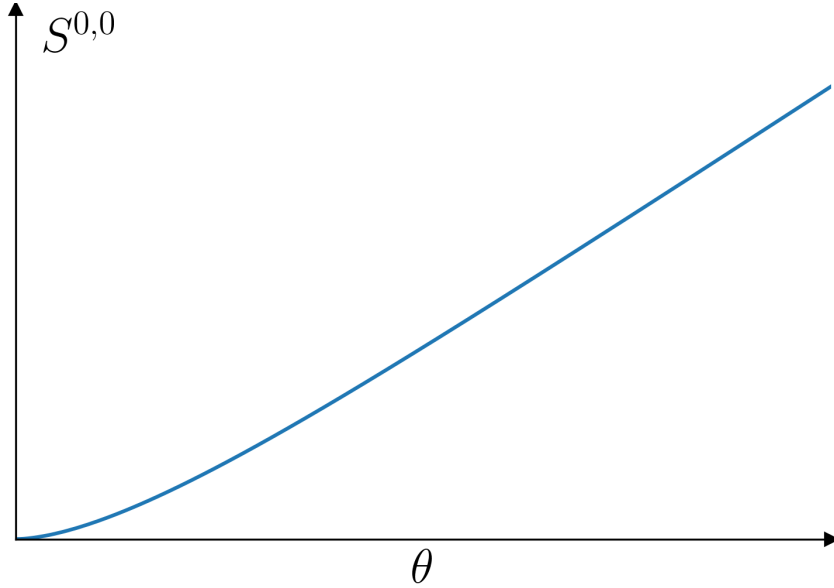
$$\begin{aligned} S^{0,0} &= -\text{Tr}(\varrho_1 \log \varrho_1) = -\sum_{n=0}^{\infty} p_n \log p_n = \\ &= -\log(1 - |\eta|^2) - \frac{|\eta|^2}{1 - |\eta|^2} \log |\eta|^2 = \\ &= 2 \left[ \cosh^2 \frac{\theta}{2} \log \left( \cosh \frac{\theta}{2} \right) - \sinh^2 \frac{\theta}{2} \log \left( \sinh \frac{\theta}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mely a  $\theta = 0$  pontban valóban visszaadja a szeparálható állapotokhoz tartozó  $S^{0,0}(\theta = 0) = 0$  értéket. Vegyük észre, hogy az entrópia kifejezése független  $\varphi$  értékétől, ahogy már maga a redukált sűrűségoperátor is az volt.

Egy még érdekesebb geometriai következtetést vonhatunk le akkor, ha kiszámoljuk a paramétertérbeli hiperboloid  $(0,0,1)$  és tetszőleges  $X$  pontját összekötő geodetikusanak hosszát. Erre a következő eredményt kapjuk:

$$d[(0,0,1), X] = \theta \quad (2.26)$$

Tehát a vákuum állapot összefonódottsági entrópiája explicit függvénye a paramétertérbeli hiperboloid adott pontján átmenő geodetikus hosszának.



2. ábra.  $S^{0,0}$  változása a geodetikus hosszának függvényében.

A  $|0,0; \theta, \pi\rangle$  állapotot a szakirodalomban összefonódott Gauss-állapotnak nevezik. Ez az állapot fontos szerepet tölt be a kvantum optikában, ahol a két szempontú, nem degenerált összenyomott vákuum állapotot generálják. Általánosan az alábbi alakban írhatóak [3]:

$$\sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \psi_k(q_1) \psi_k(q_2) \quad (2.27)$$

Ahol  $\lambda = \tanh r$ , ahol a mi esetünkben az összenyomó paraméter  $r = \frac{\theta}{2}$ . A redukált sűrűségmátrix és az entrópia szempontjából azonban a  $|0,0; X\rangle$  állapot tetszőleges  $\varphi$  esetén is egy összefonódott Gauss-állapotként viselkedik. Ez az állapot fontos szerepet tölt be a folytonos változójú (CV) kvantum állapotok teleportációjában, a két qubit esetén használt Bell-állapotoknak egy általánosítása. Ezen analógiát részletesebben tárgyaljuk a 3. fejezetben.

