

**Budapesti Műszaki  
és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gépjárművek és Járműgyártás tanszék**

**MŰEGYETEM**



**GÉPJÁRMŰVEK  
TANSZÉK**

# **Tudományos Diákköri Dolgozat**

## **Algoritmus fejlesztése gépjármű futóművek analíziséhez**

**Dolgozat készítő:**

Görögh Tamás

**Konzulens:**

Dr.Szabó Bálint

Budapest, 2015.10.28



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépjárművek és Járműgyártás Tanszék**

Budapest, XI. Stoczek u. 6. J. épület. Levélcím: Budapest, Pf. 1521, telefon: 463-1615, fax: 463-3978,  
e-posta: titkarsag@auto.bme.hu, web: www.auto.bme.hu

## Tartalomjegyzék:

1. Bevezetés	3.old.
2. Dinamikai modellezés	4-13.old.
3. A mozgásegyenlet felépítése	13-22.old.
4. Gerjesztés	23-25.old.
5. Lengéskényelmi mutatók	15-28.old
6. A megvalósított algoritmus leírása	28-34.old
7. Próba futások	34-36.old
8. Összefoglalás	36.old
9. Irodalomjegyzék	37.old

## Ábrajegyzék

- 1.Ábra: Egy szabadságfokú rendszer sematikus ábrája
- 2.Ábra: 2dof rendszer
- 3.Ábra: Tehergépjármű oldalnézet
- 4.Ábra: Modellezési alrendszerek
- 5.Ábra: Szabadságfokok a modellben
- 6.Ábra: Vontató helyettesítése transzverzális lengőrendszerrel
- 7.Ábra: Vontató helyettesítése torziós lengőrendszerrel
- 8.Ábra: Ingán mozgó tömegpont mechanikai modellje
- 9.Ábra: Negyed járműmodell rázáshoz
- 10.Ábra: 4 szabadságfokú fél járműmodell
- 11.Ábra: Útprofil időfüggvény (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)
- 12.Ábra: Energiasűrűség spektrumok (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)
- 13.Ábra: Paraméterek az útgerjesztés generálásához (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)
- 14.Ábra: Trecoktávok szerinti felbontás (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)
- 15.Ábra: Parciális mutatók (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)
- 16.Ábra: Redukált mutató VDI szerint (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)
- 17.Ábra: Súlyozó tényezők ISO szerint (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet)

**Számítási dokumentáció**

- 18.Ábra:Redukált mutató(Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)
- 19.Ábra: VDI határgörbék(Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)
- 20.Ábra:Grafikus interfész főfelület
- 21.Ábra:Karakterisztika beolvasás
- 22.Ábra:Gerjesztés
- 23.Ábra:Rugóerő számítása
- 24.Ábra:Kerékerők
- 25.Ábra:Rugóerő számítás
- 26.Ábra:Csillapító blokk
- 27.Ábra:Túl erős csillapító miatti kocsiszekrény ereszkedés
- 28.Ábra: Alulcsillapított rendszer mozgása

## Bevezetés

A dolgozat célja hogy egy lengőrendszer szimulációján keresztül bemutassa, hogy hogyan lehet modellek alkalmazásával ,olyan a tervezés szempontjából fontos paramétereket meghatározni, mint a lengéskényelmi mutatók, vagy a különféle rugók terhelései(középtérték,maximum, minimum). Az implementált modellt numerikus úton oldom meg (Runge-Kutta módszer) és a meghatározott állapotváltozók segítségével a kerékterhelés , és a rugóterhelések meghatározhatóak.

A modell csupán függőleges irányú mozgásokat és átterhelődéseket vizsgál, ezek hosszirányú dinamikára vonatkozó hatásával( a kerekeken kifejthető hajtó és fékező nyomaték függ a kerekek függőleges terhelésétől, illetve a szlip(eltérés a kerék középpontjának sebessége (járműsebesség)és a kerék kerületi sebessége között)-től.

Ugyanígy nem veszi górcső alá a futóművek momentán centrumainak hatását amelyek a sajátkormányzási hatásokat , illetve a felépítmény dőlésén keresztül szintén az átterhelődésekkel hat a hosszirányú és oldalirányú dinamikára.

## Dinamikai modellezés

### Mi a modell?

A modell a valóság leképezése egy matematikai egyenletté , vagy egyenletrendszerre amelyek megoldásával a valós folyamat vagy folyamatok lefutására és végkimenetelére akarunk kijelentéseket tenni. Tehát a modell a fizikai problémák matematikai interpretációja.

