A mágnesezettség dinamikája nem-hermitikus rendszerekben

Szerző: Kiss Roberta Zsófia
Konzulens: Dr. Dóra Balázs

2021. október 29.

1. fejezet

Bevezető

A hermitikus operátorok fontos szerepet töltenek be a kvantummechanikában. Egy hermitikus Hamilton-operátorral rendelkező rendszer időfejlődése unitér, állapotainak normája időfüggetlen, nincs disszipáció. Az utóbbi évtizedben mégis különös figyelmet kapott a nem-hermitikus kvantumrendszerek időfejlődésének vizsgálata. Ez annak a következménye, hogy nem-hermitikus rendszerek esetén olyan érdekes jelenségeket figyelhetünk meg, amelyek hermitikus esetben nem jönnek létre. Ilyen például az egyirányú átlátszatlanság, a spontán paritás-idő szimmetriasértés, vagy királis tulajdonságok megjelenése.

A nem-hermitikus Hamilton-operátorok általában akkor lépnek be a fizikai leírásba, amikor egy alrendszert vizsgálunk. Az általánosan használt hermitikus leírás egy olyan idealizált rendszernek felel meg, ahol bizonyos szabadsági fokokat - például a disszipációt - nem veszünk figyelembe. Ilyenek az optikai komplex törésmutatók, valamint az elektronok, röntgensugarak vagy az atommagok szóródását leíró komplex potenciálok. Hagyományosan a nem-hermitikusságot perturbációnak tekintették, a fizika lényegében nem változott a hermitikus esethez képest, az exponenciális bomlástól eltekintve. De a nem-hermitikus fizika gyökeresen különbözik a hermitikus fizikától a sajátértékek összeolvadásában [1].

A Lindblad-egyenlet a környezetéhez csatolt rendszer viselkedésének leírására szolgál.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\imath[H,\rho] + \sum_n (2L_n\rho L_n^\dagger - L_n^\dagger L_n\rho - \rho L_n^\dagger L_n) \tag{1.1}$$

Az (1.1) egyenletben ρ a rendszer sűrűségmátrixa, H a Hamilton-operátora, L_n pedig az alrendszer operátorai, amelyek a környezettel való csatolásért felelősek. Szemiklasszikus megközelítésben jól leírhatók a makroszkopikus rendszerek, a szummában szereplő $L\rho L^\dagger$ tag elhanyagolásával. Ekkor a rendszer dinamikáját a következő egyenlet írja le:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\imath(H_{eff}\rho - \rho H_{eff}^\dagger) \qquad H_{eff} = H - \imath\sum_n L_n^\dagger L_n \tag{1.2}$$

A H_{eff} effektív Hamilton-operátor nem-hermitikus, az állapotok pedig relaxálnak, ahogyan egy disszipatív rendszertől várjuk.

1.1. Matemetikai megközelítés

A nem-hermitikus Hamilton-operátor energiaspektrumának egy jellegzetessége a kivételes pont (exceptional point - EP), mely általában a paramétertől függő sajátérték-problémákban fordul elő. Az ilyen paraméterek változtatásával (általában a komplex síkban) általánosan megtalálhatók azok a pontok, ahol a sajátértékek egybeesnek.

Az EP közvetlen közelében a speciális algebrai viselkedés lehetővé teszi a teljes probléma redukálását a kapcsolódó kétdimenziós problémára a két egybeeső szinttel [2]. Ezért a továbbiakban egy kétdimenziós mátrix sajátértékeit tekinthetjük.

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda V = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

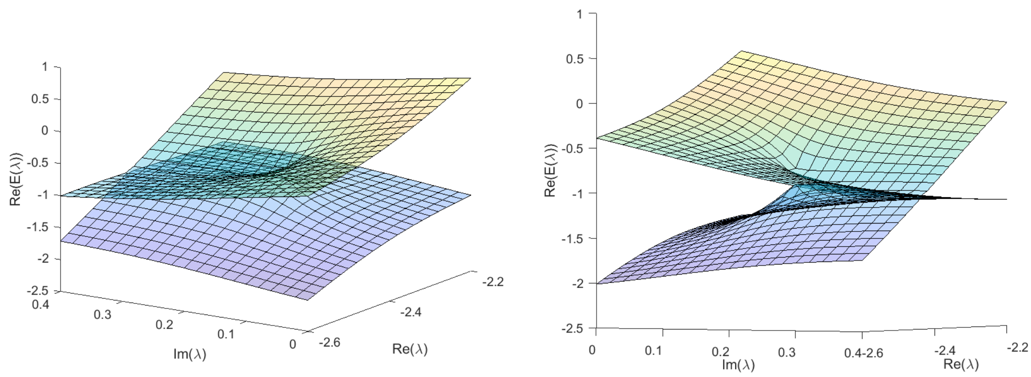
ahol ω_k és ϵ_k határozzák meg a nem-kölcsönható sajátenergiákat $E_k = \omega_k + \lambda\epsilon_k$, $k = 1, 2$. Választhatunk minden paramétert komplexnek, és $[H_0, V] \neq 0$, hogy a probléma ne legyen triviális. A δ_k mátrixelemek által kiváltott kölcsönhatás miatt a két szint nem keresztezi, hanem taszítja egymást. A két szint azonban egyes λ-értékeknél egybeolvad a szint-taszítás közelében, azaz a két kivételes pontnál.

$$\lambda_1 = \frac{-\imath(\omega_1 - \omega_2)}{\imath(\epsilon_1 - \epsilon_2) + 2\sqrt{\delta_1\delta_2}} \qquad \lambda_2 = \frac{-\imath(\omega_1 - \omega_2)}{\imath(\epsilon_1 - \epsilon_2) - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}} \tag{1.4}$$

Ha $\delta_{1,2} \neq 0$, akkor az energiaszinteknek négyzetgyökös szingularitása lesz $\lambda_{1,2}$ értékeknél.

$$E_{1,2}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2 + \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pm \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4\delta_1\delta_2}\sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}\right) \tag{1.5}$$

Ezt ábrázolva a komplex λ-síkon két egymással szembefordított Riemann-felület látható.



1.1. ábra. Az energiaspektrum valós része a komplex paramétertér függvényeként ábrázolva.

A sajátértékek a kivételes pontnál

$$E(\lambda_{1,2}) = \frac{\epsilon_1\omega_2 - \epsilon_2\omega_1 \mp \imath\sqrt{\delta_1\delta_2}(\omega_1+\omega_2)}{\epsilon_1 - \epsilon_2 \mp 2\imath\sqrt{\delta_1\delta_2}} \tag{1.6}$$

A sajátértékek egybeolvadása más mint a hermitikus operátorok esetében észlelt degenerancia, mivel az egybeolvadt sajátértékekhez azonos sajátvektor fog tartozni, tehát az állapotok összeolvadnak. A nem-hermitikus operátorok jobb és bal oldali sajátvektorai különböznek, a két kivételes ponthoz tartozó sajátvektorok

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\imath\delta_1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle\tilde{\phi}_1| = \begin{pmatrix} \frac{\imath\delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-\imath\delta_1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle\tilde{\phi}_2| = \begin{pmatrix} \frac{-\imath\delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

A $\langle\tilde{\phi}_k|\phi_k\rangle$ norma eltűnik a kivételes pontban, ezt gyakran nevezik önortogonalitásnak. Az előbb említett tulajdonságok következtében $H(\lambda)$ nem diagonalizálható a kivételes pontban, a Jordan-féle normálalakban írható fel [3].

A (1.5) egyenletben szereplő négyzetgyökös szingularitásnak további fizikai következményei vannak, amelyekből néhányról a következő részekben írok. Ezelőtt megemlítem a legfőbb matematikai tulajdonságokat, amelyek az érdekes fizikai viselkedést okozhatják.

A kivételes pontot a λ-síkon megkerülve a két energiaszint felcserélődik. A kivételes pont közvetlen közelében a spektrum erős függést mutat a kölcsönhatási paramétertől, a kivételes pontban a sajátértékek λ-szerinti deriváltja végtelen. Amikor a sajátfüggvények a kivételes pontnál egybeolvadnak

$\delta_1 = \delta_2$ esetén paraméter-függetlenek lesznek, a két pont sajátfüggvényei között $\frac{\pi}{2}$-es fáziskülönbség figyelhető meg, mely változhat, például időtükrözés szimmetriasértés esetén ($\delta_1 = \delta_2^*$) [4] [5].