### 2.3. Vákuum állapot kétszeres összefonása

Az előző fejezetben kapott eredményünkben a vákuum állapot összefonódottsági entrópiája független volt a paramétertér  $\varphi$  koordinátájától, azonban most szeretnénk egy olyan esetet tárgyalni, ahol ez nem igaz. A lehető legegyszerűbb ilyen elrendezést akkor kaphatjuk, mikor a vákuum állapotot kétszer haddatjuk az  $U(X)$  operátort különböző irányok szerint. A függelékben tárgyaljuk, hogy ez tulajdonképpen két paramétertérbeli, nem kollineáris

Lorentz boostnak felel meg. Ezek eredménye egy harmadik Lorentz boost és egy forgatás, melyet Wigner-rotációnak nevezünk. Az új boost és forgatás is  $\varphi$  függő mennyiség lesz, azonban kiderül majd, hogy a Wigner-szög nem jelenik meg a transzformáció utáni kifejezésében. A vizsgált állapot:

$$|0,0; X, \widetilde{X}\rangle = U(\lambda, \varphi)U(\theta, 0) |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \quad (2.28)$$

melyet a (2.12)-es egyenlet alapján az alábbi alakban írhatunk fel:

$$\frac{1}{\cosh \frac{\theta}{2}} e^{\widetilde{\eta} K_+} e^{\log(1-|\widetilde{\eta}|^2) K_3} e^{-\widetilde{\eta} K_-} e^{\tanh \frac{\theta}{2} K_+} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \quad (2.29)$$

Ahol most  $\widetilde{\eta} = \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}$ . Ezen exponenciális operátorokat hattathatnánk a vákuum állapoton, de az így kapott redukált sűrűségmátrixunk nem lenne diagonális, ezért ismertetünk néhány azonosságot, melyet könnyen beláthatunk az  $SO(2,1)$  Lie algebra  $2 \times 2$ -es mátrixokkal vett reprezentációjában. Az első egyenlet:

$$\begin{aligned} \exp(-\widetilde{\eta} K_-) \exp\left(\tanh \frac{\theta}{2} K_+\right) &= \exp(a K_+) \exp(b K_-) \exp(c K_3) \\ a &= \frac{\tanh \frac{\theta}{2}}{1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}} \\ b &= -\tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi} \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \\ e^{c/2} &= \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Melyet felhasználva az állapotunk az alábbi alakra hozható:

$$\frac{1}{\cosh \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}} e^{\widetilde{\eta} K_+} e^{\log(1-|\widetilde{\eta}|^2) K_3} e^{a K_+} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \quad (2.31)$$

Ezt egy még kedvezőbb alakra hozhatjuk az alábbi azonossággal:

$$\begin{aligned} \exp\left[\log(1-|\widetilde{\eta}|^2) K_3\right] \exp(a K_+) &= \exp(c K_+) \exp(d K_-) \\ c &= \frac{\tanh \frac{\theta}{2} (1 - \tanh \frac{\lambda}{2})}{1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}} \\ e^{d/2} &= \frac{1}{\cosh \frac{\lambda}{2}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Melley az összefonódott állapotunk koordináta reprezentációban felírva:

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2 | 0, 0; X, \widetilde{X} \rangle &= \frac{1}{\cosh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \tanh \frac{\lambda}{2} + \frac{\tanh \frac{\theta}{2} (1 - \tanh \frac{\lambda}{2})}{1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}} \right)^n \psi_n(q_1) \psi_n(q_2) \end{aligned} \quad (2.33)$$

A redukált sűrűségmátrix:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varrho}_1^{0,0}(q_1, q'_1) &= \frac{(1 - \tanh^2 \frac{\theta}{2}) (1 - \tanh^2 \frac{\lambda}{2})}{\left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(\tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(\tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)}{\left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)} \right]^n \psi_n(q_1) \psi_n(q'_1) \\ &= (1 - t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(q_1) \psi_n(q'_1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$t = \frac{(\eta + \widetilde{\eta}) (\eta + \overline{\widetilde{\eta}})}{(1 + \eta \widetilde{\eta}) (1 + \eta \overline{\widetilde{\eta}})} \quad \eta = \tanh \frac{\theta}{2}, \quad \widetilde{\eta} = \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi} \quad (2.35)$$

Ahol  $t \in [0, 1[$ , tehát a  $p_n$  sajátértékek ismét egy jól meghatározott valószínűségi eloszlást írnak le, és az entrópia kifejezése sem lesz divergens:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^{0,0} &= -\log(1 - t) - \frac{t}{1 - t} \log t = \\ &-\log \left[ \frac{(1 - \tanh^2 \frac{\theta}{2}) (1 - \tanh^2 \frac{\lambda}{2})}{\left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)} \right] \\ &- \frac{\left(\tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(\tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)}{(1 - \tanh^2 \frac{\theta}{2}) (1 - \tanh^2 \frac{\lambda}{2})} \\ &\log \left[ \frac{\left(\tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(\tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)}{\left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi}\right) \left(1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi}\right)} \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ez egy meglehetősen bonyolult kifejezés, mely valóban nem független  $\varphi$ -től, de egy ügyes átalakítással egyszerűbb alakra hozhatjuk.