Azonban nem szabad elfelejtenünk , hogy a modellek csupán közelítései a valós folyamatoknak és nem tudják egzaktul leírni a folyamatot. Ezért , a kísérleti ellenőrzésnek mindig is fontos szerepe lesz a modellek validálásában , hiszen ezzel nyerünk egy visszacsatolást amely segítségével a modell pontosságára tudunk

előrejelzéseket tenni. Maguk a modellek a tudomány számtalan ágában(mérnöki tudományok, orvos tudományok, csillagászat, részecskefizika...) használatosak, és egy igencsak effektív eszközt adnak a szakemberek kezébe. Ezzel el is érkeztünk a következő kérdéshez:

### Miért modellezünk?

A modellek alkotásával , időt és ami a legfontosabb költséget tudunk spórolni , hiszen bonyolult fizikai folyamatokat tudunk pusztán matematikai alapokon közelíteni , úgy hogy magát a fizikai folyamatot nem kell reprodukálnunk a vizsgálatainkhoz.

De mint azt az előzőekben kifejtetem a modelleket validálni és verifikálni szükséges!

A következőekben megvizsgáljuk a modellképzés lépéseit. Ebben a kérdéskörben is számtalan eljárás és definíció található, én K.M.Hangos-I.T.Cameron:Process Modelling and Model Analysis című könyve alapján a következő lépéseket definiáltam:

### Modellképzés lépései:

#### 1.lépés:

A probléma definiálása:Ebben a lépésben az általunk vizsgálni kívánt problémát közelítjük és elemezzük. Nagyon sok a modell végső felépítését eldöntő kérdést itt teszünk meg pl: Melyek legyenek a bemeneti és kimeneti változók, ezek száma , illetve a rendszerünk statikus vagy pedig dinamikus legyen-e ,és a rendszer hierarchiájára is itt teszünk előzetes becsléseket.

#### 2.lépés:

A rendszer működésének azonosítása. Ebben a lépésben meghatározzuk , hogy a rendszerünkben milyen fizikai, kémiai, biológiai folyamatok mennek végbe.

#### 3.lépés:

Adatgyűjtés és kiértékelés: Mivel a rendszerek egy természetes folyamat matematikai leképeződései ezért itt is szükség van a bemeneti változók definiálására.

#### 4.Lépés:

Az egyenletek felírása: Az általunk feltérképezett rendszer belső mechanizmusainak egyenletekkel (legtöbbször lineáris vagy nemlineáris differenciálegyenlet) való leírása. Ezen egyenletek segítségével képezzük le a folyamatot .

#### 5.lépés:

A 4 lépésben felállított egyenlet, vagy egyenletrendszer megoldása , vagy egzaktul , vagy pedig valamilyen közelítő numerikus eljárás segítségével. A leggyakoribb numerikus ,közelítő eljárások: Taylor sor(másodrendű), Runge-Kutta módszer(másodrendű- negyedrendű), Adams-Bashforth módszer, Adams-Moulton módszer, Prediktor-Kollektor módszer.

#### 6.Lépés:

Verifikálás: Az 5 lépésben kapott megoldások megfelelnek-e az előzetesen elvárt eredményeknek. Amennyiben ez nem teljesül vagy az 5. lépésben az egyenletek megoldásában történt hiba , vagy pedig visszaugrunk a 4.lépésre és megvizsgáljuk a mozgásegyenleteket. Ha ezután is fenáll az ellentmondás akkor a 3. lépést is megvizsgálhatjuk , hogy az adatgyűjtés és kiértékelés megfelelően megtörtént-e. pl:stohasztikus folyamatoknál a várható érték , vagy pedig jó mintát vizsgáltunk-e

#### 7.lépés:

Validálás: A modell futtatásakor kapott adatok megfelelnek-e az eredeti folyamat lefutásakor kapott értékekkel, amelyeket független mérésből, mérésekből kaptunk. Amennyiben a kapott értékek hibahatáron belül vannak akkor a modellünket megfelelőnek titulálhatjuk. Amennyiben ez nem teljesül , akkor az előző lépések ellenőrzésén túl a 2. és 1. lépést is érdemes átnézni.

A következőekben mechanikai modellt fogok vizsgálni így célszerű először a mechanikai modellek alap „építőköveinek” megismerésével kezdenem

#### 1.Tömeg:

Annak mértéke hogy az elem milyen mértékben áll ellent az öt erő hatásokra. Kiterjedt testeknél a tömegközéppontba koncentrált tömeggel szokás számolni, amennyiben nem fontos a test kiterjedése és geometriai felépítése. Forgó mozgást végző rendszereknél a tömeg geometriája is fontos, ott tehetetlenségi nyomatékokat alkalmazunk.