1.2. Paritás-idő szimmetriasértés

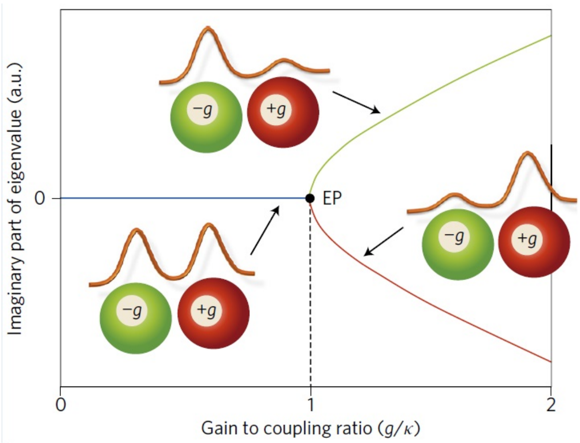
A nem-hermitikus Hamilton-operátorok egy egyedi osztályát 1998-ban fedezték fel, melyek a paritás és időtükrözés transzformáció ($\mathcal{PT}$) együttes művelete alatt szimmetrikusak. Ezen operátorok spektruma abban az esetben is valós, amikor az operátor nem-hermitikus. Hogyha a sajátállapotok szimmetrikusak a $\mathcal{PT}$ transzformáció alatt ($\mathcal{PT}|\psi\rangle = \mathrm{const}|\psi\rangle$), a hozzájuk tartozó sajátenergiák valósak. Amikor sérül a szimmetria az előző egyenlőség nem teljesül és a sajátértékek komplexszé válnak. A szimmetriasértés a rendszer kivételes pontjához tartozó paraméterértékeknél történik. A $\mathcal{PT}$-szimmetrikus rendszerekhez megmaradó mennyiségek rendelhetők, például ha a Hamilton-operátor szimmetrikus a paritás operátor egy megmaradó mennyiség lesz [6].

Ez a jelenség alacsony dimenziókban is észlelhető, így az egyszerűség kedvéért érdemes a következő két energiaszinttel rendelkező Hamilton-operátort tekinteni

$$H = \begin{pmatrix} \delta - \imath g & \kappa \\ \kappa & \imath g \end{pmatrix}, \qquad H|\phi_{1,2}\rangle = E_{1,2}|\phi_{1,2}\rangle \tag{1.9}$$

ahol κ a csatolási konstans, δ a hangoló paraméter, g pedig a módusokhoz tartozó erősítés/csillapítás. Amikor $g = 0$, a sajátértékek valósak és az energia megmarad az időfejlődés során. Ha $g \neq 0$, a mátrix nem-hermitikus és a sajátértékek általánosan komplexek, a jobboldali sajátvektorok pedig nem ortogonálisak többé. Az energiaszinteket ábrázolva a $\kappa - \delta$-síkon, a (1.1) grafikonhoz hasonló felületet kapunk. A kivételes pont ezen a síkon a $\delta = 0$, $\kappa = g$ paramétereknél található. Ez a Hamilton-operátor a teljesen behangolt ($\delta = 0$) esetben $\mathcal{PT}$-szimmetrikus. A spektrumot g/κ függvényében ábrázolva megfigyelhetjük a kivételes pontnál bekövetkező spontán szimmetriasértést. A $g/\kappa < 1$ tartományt $\mathcal{PT}$-egzakt fázisnak nevezik, melyben a sajátértékek $E_{1,2} = \pm\kappa\cos\theta$ ($\theta = \arcsin g/\kappa$) valósak és egyik módus sem tapasztal erősítést vagy csillapítást. A $g/\kappa > 1$ tartomány a $\mathcal{PT}$-sérült fázis, ahol a sajátenergiák a következőképpen írhatók $E_{1,2} = \pm\imath\kappa\sinh\theta$, ahol $\theta = \mathrm{arcosh} g/\kappa$. Mindkét módus szimmetriája sérül, az egyik erősödést, a másik csillapítást érzékel. Az 1.2 ábrán látható, ahogy az egyik energiaszinten az egyik módus erősödik, a másik gyengül, a másik energiaszint esetén viszont a módusok szempontjából fordítva történik az erősítés/gyengítés. Ebben a $\mathcal{PT}$-sérült fázisban a Hamilton-operátor még mindig kommutál a $\mathcal{PT}$

operátorral, viszont nincs közös sajátfüggvény rendszerük. Ennek eredménye, hogy a sajátértékek megszűnnek valósak lenni, komplex konjugált párok váltják fel őket.



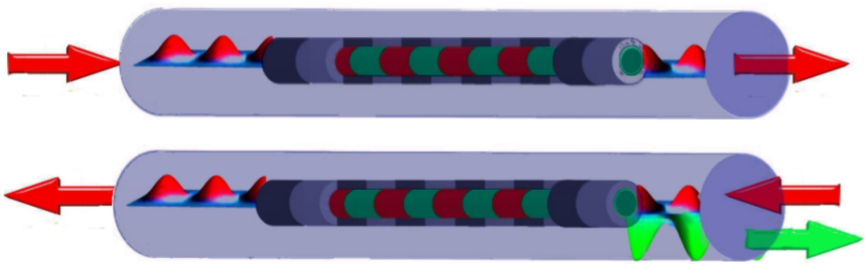
1.2. ábra. A sajátértékek képzetes része a nyereség/csatolás arány függvényében [7].

Egy Hamilton-operátor $\mathcal{PT}$-szimmetrikus, ha a komplex potenciálja teljesíti a $V(x, y) = V^*(-x, -y)$ relációt. Optikai rendszerekben a komplex törésmutatónak kell hasonló összefüggést kielégítenie, hogy $\mathcal{PT}$-szimmetrikus legyen [7].

1.3. Egyirányú átlátszatlanság

Az optika termékeny talaj a $\mathcal{PT}$-szimmetrikus koncepciók vizsgálatához. Amint már említettem, az optikában a komplex törésmutató veszi át a komplex potenciál szerepét, mely ha teljesíti az $n(\mathbf{r}) = n^*(-\mathbf{r})$ összefüggést, $\mathcal{PT}$-szimmetrikus rendszert eredményez.

Az egyirányú átlátszatlanság bemutatásához érdemes egy egydimenziós rendszert tekinteni, mivel az egydimenziós periodikus struktúrák alkalmas felületet képeznek a $\mathcal{PT}$-szimmetrikus fény-transzport tanulmányozásához. Az (1.3) ábrán egy $\mathcal{PT}$-szimmetrikus Bragg-szóróközeg látható, melyben olyan periodikus struktúrát hoztak létre, amely a bal oldalról érkező fényre nincs hatással, viszont a jobb oldalról érkező fény visszaverődését felerősíti. Ennek létrehozásához egy $\mathcal{PT}$-szimmetrikus törésmutató eloszlással rendelkező periodikus optikai struktúrát alkalmaztak $n(z) = n_0 + n_1 \cos(2\beta z) + \imath n_2 \sin(2\beta z)$ ahol $|z| < L/2$. n_0 a homogén anyag törésmutatója, melybe a rácsot ágyazták, n_1 a valós rész amplitudója, n_2 pedig a nyereség/veszteség periodikus disztribúciója.



1.3. ábra. A fény bal és jobboldali transzmissziója az egyirányból átlátszatlan 1D struktúrán [8].

Az elektromágneses térre felírva a Helmholtz-egyenletet

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(z) E(z) = 0 \tag{1.10}$$

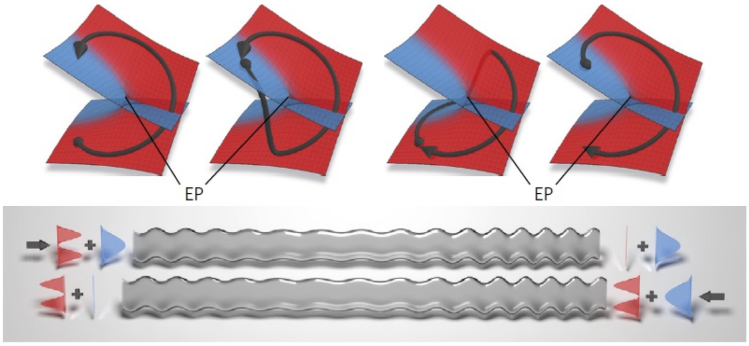
aztán a rácson kívüli tartományban előre és visszafelé terjedő hullámok amplitudójára felírva a transzfer-mátrixot, kifejezhető a rendszer transzmissziós és reflexiós tényejője. A transzfer-mátrix elemeinek segítségével felírható a szórási-mátrix. $\mathcal{PT}$-szimmetrikus rendszerekben a szórási-mátrix sajátértékei reciprokális párok vagy egyenlők. Utóbbi eset a $\mathcal{PT}$-egzakt fázis, előbbi pedig a $\mathcal{PT}$-sérült fázis. Ha $n_2 = 0$, akkor a törésmutató moduláció Bragg reflexióhoz vezet a Bragg-körfrekvenciához közeli frekvenciákon. A jobb és bal oldalról érkező hullámok reflexiós tényezője megegyezik, a Bragg-ponton a transzmisszió nulla, a reflexió pedig egy. Ezzel ellentétben ha $n_2 \neq 0$ a jobbról és balról érkező hullámok reflexiós tényezője között aszimmetria lép fel. Ez az aszimmetria $n_1 = n_2$ esetén a legerőteljesebb, ezen a ponton történik meg a spontán $\mathcal{PT}$-szimmetriasértés. Meglepő tény, hogy a Bragg-ponton a balról érkező hullám transzmissziója egy, míg a reflexiója nulla. Ugyanakkor a jobbról érkező hullám reflexiója négyzetesen nő a minta L méretével [8].