Aravind egy 1997-es cikkében [4] tisztán geometriai megfontolások alapján, rapiditás háromszögeket vizsgálva kiszámította  $2 \oplus 1$  dimenzióban két nem kollineáris Lorentz boost hatását. Egy Lorentz boostot az  $L(\theta, \varphi)$  operátorral jelölve, ahol  $\theta$  a rapiditás és  $\varphi$  az x tengellyel bezárt pozitív irányított szög, az alábbi eredményt kapjuk:

$$L(\lambda, \varphi)L(\theta, 0) = R(\Omega)L(\xi, \psi) = L(\Omega, \psi - \Omega)R(\Omega) \quad (2.37)$$

Ahol  $R(\Omega)$  jelöl egy pozitív irányított szögű forgatást az xy síkban az  $\Omega$  Wigner-szöggel. Az alábbi összefüggés áll ekkor fent:

$$\cosh \xi = \cosh \theta \cosh \lambda + \cos \varphi \sinh \theta \sinh \lambda \quad (2.38)$$

Algebrai átalakításokkal belátható, hogy ekkor:

$$\left| \tanh \frac{\xi}{2} e^{i\psi} \right|^2 = \frac{\left( \tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi} \right) \left( \tanh \frac{\theta}{2} + \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi} \right)}{\left( 1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{i\varphi} \right) \left( 1 + \tanh \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\lambda}{2} e^{-i\varphi} \right)} \quad (2.39)$$

Mely formálisan megegyezik az általunk definiált  $t$  értékével a (2.35)-es egyenletben. Tehát úgy tűnik, a kétszeresen transzformált vákuum állapot entrópiája valójában megegyezik az előző fejezetben tárgyalt egyszeresen transzformálttal, másképp fogalmazva, a vákuum állapoton úgy hat a Wigner-rotáció, mint az identitás operátor. Persze ez még csak egy formális megfeleltetés, pontos eredményt akkor kaphatunk, ha az  $U(\theta, \varphi)$  operátort ismét az  $SU(1,1)$  reprezentációban vizsgáljuk, és megnézzük a hatását a Lorentz csoportnak az  $SL(2, \mathbb{C})$  ábrázolásában. Ezt részletesen tárgyaljuk a Függelékben, ahol eredményként azt kapjuk, hogy  $U(\theta, \varphi)$  valóban egy Lorentz boostnak feleltethető meg, ahol  $\theta$  a rapiditás  $\varphi$  pedig az y tengellyel bezárt szög. Tehát valóban helyes a formális megfeleltetés, hiszen Aravind geometriai bizonyításában a koordináta rendszerünket elforgathatjuk  $90^\circ$ -al, és úgylis ezt az eredményt kapjuk.

Összefoglalván, a vákuum állapoton hattatott két  $U(X)$  operátor felírható úgy, mint egy darab unitér operátor hatása:

$$U(\lambda, \varphi)U(\theta, 0) |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = U(\xi, \phi) |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \quad (2.40)$$

Ahol a (2.38) a  $\xi$ -t definiáló egyenlet. Az összefonódottsági entrópia pedig:

$$\widetilde{S}^{0,0} = 2 \left[ \cosh^2 \frac{\xi}{2} \log \left( \cosh \frac{\xi}{2} \right) - \sinh^2 \frac{\xi}{2} \log \left( \sinh \frac{\xi}{2} \right) \right] \quad (2.41)$$



Jelen esetben is a  $(0,0)$  és  $(\xi,\phi)$  pontot összekötő geodetikus hosszától függ csak az entrópia kifejezése, mely most:  $d[(0,0),(\xi,\phi)] = \xi$ .

## 2.4. Összefonódott gerjesztett állapotok

Egy korábbi fejezetben meghatároztuk az összefonódott vákuum állapot entrópiáját és megállapítottuk, hogy a hiperboloid egy általános pontjában az összenyomott Gauss-állapotok alkotják  $H(X)$  alapállapotát. Most azt vizsgáljuk meg, hogy miként fonódik össze egy gerjesztett oszcillátor állapot, ha hattatjuk rajt az  $U(X)$  operátort. A kezdőállapotunk először legyen  $K_3$ -nak egy egyszeresen gerjesztett sajátállapota. Tehát feltesszük, hogy a 2-es oszcillátor alapállapotban, az 1-es viszont egy tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  gerjesztett állapotban van az  $X = (0,0,1)$  pontban. Ekkor az unitér operátor hatása a következő:

$$\begin{aligned} |n,0; X\rangle &= U(X) |n\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(n+l)!}{n!l!}} (-\bar{\eta})^l \left(\cosh \frac{\theta}{2}\right)^{-(n+1)} |n+l\rangle_1 \otimes |l\rangle_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Az összefonódottsági entrópia meghatározásához pedig ismét érdemes kiszámolnunk az egyik alrendszer redukált sűrűségmátrixát:

$$\begin{aligned} \varrho_1^{n,0}(q_1, q'_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle q_1, q_2 | n, 0; X \rangle \langle n, 0; X | q'_1, q_2 \rangle dq_2 = \\ &= \left(\frac{1}{\cosh \frac{\theta}{2}}\right)^{2(n+1)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(n+l)!}{n!l!} \tanh^{2l} \frac{\theta}{2} \psi_{n+l}(q_1) \psi_{n+l}(q'_1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Melynek sajátfüggvényeit ismét közvetlen leolvashatjuk, hiszen  $\varrho_1^{n,0}(q_1, q'_1)$  mátrixa diagonális. Az  $m$ . sajátfüggvény és a hozzá tartozó sajátérték:

$$\begin{aligned} f_m(q_1) &= \psi_{n+m}(q_1) \\ p_m &= \left(\frac{1}{\cosh \frac{\theta}{2}}\right)^{2(n+1)} \frac{(n+m)!}{n!m!} \tanh^{2m} \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Az összefonódottsági entrópia Schmidt-felbontásból kapott végtelen sora:

$$\begin{aligned} S^{n,0}(\theta) &= 2(n+1) \left[ \cosh^2 \frac{\theta}{2} \log \left( \cosh \frac{\theta}{2} \right) - \sinh^2 \frac{\theta}{2} \log \left( \sinh \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &\quad - \left(\frac{1}{\cosh \frac{\theta}{2}}\right)^{2(n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} \tanh^{2m} \frac{\theta}{2} \log \left[ \frac{(n+m)!}{n!m!} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Mely a vártaknak megfelelően, az  $n = 0$  esetben visszaadja a vákuum állapot entrópiájának kifejezését.

Most is teljesül a geometriai analógia, miszerint az egyszerűen gerjesztett oszcillátor állapotok entrópiája függvény kapcsolatban áll a  $(0,0,1)$  és  $X$  pontot összekötő geodetikus hosszával, hiszen a  $\varphi$  függés most is eltűnt a redukált sűrűségmátrix kifejezésében.

Végül vizsgáljuk meg  $H(X)$  egy általános sajátállapotát, ahol egy kezdeti  $|n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2$  állapoton hattatjuk az  $U(X)$  operátort. Az így kapott eredmény:

$$\begin{aligned}
|n,m; X\rangle &= U(X) |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 = \\
&\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \sqrt{\binom{n}{k} \binom{m}{k} \binom{n-k+l}{l} \binom{m-k+l}{l}} \\
&\eta^k (-\bar{\eta})^l \left( \cosh \frac{\theta}{2} \right)^{-(n+m-2k+1)} |n-k+l\rangle_1 \otimes |m-k+l\rangle_2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Mely  $\varphi = 0$  és  $\varphi = \pi$  esetén az alábbi egyszerű alakra hozható a Mehler formula egy általánosításával [5]:

$$\begin{aligned}
|n,m; \theta, 0\rangle &= \psi_n \left( x \cosh \frac{\theta}{2} + y \sinh \frac{\theta}{2} \right) \psi_m \left( y \cosh \frac{\theta}{2} + x \sinh \frac{\theta}{2} \right) \\
|n,m; \theta, \pi\rangle &= \psi_n \left( x \cosh \frac{\theta}{2} - y \sinh \frac{\theta}{2} \right) \psi_m \left( y \cosh \frac{\theta}{2} - x \sinh \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Sejtésünk szerint reprezentációelméletbeli megfontolások alapján meghatározható az összefonódottsági entrópia ezen két esetre, azonban még nem tudtuk meghatározni az alakját. Az  $U(X)$  operátor ezen két esetben egy  $\pm \frac{\theta}{2}$  rapiditású Lorentz boostként viselkedik az állapotok argumentumában, ahogy azt a Függelék (B.3) egyenletében is láthatjuk. A későbbiekben szeretnénk kapcsolatot találni a Lorentz csoport  $SU(1,1)$  reprezentációja és az állapotunk Schmidt-felbontása között, mellyel diagonalizálhatnánk a redukált sűrűségoperátorunk.

### 3. Az összefonó operátor analógiája a kvantum-információelméletben

Ezen fejezetben szeretnénk az  $U(X)$  operátornak, melyről tudjuk, hogy egy paramétertérbeli Lorentz boostnak felel meg, adni egy kvantum-információelméletbeli jelentést is. Pontosabban azt fogjuk látni, hogy ez az operátor egy kvantum kapuként viselkedik, méghozzá, ha a vákuum állapoton hat, akkor a CNOT kapunak egy általános alakjaként gondolhatunk rá.