## 2. Csillapító hatások:

A mechanikai rendszer tömegei, általában valamilyen közegben mozognak. A relatív sebesség különbség miatt fellépő nyomáseloszlás változás egy sebességet gátló erőhatásként jelenik meg, vagyis egy sebességgel arányos csillapító hatásként. Ugyanígy a rendszer anyaga is csillapító hatással bír, hiszen a benne felhalmozott alakváltozási energia nem alakul vissza teljesen, hanem az anyag szövetszerkezetében lévő hibák, diszlokációk mozgására fordítódik, vagy pedig az egymáson elcsúszó rétegek súrlódása révén hőenergiává alakul, emiatt a feszültség alakváltozási görbe egy hurkot, úgynevezett hiszterézis hurkot ír le. Ennek a huroknak a területe nem arányos az alakváltozás frekvenciájával (tehát az alakváltozási sebességgel), csupán az alakváltozás nagyságától függ. Így a fázisa a sebesség irányába esik, nagysága a rugalmas energiától függ. Ugyanígy a szerkezet elemei között fellépő súrlódások is energiát vonnak el a rendszerből. A mechanikai modellezési feladatoknál a csillapító hatások lekövetése és azonosítása az egyik legbonyolultabb fellépő probléma. Az esetek többségében egy sebességgel lineárisan változó csillapító hatást feltételeznek (lineáris modell), de a valóságban valamilyen magasabb fokszámú polinommal lehet a karakterisztikát leírni (nemlineáris modell). A csillapítások meghatározásánál a legfontosabb a megfelelő kísérletekkel alátámasztott modell és karakterisztikák meghatározása. A vizsgálatok során különféle reológiai modellel (Maxwell, Solid, Fluid), vagy pedig a szerkezeten elvégzett kísérleti modális vizsgálatokkal meghatározott FRF mátrix paraméterbecslésével, vagy SVD felbontásával lehet a csillapítást közelítően meghatározni, amelyet ezután fel lehet használni VEM programokban, vagy egyéb modellezésben.

## 3. Rugalmas elemek:

A dinamikai rendszerekben a helyzeti energia tárolója legtöbbször valamilyen rugalmas elem. Általánosan feltételezhetjük, hogy a Hook-törvény igaz a szerkezetben, vagyis a feszültség és az alakváltozás között egy  $E$ , vagy torziós rendszerek esetén  $G$  –vel jelölt anyagfüggő konstans teremt lineáris kapcsolatot. Természetesen a rugalmas elemek jó része nem lineáris karakterisztikát követ, de lineáris elemek használata esetén a differenciálegyenletek, vagy rendszerek lényegesen kezelhetőbbé válnak.

A következőekben a mechanikai modellezés járművekre és mobil gépekre történő alkalmazását fogom áttekinteni.

Az ilyen irányú modellképzés egyik legfontosabb feladata a különféle járműdinamikai problémák vizsgálata. A járműdinamika a dinamika törvényeit, elveit alkalmazza a járművek mozgásviszonyainak és az azokat alakító erőhatások vizsgálatának céljából. A járművek mozgásviszonyait fel lehet osztani két nagy csoportra a jármű főmozgására illetve a parazita mozgásokra. A főmozgás nem más mint a közlekedést végző jármű közlekedési pálya mentén megvalósuló rendeltetésszerű mozgása. A parazita mozgások a járműnek mint több szabadságfokú lengőrendszernek a fékező vagy gyorsító hatásokból, vagy a környezetéből a járművet érő gerjesztő hatásokból felépülő gerjesztett lengés vizsgálatát jelenti. A járműdinamikát ezen elvek alapján fel lehet osztani horizontális dinamikára és vertikális dinamikára. A horizontálisdinamika a menetdinamikát foglalja magába, vagyis a hossz és kereszt dinamikát: kormányzás, fékezés, hajtás, vagyis a jármű főmozgását legjobban befolyásoló tényezők. A vertikális dinamika elsősorban a menetkényelem szempontjából fontos, de mivel a jármű futóművén keresztül a hossz és vertikális dinamika kapcsolatban van egymással ezért a megfelelő biztonság, kényelem, és nem utolsósorban a megfelelő modell megalkotása során a kettő közötti kapcsolatot nem szabad figyelmen kívül hagyni. Például a kocsifelépítmény dőléskinematikája (billenési momentán centrum, bólintási momentán centrum, billenési momentán tengely) befolyásolja a kinematikus és elasztikus sajátkormányzást, míg a bólintási centrum pedig a kerekterheléseket, és ezáltal az átvihető oldal és hosszserő nagyságát.

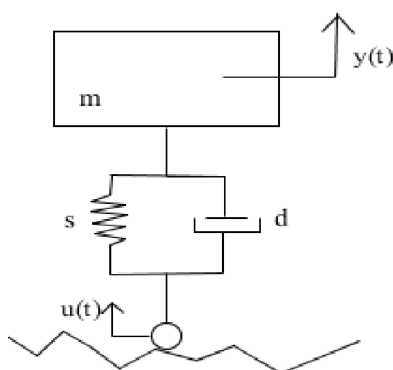
További vizsgálataim tárgya a járműmodellek vertikális dinamikája lesz. A járműdinamikai modellalkotás során általában diszkrét



tömegekből, rugókból, csillapítókból felépített rendszerekkel közelítjük a valódi járművet.