Az ilyen egyirányból átlátszatlan struktúrák alkalmasak lehetnek objektumok eltüntetésére szolgáló metaanyagok létrehozásához [9].

1.4. A kivételes pont megkerülése

Az egymást metsző Riemann felületek geometriájának következtében a kivételes pontok körül királis viselkedést figyelhetünk meg. Érdekes kérdés, hogy mi történik, ha a paramétertérben megkerüljük a kivételes pontot egy zárt hurok mentén.

Az első elméleti megfontolások azt mutatták, hogy a kvázisztatikus tartományban egy megkerülés után a rendszer nem a saját állapotába, hanem a másik állapotba kerül. Későbbi kutatások kimutatták, hogy a kivételes pont előállításához szükséges nyereség-veszteség aszimmetria elrontja az adiabatikus fejlődést a kivételes pont körül [10] [11]. Azonban dinamikus képben, további nem-adiabatikus átalakulások mennek végbe, amelyek királis viselkedést mutatnak. Eszerint a rendszer végállapotát egyedül a kivételes pont megkerülésének iránya határozza meg. Ezeket a predikciókat kísérletekkel igazolták, a mikrohullámú tartományban [12] és optomechanikában [13].

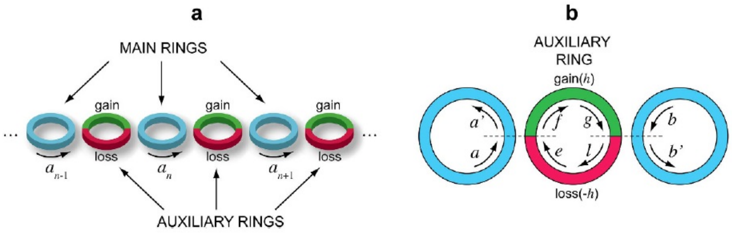


1.4. ábra. A kivételes pont különböző irányú megkerülésével a rendszer végállapota függetken a kiindulási állapottól. Mikrohullám terjedése a deformált fém hullámvezetőn [12].

Az (1.4a) ábrán látható a kivételes pont pozitív forgásirányból történő megkerülése egy $g - \delta$ paramétersíkon. A megkerülés után a kezdeti állapottól függetlenül a kék végállapotba kerül a rendszer. A (1.4b) ábrán az óramutató járásával megegyező irányban kerüljük meg a kivételes pontot és a végállapot a piros lesz. A (1.4c) ábrán a mikrohullámú kísérlet sematikus rajza látható. A folyamat megfigyeléséhez a Hamilton-operátort egy deformált, fém hullámvezetőn történő mikrohullám transzmisszióba képezték. A hullámvezető határait harmonikusan modulálták és belső veszteségeket is kialakítottak. Kiválasztottak egy megfelelő bemeneti frekvenciát, ezzel a problémát két tovaterjedő módusra redukálták. A Helmholtz-egyenlet megoldásán a Floquet-Bloch ansatzot alkalmazva egy Schrödinger-típusú egyenletet kaptak a módusok lassan változó amplitudóira a kívánt Hamilton-operátorral. Eredményképp a bal oldalról érkező hullám a kezdeti állapottól függetlenül a kékkel jelölt állapotba fog kerülni, a jobbról érkező pedig a pirossal jelöltbe.

1.5. Képzetes mágneses tér megvalósítása

A képzetes mágneses teret CROW-elrendezésben (Coupled Resonator Optival Waveguide) lehet megvalósítani.



1.5. ábra. CROW struktúra a képzetes mágneses tér megvalósításához [14].

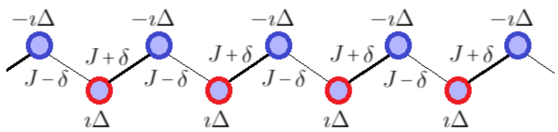
Az microring rezonátorok egydimenziós elrendezés az (1.5) ábrán látható. A kékkel jelölt gyűrűk a főrezonátorok, melyek kiegészítő gyűrűkkel vannak egymáshoz csatolva. Ezek a kiegészítőgyűrűk antirezonánsra vannak tervezve, az átmérőjük épp annyival nagyobb vagy kisebb, hogy egy extra π fázistolást szenvedjenek el. Ennek következtében a kiegészítő gyűrűk felső félkerületén erősítés (zöld), az alsón pedig gyengítés (piros) fog létrejönni [14].

2. fejezet

Mágnesezettség dinamikája egy egydimenziós rendszerben

2.1. A Su-Schrieffer-Heeger (SSH) modell

Az egydimenziós SSH modellt a poliacetilén struktúrájának leírására alkalmazzák [15]. A modellben egy elemi cella két atomot tartalmaz, csak az elsőszomszéd kölcsönhatást tekintve, az elemi cellán belüli kölcsönhatás erőssége különbözik a két elemi cella között fellépő kölcsönhatás erősségétől. Különböző atomok esetén ehhez társulhat egy periodikus potenciál, ha ez képzetes és megfelelő nagyságú, akkor a sajátenergia értékek képzetessé válhatnak és a rendszer időfejlődése nem lesz hermitikus.



2.1. ábra. Az SSH modell sematikus ábrája.

A rendszer Hamilton-operátora a következőképpen írható másodkvantált formalizmusban

$$H_{SSH} = \int \mathrm{d}p \begin{pmatrix} a^\dagger(p) & b^\dagger(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\imath\Delta & (J+\delta)e^{-\imath pd} + J - \delta \\ (J+\delta)e^{\imath pd} + J - \delta & \imath\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(p) \\ b(p) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

A sajátenergiák

$$E_{\pm}(p) = \pm\sqrt{2(J^2+\delta^2+(J^2-\delta^2)\cos pd) - \Delta^2} \tag{2.2}$$

Ha a periodikus potenciál valós és minden atom között egyenlő a kölcsönhatás erőssége ($\delta = 0$), továbbá a Fermi-energia körül sorbafejtjük a diszperziós relációt, az alábbi értéket kapjuk:

$$E_{\pm}(p) = \pm\sqrt{(Jpd)^2 + \Delta^2} \tag{2.3}$$

A hozzátartozó Hamilton-operátor

$$H = (Jpd)\sigma_x + \Delta\sigma_z \tag{2.4}$$

ahol σ_x és σ_z a Pauli-mátrixok.

Ez az operátor hermitikus, és az általam használt H_0 Hamilton-operátor megfeleltethető ennek. A továbbiakban legyen $v = Jd$ a sebesség.

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & pv - \imath\Delta \\ pv + \imath\Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{(pv)^2 + \Delta^2} \tag{2.6}$$

A sajátenergiák hasonló alakúak mint a (2.3) egyenletben, a ψ_0 alapállapot a $-\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}$ energiához tartozó sajátállapot.

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{pv-\imath\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

A továbbiakban ezt a rendszert vizsgáltam két különböző esetben. Először azt, milyen irányú mágnesezettség alakul ki, ha $t = 0$-ban valós mágneses teret kapcsolunk be x, y és z irányokban, majd ugyanezt képzetes tér esetén.

2.2. Hermitikus eset

2.2.1. x-irányú tér

Amikor bekapcsolunk egy x-irányú valós mágneses teret, H_0 a következőképpen módosul

$$H_1 = H_0 - B\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & pv - B - \imath\Delta \\ pv - B + \imath\Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

A ψ_0 alapállapot időfejlődése a H_1 Hamilton-operátor szerint fog történni, ezért a $\langle\sigma_x\rangle$ várhatóértéket a következőképpen kaphatjuk meg

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_1 t}\sigma_x e^{-\imath H_1 t}\psi_0 = -\frac{pv(pv-B)^2+\Delta^2(pv-2B(\sin t\sqrt{(pv-B)^2+\Delta^2})^2)}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}((pv-B)^2+\Delta^2)} \tag{2.9}$$

Ez egy adott p hullámszámra vonatkozik, a teljes eredményhez integrálnunk kell p szerint. Ez azonban analitikusan nem lenne kivitelezhető, így a továbbiakban a mágneses teret kicsinek tekintem. Ha B kicsi, $\langle\sigma\rangle(p)$-t közelíthetjük elsőrendben B szerint.