Bennett [6] 1993-ban belátta, hogy egy ismeretlen kétállapotú kvantum rendszert (qubitet) hibamentesen átvihetünk egy feladó A helyzetéből egy vevő B helyzetébe, ezt a jelenséget nevezzük kvantum teleportációnak. Ehhez pedig az szükséges, hogy A és B egy maximálisan összefonódott Bell-állapot egy-egy tagjával rendelkezzenek. Később pedig Furasawa [7] Braunstein és Kimble [8] felvetése alapján megmutatta, hogy kontinuum sok állapotú, azaz folytonos változójú kvantum állapotokat is teleportálhatunk egy összenyomott vákuum állapottal. A teleportáció folyamatát röviden összefoglaljuk, a részletes leírás pedig megtalálható Milburn és Braunstein cikkében [9], illetve Walls és Milburn könyvének [10] a 16. fejezetében.

Tételezzük fel, hogy a (2.27)-as egyenletben leírt összenyomott vákuum állapotnak egy-egy összefonódott alrendszerét megkapja Alíz és Bob, a feladója és a fogadója a teleportálni kívánt folytonos kvantum állapotnak.

$$|\varepsilon\rangle_{AB} = \sqrt{1 - \tanh^2 r} \sum_{k=0}^{\infty} \tanh^k r |k\rangle_A \otimes |k\rangle_B \quad (3.1)$$

Ahol a mi esetünkben  $r = \theta/2$ .  $|\varepsilon\rangle_{AB}$ -t úgy kaptuk, hogy a  $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$  vákuum állapoton hattattuk az  $U(X)$  operátort. Bevezetve a kvadratúra fázis operátorokat a két módusra beláthatjuk, hogy az  $r \rightarrow \infty$  határesetben  $|\varepsilon\rangle_{AB}$  egy EPR állapotba tart.

$$\begin{aligned} \hat{X}_A &= a + a^\dagger & \hat{P}_A &= -i(a - a^\dagger) \\ \hat{X}_B &= b + b^\dagger & \hat{P}_B &= -i(b - b^\dagger) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{Var}(\hat{X}_A - \hat{X}_B) = \text{Var}(\hat{P}_A + \hat{P}_B) = 2e^{-2r} \quad (3.3)$$

Tehát, ha  $r \rightarrow \infty$ , akkor  $|\varepsilon\rangle_{AB}$  egyaránt lesz sajátállapota az  $\hat{X}_A - \hat{X}_B$  és  $\hat{P}_A + \hat{P}_B$  operátoroknak. Ez pedig azon EPR állapot analógiája, ahol a pozíciókat és momentumokat kicseréljük a megfelelő kvadratúra operátorokra. Ekkor a teleportálni kívánt kvantum állapotunkat jelölje  $|\psi\rangle_C$ , melyet egy harmadik fél preparált, tehát Alíz és Bob számára ismeretlen. Alíz elvégez egyszerre két projektív QND (quantum nondemolition) mérést az  $\hat{X}_C - \hat{X}_A$  és

$\hat{P}_C + \hat{P}_A$  operátorokon, melyet megtehet, hiszen ez a két mennyiség kommutál egymással. A közös mérés az  $|X, P\rangle_{CA}$  állapotba vetíti le kezdeti állapotot:

$$|X, P\rangle_{CA} = \exp\left(-\frac{i}{2}\hat{X}_A\hat{P}_C\right) |X\rangle_C \otimes |P\rangle_A \quad (3.4)$$

Ahol  $|X\rangle_C$  és  $|P\rangle_A$  a kvadratúra fázis operátorok sajátállapotai:

$$\begin{aligned} \hat{X}_C |X\rangle_C &= X |X\rangle_C \\ \hat{P}_A |P\rangle_A &= P |P\rangle_A \end{aligned} \quad (3.5)$$

A teljes rendszer (nem normalizált) állapota a mérések után:

$$|\Psi_{\text{out}}^{(X,P)}\rangle = {}_{CA} \langle X, P | \psi \rangle_C |\varepsilon\rangle_{AB} \otimes |X, P\rangle_{CA} \quad (3.6)$$

Ekkor pedig belátható, hogy Bob állapota a mérés után egy olyan  $|\phi^{(X,P)}(r)\rangle_B$  tiszta állapotba ugrott, melyet az  $\hat{X}_B$  koordináta reprezentációban az alábbi integrál ír le:

$$\phi^{XP}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-\frac{i}{2}x'Y} \varepsilon(x, x') \psi(X + x') \quad (3.7)$$

Ahol  $\psi(x) = {}_C \langle x | \psi \rangle_C$  a teleportálni kívánt állapot hullámfüggvénye. Abban az esetben mikor  $r \rightarrow \infty$  az integrál operátor magja egy Dirac-deltába tart:  $\mathcal{G}(x_1, x_2; r) \rightarrow \delta(x_1 + x_2)$  és Bob állapota a következő lesz:

$$|\phi_{XP}(r)\rangle_B \rightarrow e^{-\frac{i}{2}P\hat{X}_B} e^{\frac{i}{2}X\hat{P}_B} |\psi\rangle_B \quad (3.8)$$

Ami a fázistérbeli unitér translációk után valóban visszaadja a teleportálni kívánt  $|\psi\rangle$  állapotot.