Az így felépített modellek talán a legfontosabb eszközei a jármű szimulációnak. Nem csupán kontrollerek és felfüggesztés tervezésére használhatóak, de a megfelelő modell akár kifáradási, akusztikai, vagy crash modellekhez is alkalmazható.

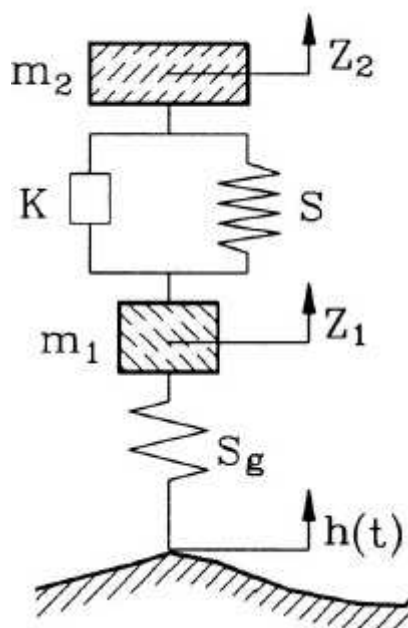
Általában az így felépített modelleket a szabadságfokok száma szerint, a mozgás dimenziója szerint (térbeli, síkbeli), vagy pedig linearitás szerint csoportosíthatjuk. A leggyakrabban használt járműmodellek a síkbeli modellek. Itt megkülönböztetünk egy szabadságfokú (negyedjáromű) modellt, ahol a megfelelő redukciós számítások során kapott egyszerűsített felfüggesztéssel a jármű negyed tömegét rugózzuk (rázás). Ezt a modellt általában csupán irányértékek kijelölésére és a rendszer modális paramétereinek (sajátvektorok, sajátértékek) a becslésére használják.



1.Ábra: Egy szabadságfokú rendszer sematikus ábrája

A modell további finomítására ad lehetőséget a szabadságfokok növelése.

A következő lépcsőfok a két szabadságfokú egy tömegű modell. Itt már megjelenik a modell forgásából származó mozgás, ezért itt már szükség van a tömeg forgástengelyre számított másodrendű nyomatékára (tehetetlenségi nyomaték) is. Ebben az esetben vizsgálódásainkat végezhetjük a jármű hossz tengelyére merőleges síkban (rázás, dőlés), vagy pedig a hossz tengely metszet síkjában (rázás és bólintás). Ezt a modellt szokás fél jármű modellnek is nevezni. A két szabadságfokú modellek másik fajtája amikor a felépítmény elfordulását elhanyagoljuk és csak a függőleges rázással foglalkozunk.



2.ábra: 2dof rendszer

Ebben fajta modellben a két szabadságfokot a rugózott és rugózatlan tömegek jelentik. A modellt előszeretettel használják lengéskényelmi mutatók számításához, amikor az a kérdés, hogy az út felől érkező sztohasztikus gerjesztésekre a felépítmény milyen választ fog adni. A lengésgyorsulások teljesítménysűrűség spektrumának számítása után a VDI 2057 és az ISO 2631 szabványok alapján a lengéskényelmi mutatók kiszámíthatók.

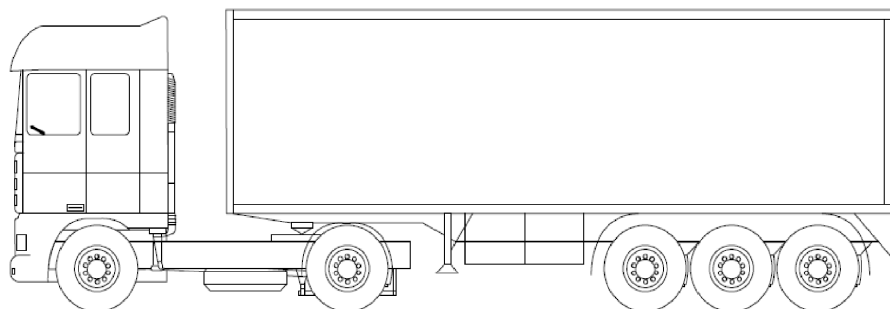
A nagyobb szabadságfokú modellek már figyelembe veszik a felfüggesztés rugózatlan tömegeit, illetve haszongépjárművek esetén az alváz és felépítmény közti rugózást is. További szabadságfok növeléssel a jármű motorját és hajtásláncának a beépítésére is sor kerül, mivel ezek-legfőképp a motor – jelentős belső gerjesztő hatást képes kifejteni, illetve akusztikai szempontokból nagyon fontos az erőátviteli rendszer modális modelljének az ismerete.