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_1 t}\sigma_x e^{-\imath H_1 t}\psi_0 \approx -\frac{pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{2\Delta^2(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \tag{2.10}$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_1 t}\sigma_y e^{-\imath H_1 t}\psi_0 \approx -\frac{\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \frac{2\Delta pv(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \tag{2.11}$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_1 t}\sigma_z e^{-\imath H_1 t}\psi_0 \approx \frac{\Delta\sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.12}$$

A p szerinti integrálást a Maple szoftver segítségével végeztem el, a mennyiségeket Δ egységekben tekintve. Az integrálhoz alkalmazott helyettesítés a függelékben található.

A mágnesezettség különböző irányú komponenseinek időfüggése Δ egységekben

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \frac{\pi B}{v}\mathrm{MeijerG}\left(\left[[1],\left[\frac{3}{2}\right]\right],\left[[1,1],\left[\frac{1}{2},0\right]\right],t^2\right) \tag{2.13}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.14}$$

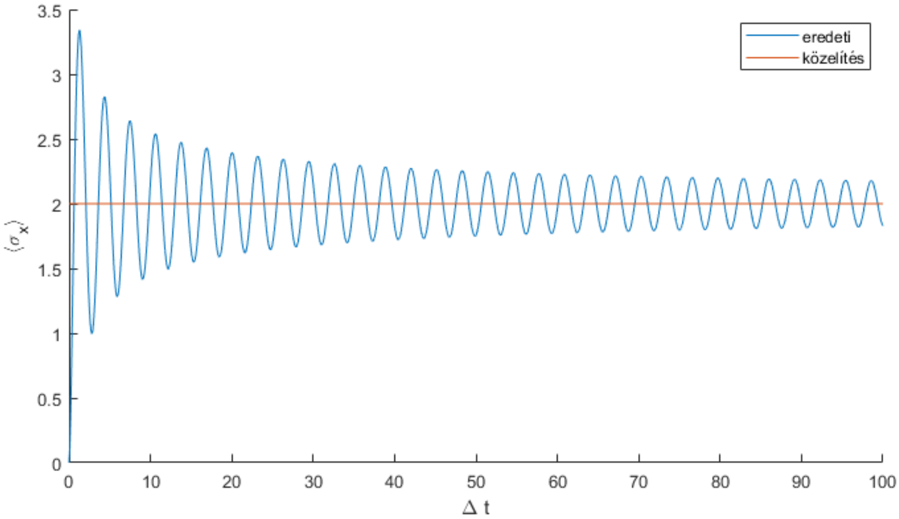
$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \frac{\pi t^2 B}{v}\mathrm{MeijerG}\left([[],[0]],\left[\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right],[-1]\right],t^2\right) \tag{2.15}$$

Megvizsgáltam a sok idő elteltével kialakult mágnesezettséget. A $\langle\sigma_x\rangle$ várható érték esetén $\sin^2 t \approx \frac{1}{2}$, $\langle\sigma_z\rangle$ esetén pedig a nyeregponti közelítést alkalmaztam. Ha $t\to\infty$ akkor $\langle\sigma_z\rangle\to 0$.

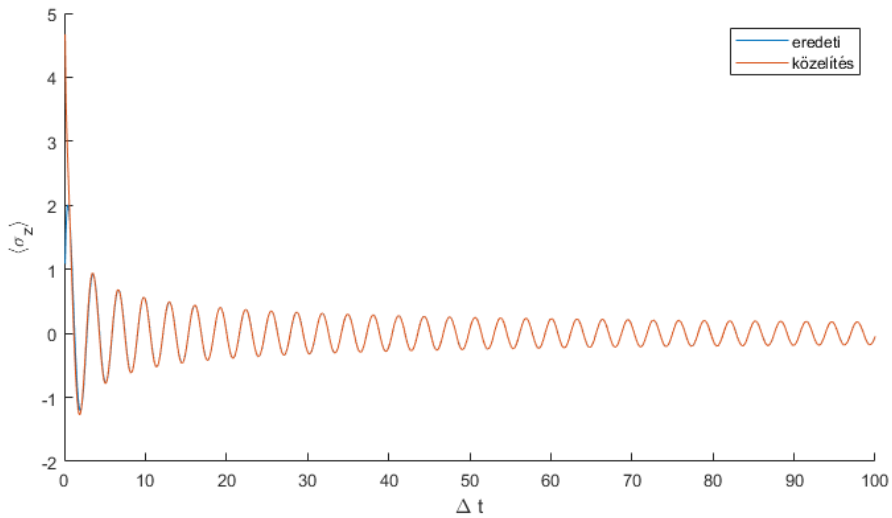
$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \frac{2B}{v} \tag{2.16}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.17}$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \frac{B}{\Delta v}\sqrt{\frac{\pi\Delta}{t}}\sin\left(2\Delta t+\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.18}$$



2.2. ábra. Az x-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$



2.3. ábra. A z-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$

2.2.2. y-irányú tér

A számításokat az x irányhoz hasonlóan végeztem. A továbbiakban $\langle\sigma\rangle(p)$ B szerint első rendben közelített alakját jelenítem meg.

$$H_2 = H_0 - B\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & pv + \imath B - \imath\Delta \\ pv - \imath B + \imath\Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_2^\dagger t}\sigma_x e^{-\imath H_2 t}\psi_0 \approx -\frac{pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{2\Delta pv(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \quad (2.20)$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_2^\dagger t}\sigma_y e^{-\imath H_2 t}\psi_0 \approx -\frac{\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{2(pv)^2(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \quad (2.21)$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_2^\dagger t}\sigma_z e^{-\imath H_2 t}\psi_0 \approx -\frac{pv\sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{(pv)^2+\Delta^2}B \quad (2.22)$$

A mágnesezettség időfüggése Δ egységekben:

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = 0 \quad (2.23)$$

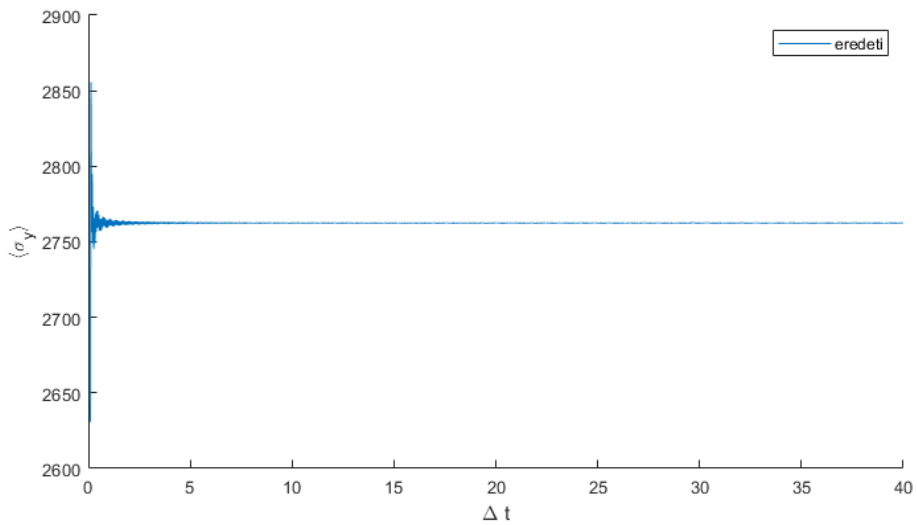
$$\langle\sigma_z\rangle(t) = 0 \quad (2.24)$$

Az eredményt y irányban nem kaptam meg analitikusan, ehelyett p szerint numerikusan integráltam $-W < pv < W$ tartományban és ezt ábrázoltam $W/\Delta = 100$ esetén a (2.4) grafikonon.
$t \to \infty$ esetén az integrál elvégzéséhez szimmetrikus levágást (W/v) alkalmaztam p-ben. A (2.26) várható érték $W >> \Delta$ limeszben van feltüntetve.