Az összenyomott vákuum állapotnak az  $r \rightarrow \infty$  határesetben kapott értéke egy EPR állapot, melynek valójában nincs fizikai értelme, hiszen a kvadratúra fázis sajátállapotoknak végtelen nagy az energiájuk. A kvadratúra EPR állapot előáll az A és B állapotokon végzett QND méréssel. Az  $|X, P\rangle_{AB}$  állapot a (3.4)-es egyenlet alapján vett definícióval egyaránt sajátállapota az  $\hat{X}_A - \hat{X}_B$  és  $\hat{P}_A + \hat{P}_B$  operátoroknak, ahol a sajátértékek:

$$\begin{aligned} (\hat{X}_A - \hat{X}_B) |X, P\rangle_{AB} &= X |X, P\rangle_{AB} \\ (\hat{P}_A + \hat{P}_B) |X, P\rangle_{AB} &= P |X, P\rangle_{AB} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tehát ez egy QND összekapcsolást ad az A és B állapotok között. Érdeemes észrevennünk, hogy minden QND kapcsolás összefonja a mért állapotokat, ezáltal egy potenciális eszköze a kvantum teleportációnak. Az eredeti kétállapotú teleportáció során egy qubit Bell-állapotot használtak, melyet

egy Hadamard és egy CNOT kapu együttese állított elő a  $|0\rangle|0\rangle$  állapotból, ebben az esetben a CNOT kapu teremti meg az összefonódást. Maga a CNOT kapu is egy QND mérésen alapul, ahol a target qubit segítségével mérhetjük meg a control qubit állapotát. Akkor változik meg a target qubit állapota, ha a control qubit az  $|1\rangle$ -es állapotban található, ellenben ha a control qubit állapot  $|0\rangle$ , akkor a target qubit változatlan marad. A CNOT kaput definiáló mátrix és a hatása a qubit bázison:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{CNOT} : \begin{cases} |00\rangle \mapsto |00\rangle \\ |01\rangle \mapsto |01\rangle \\ |10\rangle \mapsto |11\rangle \\ |11\rangle \mapsto |10\rangle \end{cases} \quad (3.10)$$

Tehát az  $U(\theta, \varphi)$  operátorunk a  $\theta \rightarrow \infty$  határesetben egy QND kapuként viselkedik, mely a CNOT kapunak a CV (continuous variable) megfelelője.

## 4. Összefoglalás

A dolgozatban két harmonikus oszcillátor összefonódását vizsgáltuk egy  $\text{SO}(2,1)$  szimmetrikus Hamilton operátor hatása alatt:

$$H = K \cdot X, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K^k \quad (4.1)$$

Ahol  $X \in \mathbb{R}^{2+1}$  egy paramétertér, melyben az  $\text{SO}(2,1)$  csoportra szimmetrikus hiperboloid felső levelén számítottuk ki a rendszer néhány sajátállapotának összefonódottsági entrópiáját. Nevezetesen az  $X = (0,0,1)$ -ben kapott  $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$  vákuum állapot és  $|n\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$  egyszeresen gerjesztett állapotokat mozgattuk el egy tetszőleges  $X$  pontba egy  $U(X)$  unitér operátorral, és mindkét esetben kiderült, hogy a von-Neumann entrópia függvény kapcsolatban áll a hiperboloid két pontját összekötő geodetikus hosszával. A vákuum állapotot az  $U(X)$  operátor az ún. összefonódott Gauss-állapotba viszi, mely fontos szerepet tölt be a kvantum optikában, nevezetesen a fény összenyomott vákuum állapotát írja le. Vizsgáltuk még, hogy mi történik, ha a vákuum állapotot kétszer haddatjuk az  $U(X)$  operátort különböző paraméterekkel, de arra az eredményre jutottunk, hogy ez továbbra is egy eltolást jelent az hiperboloidon, csak egy harmadik irányban. Ennek szemléletes jelentését akkor értettük meg, mikor csoportelméleti megfontolásokkal rájöttünk, hogy  $U(X)$  egy  $2 \oplus 1$  dimenziós téridőben értelmezett Lorentz boostnak felel meg a paramétertérben. A vákuum állapotot végzett két nem kollineáris boost esetén pedig nem jelent meg a Wigner-rotáció jelensége. Az  $U(X)$  operátornak még találtunk egy másik analógiáját is a kvantum-információelméletben, ahol a

CNOT kapunk egy folytonos megfelelőjeként értelmezhetjük, egy ún. QND (quadrature nondemolition) kapuként.