Az alábbiakban bemutatok egy 44 szabadságfokú modellt( Forrás:Willem-Jan Evers: Improving driver comfort in commercial vehicles )

Az alábbi képen egy klasszikus Európában elterjedt nyerges vontató képe látható. A legfőbb különbség az amerikai kontinensen és Euráziában használt tehergépjárművek esetében az, hogy az utóbbinál a járművezető a motor, sebességváltó, tengelykapcsoló

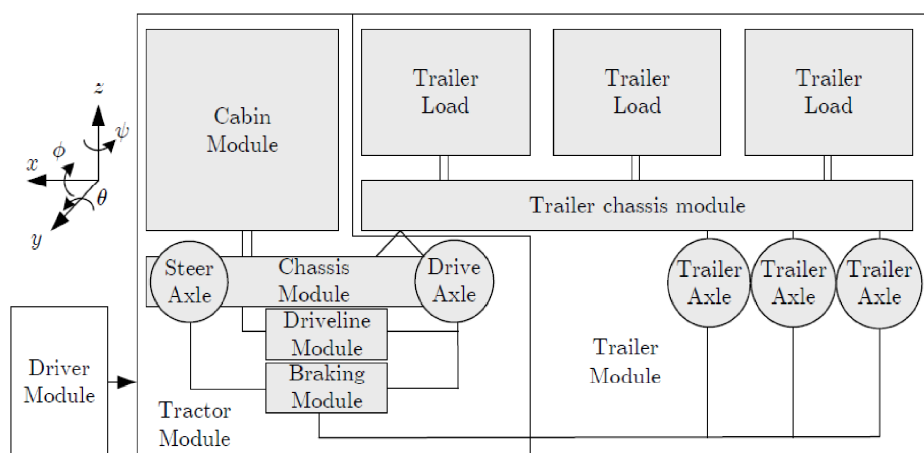
## Számítási dokumentáció

rendszerek felett ül a kabinban, ezáltal az ezekből érkező gerjesztő hatások jobban jelentkeznek, míg az amerikai kontinensen a motor blokk a tehergépjármű előrenyúló orr részében található. Az eltérés oka az, hogy Európában a szűkebb utak miatt praktikusabb egy sokkal kisebb fordulósugarú kompaktabb jármű.



3.Ábra: Tehergépjármű oldalnézet

A fenti járművet a modellalkotás folyamán alrendszerekre osszuk fel. Ezeket az alrendszereket vagy fekete dobozként modellezzük, vagyis klasszikus rendszerszemlélet szerint maga a rendszer csupán egy blokk ami a bemenő jeleket leképezi a kimenő jelekké a megfelelő fizikai törvények szerint, vagy pedig az állapotteres felírás szerint a rendszer belső állapotváltozóinak a változását is nyomon követhetjük. Ezek az alrendszerek a rendszerhatáron keresztül kapcsolatban vannak egymással.



4.Ábra: Modellezési alrendszerek

A jármű alrendszereinek felosztása látható a képen. Mint látható a jármű két nagyobb alrendszerre osztható fel. Ezek a vontató rész és a trailer rész. Ezeket tovább lehet alrendszerekre osztani.

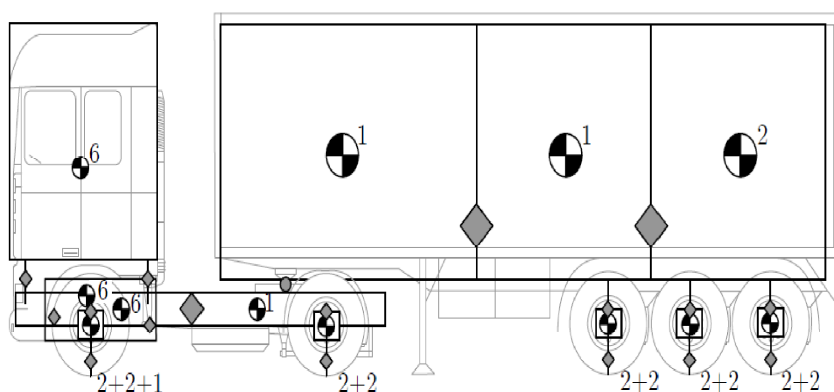
## Számítási dokumentáció

Vontató rendszer: kormányzott kerék és első felfüggesztés, hajtott tengely és hátsó felfüggesztés, alváz, hajtásrendszer(motor,tengelykapcsoló,mechanikus vagy hidrodinamikus váltó, kardántengely,differenciálmű,féltengelyek),fékrendszer,kabin modul

Trailer rendszer: alváz, terhelés ,futóművek, fékrendszer

A két nagyobb alrendszer között a csukló és a fékrendszer hoz létre kapcsolatot.