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = 0 \quad (2.25)$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = \frac{2B}{v}\left(\ln\left(\frac{2W}{\Delta}\right) - 1\right) \quad (2.26)$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = 0 \quad (2.27)$$



2.4. ábra. Az y-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$

2.2.3. z-irányú tér

A számításokat szintén az x irányhoz hasonlóan végeztem.

$$H_3 = H_0 - B\sigma_z = \begin{pmatrix} -B & pv - \imath\Delta \\ pv + \imath\Delta & B \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_3^\dagger t}\sigma_x e^{-\imath H_3 t}\psi_0 \approx -\frac{pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \frac{\Delta \sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.29}$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_3^\dagger t}\sigma_y e^{-\imath H_3 t}\psi_0 \approx -\frac{\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{pv \sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.30}$$

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_3^\dagger t}\sigma_z e^{-\imath H_3 t}\psi_0 \approx \frac{2(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}B \tag{2.31}$$

A mágnesezettség időfüggése Δ egységekben:

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = -\frac{\pi t^2 B}{v}\mathrm{MeijerG}\left([[],[0]], \left[\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], [-1]\right], t^2\right) \tag{2.32}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.33}$$

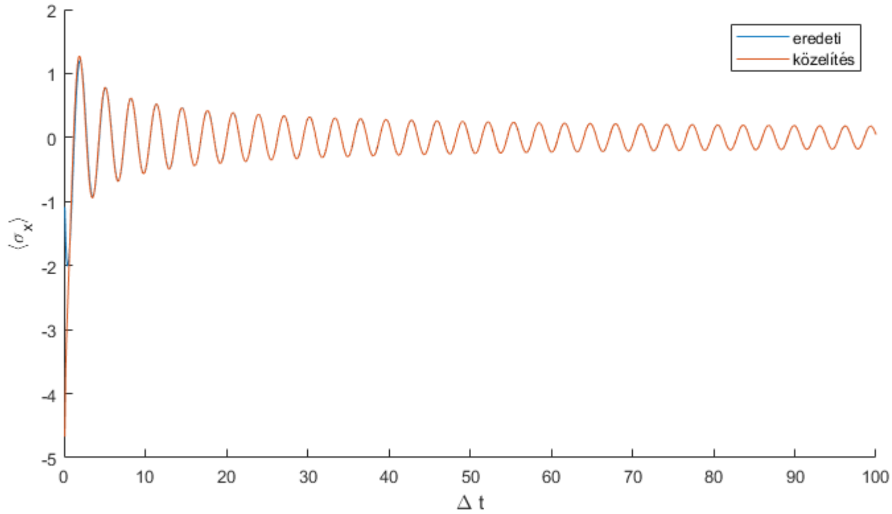
$$\tag{2.34}$$

Az eredményt z irányban nem kaptam meg analitikusan, ehelyett p szerint numerikusan integráltam $-W < pv < W$ tartományban és ezt ábrázoltam $W/\Delta = 100$ esetén a (2.6) grafikonon.
$t \to \infty$ esetén nyeregponti közelítést (2.35) és p-ben szimmetrikus levágást (W/v) (2.37) alkalmaztam. Utóbbi várható értéket $W >> \Delta$ limeszben írtam fel.

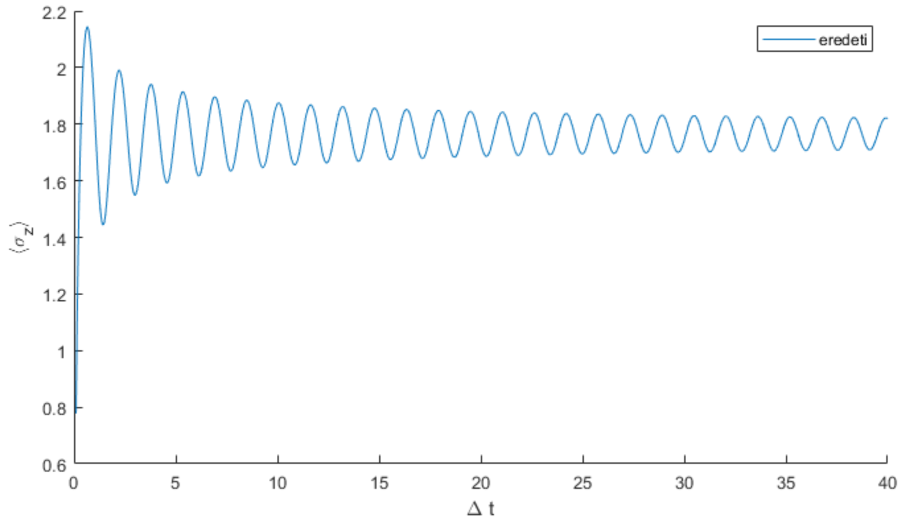
$$\langle\sigma_x\rangle(t) = -\frac{B}{\Delta v}\sqrt{\frac{\pi\Delta}{t}}\sin\left(2\Delta t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.35}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.36}$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \frac{2B}{v}\ln\left(\frac{2W}{\Delta}\right) \tag{2.37}$$



2.5. ábra. Az x-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$



2.6. ábra. A z-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$

2.3. Nem-hermitikus eset

A H_0 Hamilton-operátorhoz $\imath B$ mágneses teret adva az operátor nem-hermitikussá válik. Ekkor az állapotok időfejlődése nem unitér, felléphet csillapítás vagy erősítés, így a várható érték kiszámításához le kell osztani az időfüggő normával. A sorfejtést a normálás után végeztem el B-ben első rendig. Ezután a lépés után a többi számítást a 2.2 részhez hasonlóan végeztem.

2.3.1. x-irányú tér

A rendszer Hamilton-operátora a következőképp írható

$$H_4 = H_0 - \imath B\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & pv - \imath B - \imath\Delta \\ pv - \imath B + \imath\Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

A p-függő várható értékeket a normálás után sorba fejtettem az alkalmazott mágneses tér nagysága szerint. Ehhez a művelethez a Maple szoftvert használtam.

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t}\sigma_x e^{-\imath H_4 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t} e^{-\imath H_4 t}\psi_0} \approx -\frac{pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{\Delta^2 \sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \tag{2.39}$$

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t}\sigma_y e^{-\imath H_4 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t} e^{-\imath H_4 t}\psi_0} \approx -\frac{\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{\Delta pv \sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \tag{2.40}$$

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t}\sigma_z e^{-\imath H_4 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t} e^{-\imath H_4 t}\psi_0} \approx \frac{2\Delta(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.41}$$

A p szerinti integrálást szintén a Maple szoftverrel végeztem, Δ egységekben.

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \frac{\pi B t^2}{v}\left(\frac{2}{t} - \frac{2\mathrm{J}_1(2t)}{t} - 4\mathrm{J}_0(2t) + 2\pi\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t)\right) \tag{2.42}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.43}$$

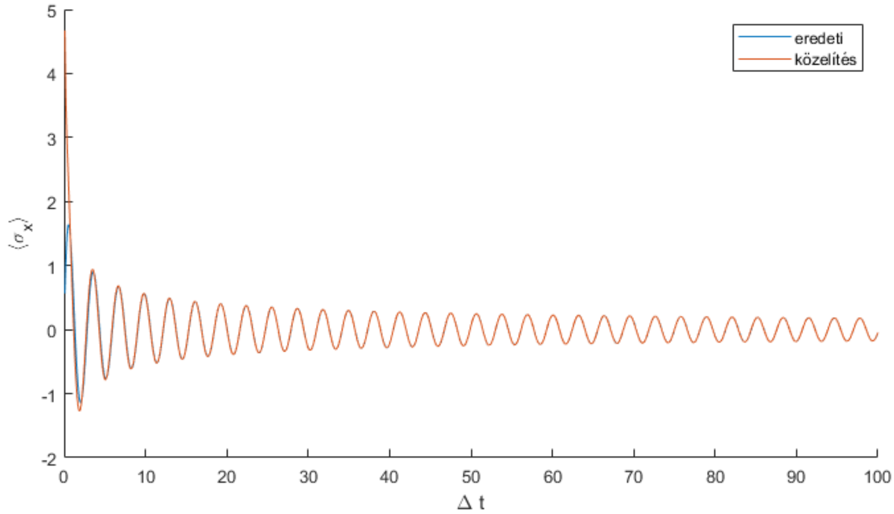
$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \frac{\pi B t}{v}\left(2\mathrm{J}_0(2t) - \pi(\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t))\right) \tag{2.44}$$

$t \to \infty$ esetén a hermitikus számolásokhoz hasonló közelítéseket alkalmaztam.