## 5. Kitekintés

A dolgozatban tárgyalt kétoszillátoros modellnek számos eredményét láthattuk. A paraméterterületi hiperboloid egy általános pontjában megjelenő összenyomott Gauss-állapot betekintést adott nekünk a CV (continuous variable) kvantum teleportáció tárgyalásába. Ezen állapotról megállapítottuk, hogy a 2 qubit esetén tárgyalt Bell-állapotoknak egy általánosítása.

A későbbiekben szeretnénk még tárgyalni tetszőleges  $N$  oszcillátor geometriai csatolását is, ahol  $N \in \mathbb{N}_\infty$  akár végtelen nagy is lehet. Ezáltal szeretnénk mélyebben megérteni az  $AdS_{d+1}/CFT_d$  megfeleltetés filozófiáját, ugyanis az ott megjelenő kvantumtérelmélet egy végtelen szabadsági fokú rendszert ír le.

Illetve a legalapvetőbb folytatása a dolgozatunknak a két oszcillátor esetén tárgyalt általános  $|n, m; X\rangle$  gerjesztett állapot összefonódottsági entrópiájának tárgyalása, melyet sejtésünk szerint a reprezentációelmélet segítségével írhatunk le.

## A. Hiperbolikus tér geodetikusainak hossza

A (2.26)-es egyenletben leírt állítást szeretnénk bizonyítani variációs módszerek segítségével.

**1. Állítás.**  $a, b \in \mathbb{H}$  két tetszőleges pontja közti távolság:

$$d(a, b) = \operatorname{arccosh}(-a \cdot b) \quad (\text{A.1})$$

*Bizonyítás.* Egy tömegpont Lagrange függvénye, figyelembe véve a kényszert, hogy csak a  $\mathbb{H}$  hiperboloid felső levelén mozoghat:

$$L(x, \dot{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \lambda (x^2 + 1) \quad (\text{A.2})$$

Ahol  $x = x(\tau)$  és  $x^2 = x \cdot x = x^1 x^1 + x^2 x^2 - x^3 x^3$ . A mozgást az Euler-Lagrange egyenletek adják meg:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\lambda x \\ x^2 &= -1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Az utóbbi egyenlet  $\tau$  szerinti implicit deriváltját véve kétszer:

$$\begin{aligned}x \cdot \dot{x} &= 0 \\x \cdot \ddot{x} &= -\dot{x}^2\end{aligned}\tag{A.4}$$

Melyből következik, hogy:

$$\dot{x}^2 = 2\lambda \equiv \text{const} =: D\tag{A.5}$$

Mivel szkleronóm a kényszerünk. Az (A.3)-as mozgásegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned}x^\mu(\tau) &= u^\mu e^{\sqrt{D}\tau} + v^\mu e^{-\sqrt{D}\tau} \\u^2 = v^2 &= 0 \\u \cdot v &= -\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{A.6}$$

Egy geodetikus hossza tehát:

$$d(1,2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\dot{x}^2} d\tau = \sqrt{D} (\tau_2 - \tau_1)\tag{A.7}$$

Végül pedig behelyettesítéssel könnyen beláthatjuk, hogy:

$$-x(\tau_1) \cdot x(\tau_2) = \cosh \left[ \sqrt{D} (\tau_2 - \tau_1) \right]\tag{A.8}$$

□

Abban a speciális esetben, mikor  $a = (0,0,1)$  és  $b = X$ :

$$\begin{aligned}\text{arccosh}(-a \cdot b) &= \\ \text{arccosh}[-\sinh 0 \sinh \theta (\cos 0 \cos \varphi + \sin 0 \sin \varphi) + \cosh 0 \cosh \theta] &= \theta\end{aligned}\tag{A.9}$$

## B. $U(X)$ operátor $SU(1,1)$ reprezentációja

Az  $SU(1,1)$  algebrában felírva a  $K_i$  operátorok:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{i}{2}\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \frac{i}{2}\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \frac{1}{2}\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{B.1}$$

Ekkor valóban teljesül a (2.2)-es egyenletben leírt kommutációs reláció. A (2.8)-as egyenlet alapján ekkor az  $U(\theta, \varphi)$  unitér operátor alakja pedig:

$$U(\theta, \varphi) = \exp\left(\frac{i\theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix}\right)^n \quad (\text{B.2})$$