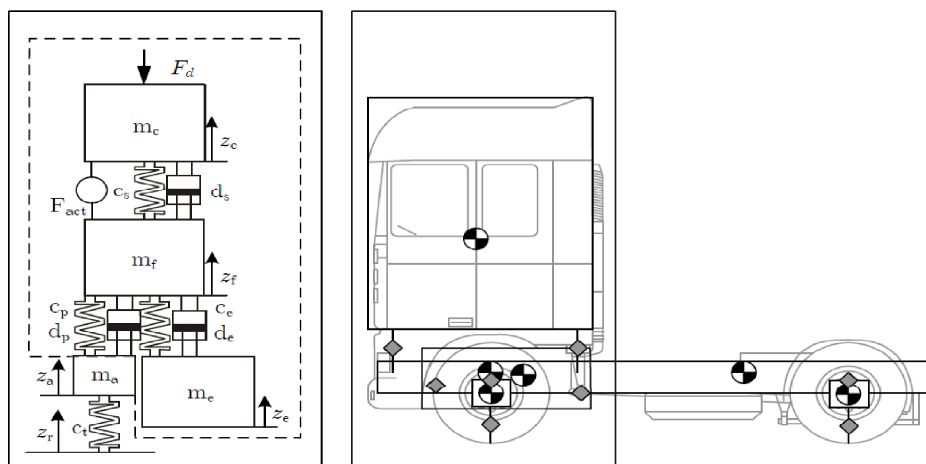
A 44 Dof rendszer felépítése az alábbi ábrán látható:



5.Ábra:Szabadságfokok a modellben

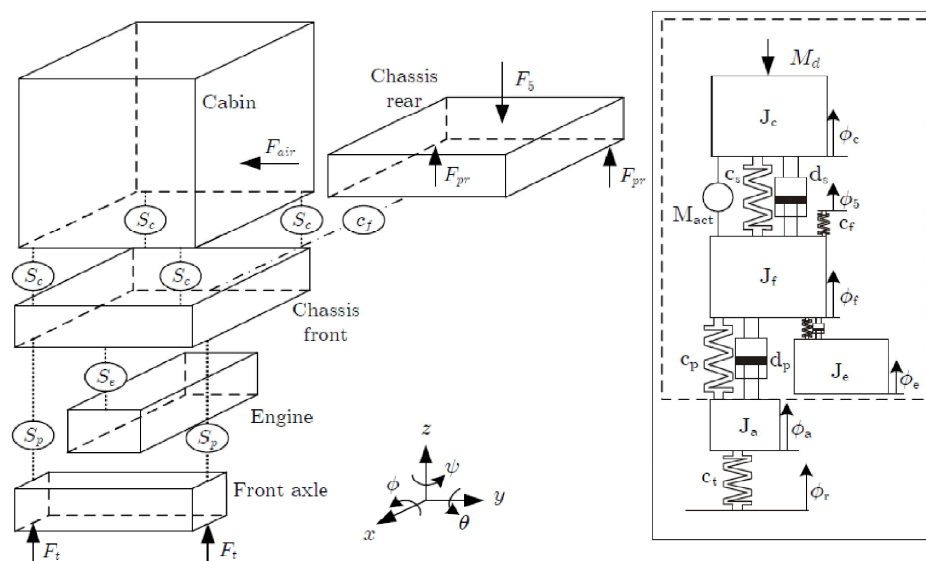
Természetesen amennyiben a modell nem kívánja meg az egész jármű ismeretét , akkor megfelelő elhanyagolásokat lehet tenni annak érdekében hogy számítási időt és teljesítményt spóroljunk meg, de az eredmények még így is a hibahatáron belülre essenek.

Egy ilyen redukált modellt mutat az alábbi ábra.



6.Ábra: Vontató helyettesítése transzverzális lengőrendszerrel

Itt csupán a nyerges vontató első részét-első futómű,motor,alváz első része,kabin-vesszük figyelembe és ezek alapján építünk fel egy 4 szabadságfokú modellt. Ebben a modellben a rázást tudjuk vizsgálni , hiszen a tömeg blokkokban a translációs tömeg szerepel és ugyanígy a rugómerevségek és a csillapítók is mind a haladó mozgásra vonatkoznak. Az általános koordinátáknak az egyes tömegek eltolódását választották . Ugyanígy vizsgálhatjuk a vontató támolygását is , ekkor a hossztengetyre merőleges síkból vizsgáljuk a modellt.