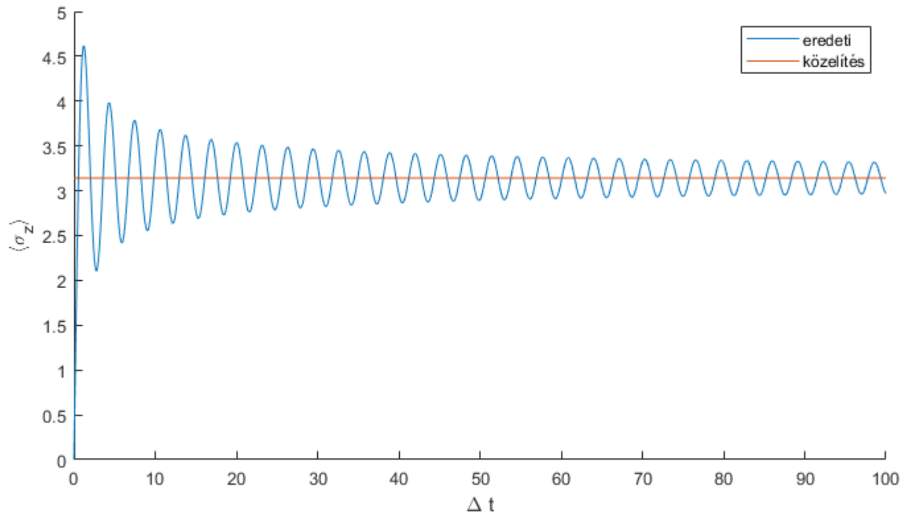
$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \frac{B}{\Delta v}\sqrt{\frac{\pi\Delta}{t}}\sin\left(2\Delta t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.45}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.46}$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \frac{\pi B}{v} \tag{2.47}$$



2.7. ábra. Az x-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$



2.8. ábra. A z-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$

2.3.2. y-irányú tér

Az időfejlődést leíró Hamilton-operátor a következő

$$H_5 = H_0 - \imath B\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & pv - B - \imath\Delta \\ pv + B + \imath\Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Az x-irányhoz hasonlóan leosztottam a normafaktorokkal, majd elvégeztem a B szerinti elsőrendű közelítést. Ehhez a Maple szoftvert használtam.

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_5^\dagger t}\sigma_x e^{-\imath H_5 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_5^\dagger t} e^{-\imath H_5 t}\psi_0} \approx -\frac{pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{\Delta pv \sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \tag{2.49}$$

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_5^\dagger t}\sigma_y e^{-\imath H_5 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_5^\dagger t} e^{-\imath H_5 t}\psi_0} \approx -\frac{\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \frac{(pv)^2 \sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}}B \tag{2.50}$$

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_5^\dagger t}\sigma_z e^{-\imath H_5 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_5^\dagger t} e^{-\imath H_5 t}\psi_0} \approx -\frac{2pv(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.51}$$

A várható értékekhez a p-szerinti integrált itt is Maple-lel végeztem el, melyből a következő eredményt kaptam

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = 0 \tag{2.52}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = \frac{-\pi B t}{2v}\left(\frac{2(4t^2+1)\mathrm{J}_0(2t)}{t} - 4\mathrm{J}_1(2t) - 4\pi t\left(\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t)\right) - 4\right) \tag{2.53}$$

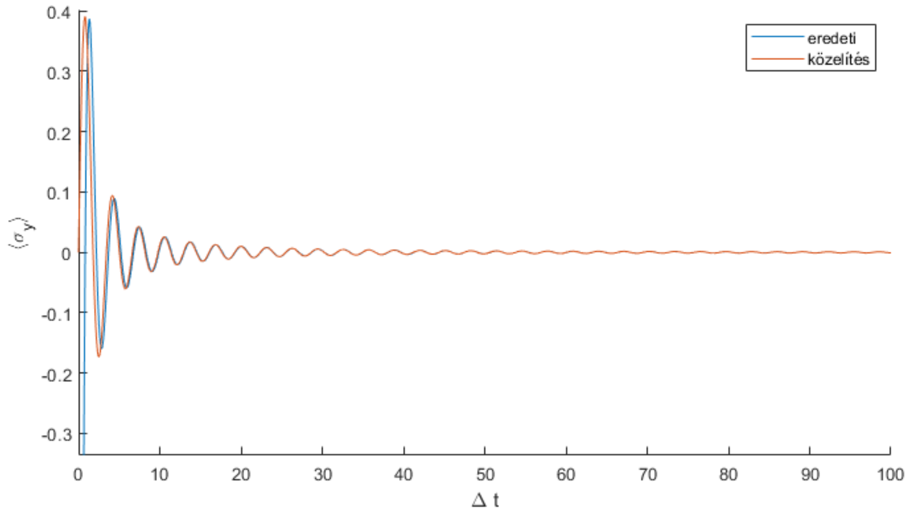
$$\langle\sigma_z\rangle(t) = 0 \tag{2.54}$$

$t \to \infty$ esetén (2.53)-hoz tartozó p-szerinti integrálra alkalmaztam a nyeregponti közelítést.

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = 0 \tag{2.55}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = -\frac{\sqrt{\pi}\Delta^{3/2}B}{2v((\frac{3}{2\Delta})^2+t^2)^{3/4}}e^{-3\ln\Delta}\sin\left(2\Delta t - \frac{\mathrm{atan}(\frac{2\Delta t}{3})}{2} + \pi\right) \tag{2.56}$$

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = 0 \tag{2.57}$$



2.9. ábra. Az y-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$

2.3.3. z-irányú tér

A z-irányú képzetes mágneses tér bekapcsolása után létrejött időfejlődést leíró Hamilton-operátor

$$H_6 = H_0 - \imath B\sigma_z = \begin{pmatrix} -\imath B & pv - \imath\Delta \\ pv + \imath\Delta & \imath B \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

A további számításokhoz szintén a Maple szoftvert használtam.

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_6^\dagger t}\sigma_x e^{-\imath H_6 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_6^\dagger t} e^{-\imath H_6 t}\psi_0} \approx -\frac{pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \frac{2\Delta(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.59}$$

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_6^\dagger t}\sigma_y e^{-\imath H_6 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_6^\dagger t} e^{-\imath H_6 t}\psi_0} \approx -\frac{\Delta}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{2pv(\sin t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{(pv)^2+\Delta^2}B \tag{2.60}$$

$$\frac{\psi_0^\dagger e^{\imath H_6^\dagger t}\sigma_z e^{-\imath H_6 t}\psi_0}{\psi_0^\dagger e^{\imath H_6^\dagger t} e^{-\imath H_6 t}\psi_0} \approx -\frac{\sin 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}B \tag{2.61}$$

A kialakult időfüggő mágnesezettség komponensek

$$\langle\sigma_x\rangle(t) = \frac{-\pi Bt}{v}\left(2\mathrm{J}_0(2t) - \pi(\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t))\right) \tag{2.62}$$

$$\langle\sigma_y\rangle(t) = 0 \tag{2.63}$$

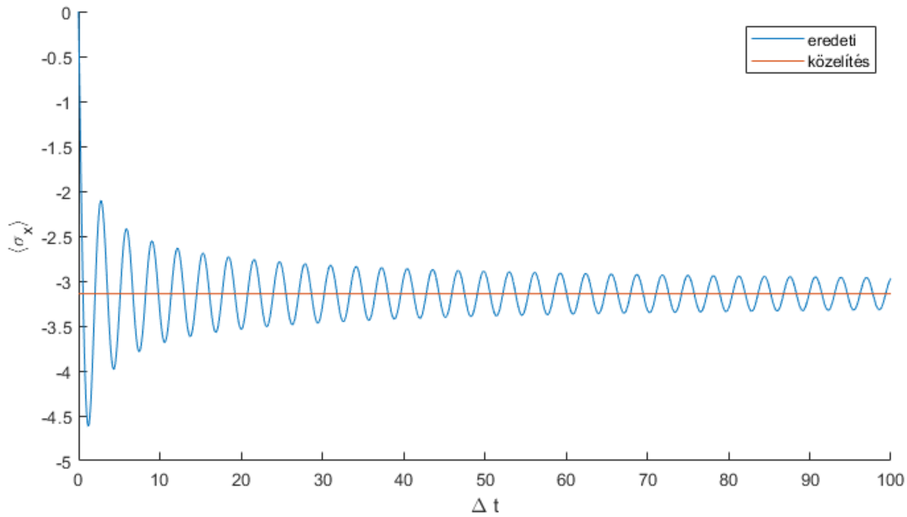
$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \frac{-B\pi}{v}\mathrm{J}_0(2t) \tag{2.64}$$

$t \to \infty$ esetén hasonló módszereket alkalmaztam a várható értékek közelítésére, mint a 2.3.1 részben.