A sorfejtést elvégezve az eredmény két mátrix összegére bomlik, ahol a mátrixot szorzó együtthatókban észrevehetjük a  $\cosh \frac{\theta}{2}$  és  $\sinh \frac{\theta}{2}$  Taylor sorát:

$$\begin{aligned} U(\theta, \varphi) &= \left(1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \dots\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right) \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} & i \sinh \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -i \sinh \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cosh \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

### C. $U(X)$ operátor megfeleltetése egy Lorentz boosként

A  $2 \oplus 1$  dimenziós téridő Lorentz csoportja homomorf  $SU(1,1)$ -el<sup>2</sup>, ahol egy általános  $X \in SU(1,1)$  csoportelem:

$$X = \begin{bmatrix} t & x - iy \\ x + iy & t \end{bmatrix}, \quad \det X = t^2 - x^2 - y^2 \quad (\text{C.1})$$

Ekkor  $U(\theta, \varphi) \in SU(1,1)$  hatása a csoportelemen:

$$X'(\theta, \varphi) = U(\theta, \varphi) X U^\dagger(\theta, \varphi) \quad (\text{C.2})$$

Mely egy meglehetősen bonyolult kifejezésekkel teli mátrixot ad. Mi most csak két speciális esetet tárgyalunk, a  $\varphi = \pi/2$  és  $\varphi = \pi$  esetet, melyek során az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t' & x' - iy' \\ x' + iy' & t' \end{bmatrix} &= U(\theta, \pi/2) X U^\dagger(\theta, \pi/2) \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \theta t + \sinh \theta x & \cosh \theta x + \sinh \theta t - iy \\ \cosh \theta x + \sinh \theta t + iy & \cosh \theta t + \sinh \theta x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

---

<sup>2</sup>A  $3 \oplus 1$  dimenziós téridő Lorentz csoportja pedig  $SL(2, \mathbb{C})$ -vel homomorf



A mátrixelemeket összevetve azt kapjuk, hogy a téridő koordináták az alábbi módon transzformálódnak:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Tehát  $U(\theta, \pi/2)$  egy  $x$  irányú Lorentz boostnak felel meg, ahol  $\theta$  a rapiditás. Ugyanezen gondolatmenet alapján megkaphatjuk, hogy  $U(\theta, \pi)$  pedig egy  $y$  irányú boost. Általánosan fogalmazva  $\varphi - \pi/2$  felel meg az  $x$  tengellyel bezárt pozitív irányítottságú szögnek, azaz  $\varphi$  az  $y$  tengellyel bezárt szög.

## D. Carlitz-formula

A (2.47)-es egyenletben leírt átalakítást a Mehler formulának egy általánosításával kaphatjuk meg, melyet Leonard Carlitz dolgozott ki 1970-ben [5]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^k k!} \sum_{r=0}^{\min\{n,m\}} r! 2^r \binom{n}{r} \binom{m}{r} \left( \frac{-t}{1-t^2} \right)^r H_{k+n-r}(x) H_{k+m-r}(y) = \\ = (1-t^2)^{-(m+n+1)/2} \exp \left[ \frac{2xyt - (x^2 + y^2)t^2}{1-t^2} \right] H_n \left( \frac{x-yt}{\sqrt{1-t^2}} \right) H_m \left( \frac{y-xt}{\sqrt{1-t^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A  $\varphi = 0$  esetben a  $t = -\tanh \frac{\theta}{2}$ ,  $\varphi = \pi$ -nél pedig a  $t = \tanh \frac{\theta}{2}$  helyettesítéssel tudjuk alkalmazni a formulát.

## Hivatkozások

- [1] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D* 7, 2333 (1973).
- [2] M. Srednicki. Entropy and area. *Physical Review Letters* 71.5, 666 (1993).
- [3] Bařkal, S.; Kim, Y.S.; Noz, M.E. Entangled Harmonic Oscillators and Space-Time Entanglement. *Symmetry* 2016, 8, 55.
- [4] P. Aravind, “The Wigner angle as an anholonomy in rapidity space,” *Am. J. Phys.* 65(7), 634–636 (1997)
- [5] L. Carlitz, An extension of Mehler’s formula, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 3 (1970), 43–46.
- [6] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993).
- [7] A. Furusawa, J.L. So ”rensen, S.L. Braunstein, C.A. Fuchs, H.J. Kimble, and E.S. Polzik, *Science* 282, 706 (1998).
- [8] S.L. Braunstein and H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* 80, 869 (1998).
- [9] G. J. Milburn, S. L. Braunstein. Quantum teleportation with squeezed vacuum states. *Phys. Rev. A* 60, 937 (1999).
- [10] Walls, D. F., Milburn, G. J. *Quantum Optics*. 2nd Ed.; Springer, Berlin, Germany, 2008.
- [11] Jonker, M. Entanglement entropy of coupled harmonic oscillators: an approach in Fock space. (2016)