7.Ábra: Vontató helyettesítése torziós lengőrendszerrel

Ebben a modellben is a vontató első részét vizsgáljuk tehát a trailer és a hátsó felfüggesztés illetve az alváz hátsó részét csupán az első részre ható nyomatékaikkal vesszük figyelembe. A rugómerevségeknél a megfelelő torziós rugómerevségek vannak feltüntetve , illetve a jobb oldali modellben ezek és a megfelelő csillapítók redukált helyettesítő értékei vannak implementálva. A tömegblokkokban a tömeg tehetetlenségi nyomatékai szerepelnek, és az általános koordináták pedig a megfelelő szögelfordulások.

Jelen modellezési feladat esetén teljesen nemlineáris dinamikai modellezés fog történni ezért a lineáris esetben alkalmazható eljárások nem alkalmazhatóak, illetve a nemlineáris jelleg miatt sajátérték feladat sem oldható meg, így a sajátértékeket és sajátvektorokat nem kaphatjuk meg.

Mivel jelen dolgozat modellje elsősorban a lengéskényelmi mutatók meghatározását tűzte ki célul ezért ezzel a résszel nem foglalkozok mélyrehatóbban.

Ha fontos lenne adott munkapontban a modális jellemzők értékei akkor az adott munkapontban Taylor sorfejtés segítségével lehetne megkeresni a nemlineáris egyenlet linearizált megfelelőjét.

## A mozgásegyenlet felépítése

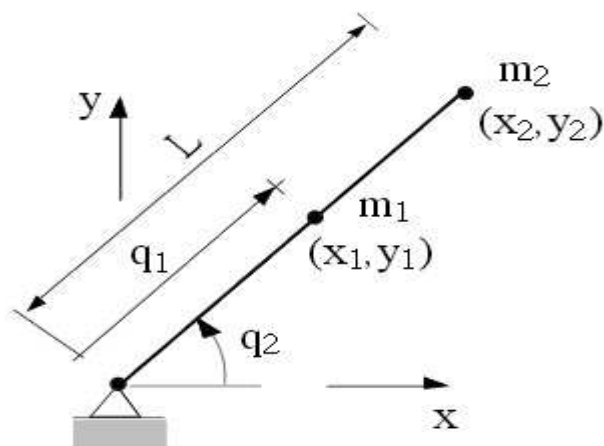
A dolgozat elsősorban modellezéssel foglalkozik, de a modellek felépítéséhez szükséges a megfelelő dinamikai alapok , ezért egy összefoglalóval kezdem, hogy a megoldás során alkalmazott modellek hogyan épültek fel .

A modellezés során 2 modell mozgásegyenletét írtam fel, egy negyed járműmodellt és egy fél járműmodellét.

Ezek közül a fél jármű modellt szimuláltam le a numerikus megoldó algoritmussal.

A mozgásegyenleteket a másodfajú Lagrange-egyenletek segítségével számítottam ki, és ezek mátrixokba foglalásával kaptam meg az együttható mátrixokat.

A dinamikai modellezés során nagyon fontos a megfelelő koordináta rendszerek használata , mivel a megfelelő koordináta rendszer használatával könnyen lehet a mozgásegyenlet egyes együttható mátrixait módosítani.



8.Ábra: Ingán mozgó tömegpont mechanikai modellje

Ha nem a test saját természetes koordináta rendszerében írjuk fel az egyenleteket, hanem egy rögzített koordináta rendszerben (mint az ábrán látható inga esetén) akkor a rögzített koordináta rendszerben a tömeg és inercia adatok függetlenek a helyzettől (mivel a nyugvó koordináta rendszerből konstansnak tűnik a tömeg), de megjelennek a Lagrange-multiplikátorok amelyekkel a kényszeregyenletek Jacobi-mátrixa szorzódik.

Hasonló módon egyszerű lesz a potenciális erők vektora is.

Ellenben ha a természetes koordinátákkal történik a felírás egyrészt csökken az egyenletszám (jelen esetben 2db saját koordináta leírja a működést), másrészt a tömeg és külső erők mátrixa illetve vektora állapottól fog függeni.

Bizonyos esetekben a természetes koordináták esetén is megjelennek a multiplikátorok. Ilyen eset amikor egy nyerges vontató dinamikáját vizsgáljuk, vagy egy csuklós buszt, illetve bármilyen olyan esetet amikor a vontatványt húz a jármű.

Az általános mozgásegyenlet alakja:

$$(1) \quad \underline{\underline{M}}(t, \underline{y}) \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{k}}(t, \underline{y}, \dot{\underline{y}}) = \underline{\underline{q}}(t, \underline{y}, \dot{\underline{y}})$$

Ahol:

-M : tömegmátrix

-k: a reaktív dinamikai vektor (a Coriolis, centrifugális, giroszkópikus ... hatásokat írja le)

-q: a rendszerre ható konzervatív, disszipatív, és a rendszer mozgásától független gerjesztő erők vektora.

A mozgásegyenletet kétféle módon lehet linearizálni egy kiválasztott helyzete vagy előírt mozgása körül.