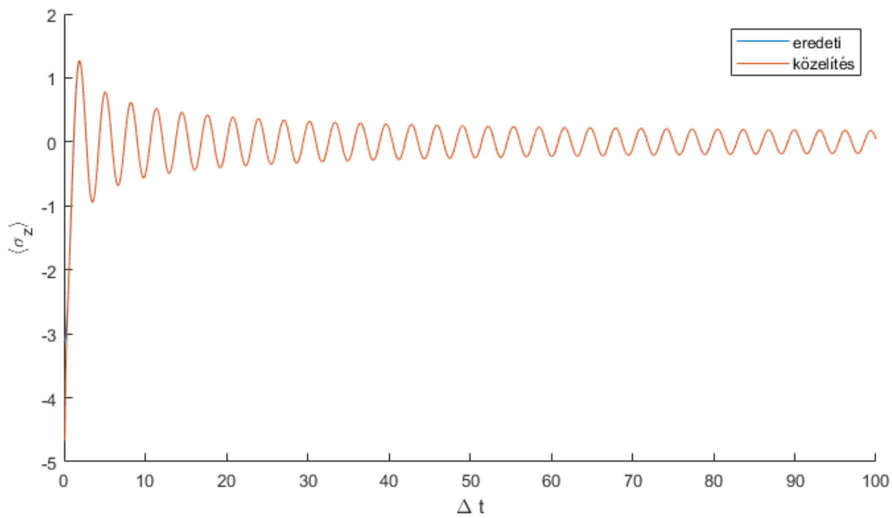
$$\langle \sigma_x \rangle(t) = -\frac{\pi B}{v} \tag{2.65}$$

$$\langle \sigma_y \rangle(t) = 0 \tag{2.66}$$

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = -\frac{B}{\Delta v}\sqrt{\frac{\pi \Delta}{t}} \sin\left(2\Delta t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.67}$$



2.10. ábra. Az x-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$



2.11. ábra. A z-irányú mágnesezettség az idő függvényében. $B = \Delta = v = 1$

2.4. Összegzés

A hermitikus és nem-hermitikus esetek összehasonlításához a sok idő elteltével kialakult mágnesezettségeket az alábbi táblázatba foglaltam.

	$B\sigma_x$	$B\sigma_y$	$B\sigma_z$	$\imath B\sigma_x$	$\imath B\sigma_y$	$\imath B\sigma_z$
x	$\frac{2B}{v}$	0	0	0	0	$-\frac{\pi B}{v}$
y	0	$\frac{2B}{v}\left(\ln\left(\frac{2W}{\Delta}\right)-1\right)$	0	0	0	0
z	0	0	$\frac{2B}{v}\ln\left(\frac{2W}{\Delta}\right)$	$\frac{\pi B}{v}$	0	0

2.1. táblázat. A kialakult mágnesezettség komponensei különböző irányú valós és képzetes mágneses tér esetén.

Hermitikus esetben azt figyelhetjük meg, hogy az alkalmazott mágneses tér irányával párhuzamosan alakul ki valamekkora mágnesezettség. x-irányú tér esetén csak B-től, a mágneses tér nagyságától, és v-től, a hangsebességtől függ. y és z irány esetén olyan tagok is szerepelnek, melyek logaritmikusan divergálnak a levágás (W/v) növelésével.
Ezzel ellentétben a nem-hermitikus esetben x-irányú tér alkalmazásakor a kialakult mágnesezettség z-irányú lesz, z-irányú térnél pedig x-irányú. Ha a képzetes mágneses tér y-irányba orientált, sok idő elteltével az összes komponens lecseng. A kialakult mágnesezettségek csak B-től és v-től függnek.

A valós és képzetes mágneses terek alkalmazása között különbség figyelhető meg a rendszer mágnesezettségét tekintve. A valós tér esetén észlelt viselkedés magyarázható azzal a képpel, hogy a spinek a mágneses térrel párhuzamos irányba rendeződnek. A nem-hermitikus eset ennél érdekesebb, ott arról lehet szó, hogy az eredeti állapot fenntartásához szükséges folyamat marad meg az időben. Ebben az esetben pumpáljuk a rendszert, de ahelyett, hogy a pumpálásban megjelenő operátor várható értéke lenne véges, a pumpált állapotok között átmenetet létrehozó operátor várható értéke lesz nullától különböző. Ez analógiába hozható azzal, hogyha valahol töltést pumpálunk a rendszerbe, vagy megnő a sűrűség a pumpálás helyén, vagy olyan véges áramok jelennek meg a rendszerben, amelyek elszállítják a bepumpált töltést, de a töltéssűrűség nem változik.

Irodalomjegyzék

[1] M. V. Berry, „Physics of nonhermitian degeneracies," *Czechoslovak journal of physics*, vol. 54, no. 10, pp. 1039–1047, 2004.

[2] W. Heiss and W.-H. Steeb, „Avoided level crossings and riemann sheet structure," *Journal of mathematical physics*, vol. 32, no. 11, pp. 3003–3007, 1991.

[3] T. Kato, „Analytic perturbation theory," in *Perturbation theory for linear operators*, pp. 364–426, Springer, 1966.

[4] H. Harney and W. Heiss, „Time reversal and exceptional points," *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, vol. 29, no. 3, pp. 429–432, 2004.

[5] W. Heiss, „The physics of exceptional points," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, no. 44, p. 444016, 2012.

[6] Z. Bian, L. Xiao, K. Wang, X. Zhan, F. A. Onanga, F. Ruzicka, W. Yi, Y. N. Joglekar, and P. Xue, „Conserved quantities in parity-time symmetric systems," *Physical Review Research*, vol. 2, no. 2, p. 022039, 2020.

[7] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, „Non-hermitian physics and pt symmetry," *Nature Physics*, vol. 14, no. 1, pp. 11–19, 2018.

[8] Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao, and D. N. Christodoulides, „Unidirectional invisibility induced by p t-symmetric periodic structures," *Physical Review Letters*, vol. 106, no. 21, p. 213901, 2011.

[9] X. Zhu, L. Feng, P. Zhang, X. Yin, and X. Zhang, „One-way invisible cloak using parity-time symmetric transformation optics," *Optics letters*, vol. 38, no. 15, pp. 2821–2824, 2013.

[10] T. J. Milburn, J. Doppler, C. A. Holmes, S. Portolan, S. Rotter, and P. Rabl, „General description of quasiadiabatic dynamical phenomena near exceptional points," *Physical Review A*, vol. 92, no. 5, p. 052124, 2015.

[11] R. Uzdin, A. Mailybaev, and N. Moiseyev, „On the observability and asymmetry of adiabatic state flips generated by exceptional points," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 44, no. 43, p. 435302, 2011.

[12] J. Doppler, A. A. Mailybaev, J. Böhm, U. Kuhl, A. Girschik, F. Libisch, T. J. Milburn, P. Rabl, N. Moiseyev, and S. Rotter, „Dynamically encircling an exceptional point for asymmetric mode switching," *Nature*, vol. 537, no. 7618, pp. 76–79, 2016.

[13] H. Xu, D. Mason, L. Jiang, and J. Harris, „Topological energy transfer in an optomechanical system with exceptional points," *Nature*, vol. 537, no. 7618, pp. 80–83, 2016.

[14] S. Longhi, D. Gatti, and G. Della Valle, „Robust light transport in non-hermitian photonic lattices," *Scientific reports*, vol. 5, no. 1, pp. 1–12, 2015.

[15] W. Su, J. Schrieffer, and A. J. Heeger, „Solitons in polyacetylene," *Physical review letters*, vol. 42, no. 25, p. 1698, 1979.

A. függelék

Számítások részletei

A.1. Hermitikus eset

A.1.1. x-irányú tér

A p-szerinti integrál elvégzéséhez alkalmazott helyettesítések.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v \sin(t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}} \mathrm{d}p = \int_{1}^{\infty} \frac{\sin(tx)^2}{x^2\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \mathrm{MeijerG}\left(\left[[1], \left[\frac{3}{2}\right]\right], \left[[1,1], \left[\frac{1}{2}, 0\right]\right], t^2\right) \tag{A.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v \sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{(pv)^2+\Delta^2} \mathrm{d}p = \int_{1}^{\infty} \frac{\sin(2tx)}{x\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \frac{\pi t^2}{2} \mathrm{MeijerG}\left([[], [0]], \left[\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], [-1]\right], t^2\right) \tag{A.2}$$

Fourier-transzformációt végeztem a p-függő mágnesezettség két nem nulla komponensén.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin(t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\mathrm{d}t =$$
$$\frac{\imath}{4\sqrt{2\pi}\,((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega-2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}+\frac{1}{\omega+2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}-\frac{2}{\omega}\right)\right.$$
$$\left.+\imath\pi\left(\delta(\omega-2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})+\delta(\omega+2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})-2\delta(\omega)\right)\right) =$$
$$\frac{\imath}{4\sqrt{2\pi}\,((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega-2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}+\frac{1}{\omega+2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}-\frac{2}{\omega}\right)\right.$$
$$\left.+\imath\pi\left(\frac{\delta\left(p-\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|}+\frac{\delta\left(p+\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|}-2\delta(\omega)\right)\right) \tag{A.3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{(pv)^2+\Delta^2}\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,((pv)^2+\Delta^2)}\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}+\omega}+\frac{1}{2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}-\omega}\right)\right.$$
$$\left.-\imath\pi\mathrm{sgn}(\omega)\left(\frac{\delta\left(p-\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|}+\frac{\delta\left(p+\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|}\right)\right) \tag{A.4}$$

A két megmaradó komponens $t \to 0$ határesetben:

$$\frac{\sin(t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}} \approx \frac{t^2}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}$$
$$\int_{-C}^{C}\frac{t^2}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}\mathrm{d}p = \ln\frac{\sqrt{(Cv)^2+\Delta^2}+Cv}{\sqrt{(Cv)^2+\Delta^2}-Cv}\frac{t^2}{v} \tag{A.5}$$

$$\frac{\sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{(pv)^2+\Delta^2} \approx \frac{2t}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}$$
$$\int_{-C}^{C}\frac{2t}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}\mathrm{d}p = \ln\frac{\sqrt{(Cv)^2+\Delta^2}+Cv}{\sqrt{(Cv)^2+\Delta^2}-Cv}\frac{2t}{v} \tag{A.6}$$

A két megmaradó komponens $t \to \infty$ határesetben:

$$\begin{aligned}\int_{-C}^{C} \frac{1}{2((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}p &= \frac{C}{\sqrt{(Cv)^2+\Delta^2}\Delta^2} \\ \lim_{C\to\infty} \frac{1}{\sqrt{v^2+\frac{\Delta^2}{C^2}}\Delta^2} &= \frac{1}{v\Delta^2}\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{(pv)^2+\Delta^2}\mathrm{d}p &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\imath 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \mathrm{e}^{-\imath 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}}{2\imath((pv)^2+\Delta^2)}\mathrm{d}p \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\imath\Delta^2}\left(\mathrm{e}^{\imath 2t(\Delta+\frac{(pv)^2}{2\Delta})} - \mathrm{e}^{-\imath 2t(\Delta+\frac{(pv)^2}{2\Delta})}\right)\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{2\imath\Delta^2 v}\left(\sqrt{\frac{\pi\Delta}{-\imath t}}\mathrm{e}^{\imath 2t\Delta} - \sqrt{\frac{\pi\Delta}{\imath t}}\mathrm{e}^{-\imath 2t\Delta}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta^2 v}\sqrt{\frac{\pi\Delta}{t}}\sin\left(2t\Delta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned} \tag{A.8}$$

A.1.2. z-irányú tér

A mágnesezettség x komponensének p-szerinti integráljának elvégzéséhez használt helyettesítés.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(2tx)}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi t^2}{2}\mathrm{MeijerG}\left([[],[0]],\left[\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right],[-1]\right],t^2\right) \tag{A.9}$$

A.2. Nem-hermitikus eset

A.2.1. x-irányú tér

Az x-irányú spinek várható értéke, normálás nélkül.

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t}\sigma_x e^{-\imath H_4 t}\psi_0 =$$
$$\frac{-pv}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}\cos t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\cos t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$+\frac{\imath(pv+\imath B)}{\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}}\cos t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\sin t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$+\frac{-\imath(pv-\imath B)}{\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}}\sin t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\cos t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$-\frac{pv((pv)^2+B^2+\Delta^2)}{\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}}\sin t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$\times\sin t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2} \tag{A.10}$$

A normafaktor időfüggése.

$$\psi_0^\dagger e^{\imath H_4^\dagger t}e^{-\imath H_4 t}\psi_0 =$$
$$\cos t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\cos t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$-\frac{\imath((pv)^2+\imath Bpv+\Delta^2)}{\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}\cos t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$\times\sin t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$+\frac{\imath((pv)^2-\imath Bpv+\Delta^2)}{\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}\sin t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$\times\cos t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$+\frac{(pv)^2+B^2+\Delta^2}{\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2}}\sin t\sqrt{(pv-\imath B)^2+\Delta^2}$$
$$\times\sin t\sqrt{(pv+\imath B)^2+\Delta^2} \tag{A.11}$$

A p-szerinti integrálok elvégzéséhez használt helyettesítések.

$$\int_1^\infty \frac{\sin(2tx)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{t^2\pi}{2}\left(\frac{2}{t} - \frac{2\mathrm{J}_1(2t)}{t} - 4\mathrm{J}_0(2t) + 2\pi\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t)\right) \tag{A.12}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin(tx)^2}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi t}{4}\left(2\mathrm{J}_0(2t) - \pi(\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t))\right) \tag{A.13}$$

Fourier-transzformációt végeztem a p-függő mágnesezettség két nem nulla komponensén.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}+\omega} + \frac{1}{2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}-\omega}\right)\right.$$
$$\left. - \imath\pi\mathrm{sgn}(\omega)\left(\frac{\delta\left(p-\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|} + \frac{\delta\left(p+\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|}\right)\right) \tag{A.14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin(t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{(pv)^2+\Delta^2}\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\imath}{4\sqrt{2\pi}\,((pv)^2+\Delta^2)}\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega-2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{1}{\omega+2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \frac{2}{\omega}\right)\right.$$
$$\left. + \imath\pi\left(\delta(\omega-2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}) + \delta(\omega+2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}) - 2\delta(\omega)\right)\right) =$$
$$\frac{\imath}{4\sqrt{2\pi}\,((pv)^2+\Delta^2)}\left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega-2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} + \frac{1}{\omega+2\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}} - \frac{2}{\omega}\right)\right.$$
$$\left. + \imath\pi\left(\frac{\delta\left(p-\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|} + \frac{\delta\left(p+\frac{1}{v}\sqrt{\frac{\omega^2}{4}-\Delta^2}\right)}{2\left|v\sqrt{1-\frac{4\Delta^2}{\omega^2}}\right|} - 2\delta(\omega)\right)\right) \tag{A.15}$$

A két megmaradó komponens $t \to 0$ határesetben:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{((pv)^2+\Delta^2)^{3/2}} &\approx \frac{2t}{(pv)^2+\Delta^2}\\ \int_{-C}^{C}\frac{2t}{(pv)^2+\Delta^2}\mathrm{d}p &= \frac{4\arctan(Cv/\Delta)}{\Delta v}t \qquad \text{(A.16)}\\ \frac{\sin(t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})^2}{(pv)^2+\Delta^2} &\approx t^2\\ \int_{-C}^{C} t^2\mathrm{d}p &= 2Ct^2 \qquad \text{(A.17)}\end{aligned}$$

A két megmaradó komponens $t \to \infty$ határesetben:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2})}{((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}p &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\imath 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}-\mathrm{e}^{-\imath 2t\sqrt{(pv)^2+\Delta^2}}}{2\imath((pv)^2+\Delta^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}p\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\imath\Delta^3}\left(\mathrm{e}^{\imath 2t(\Delta+\frac{(pv)^2}{2\Delta})}-\mathrm{e}^{-\imath 2t(\Delta+\frac{(pv)^2}{2\Delta})}\right)\mathrm{d}p\\ &= \frac{1}{2\imath\Delta^3 v}\left(\sqrt{\frac{\pi\Delta}{-\imath t}}\mathrm{e}^{\imath 2t\Delta}-\sqrt{\frac{\pi\Delta}{\imath t}}\mathrm{e}^{-\imath 2t\Delta}\right)\\ &= \frac{1}{\Delta^3 v}\sqrt{\frac{\pi\Delta}{t}}\sin\left(2t\Delta+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(A.18)}\\ \int_{-C}^{C}\frac{1}{2((pv)^2+\Delta^2)}\mathrm{d}p &= \frac{\arctan(Cv/\Delta)}{\Delta v}\\ \lim_{C\to\infty}\frac{\arctan(Cv/\Delta)}{\Delta v} &= \frac{\pi}{2\Delta v} \qquad \text{(A.19)}\end{aligned}$$

A.2.2. y-irányú tér

A mágnesezettség y komponensének p-szerinti integráljának elvégzéséhez használt helyettesítés.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sin(2tx)\sqrt{x^2-1}}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{t\pi}{4}\left(\frac{2(4t^2+1)\mathrm{J}_0(2t)}{t}-4\mathrm{J}_1(2t)-4\pi t\left(\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t)-\mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t)\right)-4\right) \qquad \text{(A.20)}$$

A.2.3. z-irányú tér

A mágnesezettség két nemnulla komponensének p-szerinti integráljához használt helyettesítések.

$$\int_1^\infty \frac{\sin(tx)^2}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi t}{4}\left(2\mathrm{J}_0(2t) - \pi(\mathrm{J}_0(2t)\mathrm{H}_1(2t) - \mathrm{J}_1(2t)\mathrm{H}_0(2t))\right) \tag{A.21}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin(2tx)}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{J}_0(2t) \tag{A.22}$$