## Számítási dokumentáció

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_s(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$$

$\mathbf{y}_s(t)$ : az előírt állapot ami körül a linearizálás történni fog

$\boldsymbol{\eta}(t)$ : a zavaró hatás(elmozdulás)

A (11) mozgásegyenlet együtthatóinak a többváltozós Taylor sorfejtésével képezem az előírt állapot tetszőlegesen kis környezetében az együtthatók közelítését. Mivel a deriváltak tulajdonsága a linearitás, ezért az adott pont környéki parciális deriváltakból felépített deriválttenzor(Jacobi-mátrix) adja az adott pont környékén a legjobb lineáris közelítést az együtthatómátrixoknak és így a mozgásegyenletnek. Ez látható az alábbiakban:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}\left(\underline{t}, \underline{y}_s + \underline{\eta}\right) &= \underline{\underline{M}}(\underline{t}, \underline{y}_s) + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial \underline{y}_i}(\underline{y}_s) \eta_i + \dots \\ (2) \quad \underline{\underline{k}}\left(\underline{t}, \underline{y}_s + \underline{\eta}, \underline{\dot{y}}_s + \underline{\dot{\eta}}\right) &= \underline{\underline{k}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s) + \frac{\partial \underline{\underline{k}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s)}{\partial \underline{y}} \underline{\eta} + \frac{\partial \underline{\underline{k}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s)}{\partial \underline{\dot{y}}} \underline{\dot{\eta}} + \dots \\ \underline{\underline{q}}\left(\underline{t}, \underline{y}_s + \underline{\eta}, \underline{\dot{y}}_s + \underline{\dot{\eta}}, \underline{f}_s^e + \underline{f}_\eta^e\right) &= \underline{\underline{q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e) + \frac{\partial \underline{\underline{q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)}{\partial \underline{y}} \underline{\eta} + \frac{\partial \underline{\underline{q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)}{\partial \underline{\dot{y}}} \underline{\dot{\eta}} + \frac{\partial \underline{\underline{q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)}{\partial \underline{f}_\eta^e} \underline{f}_\eta^e + \dots \end{aligned}$$

A behelyettesítések után mindig az előírt pontban lévő mozgás egyenletét kapjuk (az első tag a Taylor sorban), illetve az ettől való eltérés egyenletét. Mivel többszabadságfokú rendszereket vizsgálunk ezért az  $\mathbf{y}$  általános koordináta vektor szerinti deriválások az adott együttható deriválttenzorát (Jacobi-mátrixát) fogja adni. Az azonos változó szerint képzett Jacobi mátrixokat összevonva, illetve a gerjesztő hatásokat és a rendszeregyenletet szétválasztva kapjuk az alábbi kifejezést:

$$(3) \quad \underline{\underline{M}}(\underline{t}, \underline{y}_s) \underline{\dot{\eta}} + \underbrace{\left( \frac{\partial \underline{\underline{k}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s)}{\partial \underline{\dot{y}}} - \frac{\partial \underline{\underline{q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)}{\partial \underline{\dot{y}}} \right)}_{\underline{\underline{P}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)} \underline{\dot{\eta}} + \underbrace{\left( \frac{\partial \underline{\underline{k}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s)}{\partial \underline{y}} - \frac{\partial \underline{\underline{q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)}{\partial \underline{y}} + \frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial \underline{y}} \underline{\dot{y}}_s \right)}_{\underline{\underline{Q}}(\underline{t}, \underline{y}_s, \underline{\dot{y}}_s, \underline{f}_s^e)} \underline{\eta} = \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{q}}}{\partial \underline{f}_\eta^e} \underline{f}_\eta^e}_{\underline{\underline{u}}(t)}$$

A P és Q mátrixokat szétbontva egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus részre, kapjuk a lineáris mozgásegyenletnél márt bevezetett G, D, S, N mátrixokat amelyek segítségével a lineáris dinamika alapegyenletét fel tudjuk írni.



## Számítási dokumentáció

$$(4) \quad \underline{\underline{P}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}^T)}_D + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{P}}^T)}_G \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T, \underline{\underline{G}} = -\underline{\underline{G}}^T$$

$$\underline{\underline{Q}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^T)}_S + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}}^T)}_N \quad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{N}} = -\underline{\underline{N}}^T$$

Így:

$$(5) \quad \underline{\underline{M}} * \ddot{\underline{y}} + (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{G}}) * \dot{\underline{y}} + (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{N}}) * \underline{y} = \underline{f}(t)$$

Ami az adott pont körüli linearizált mozgásegyenlet, és felismerhető benne lineáris lengéstan állandó együtthatós differenciál egyenlet rendszere.

Ahol:

M,G,D,S,N kvadratikussal való elemű mátrixok, q pedig a modell generalizált koordinátáiból álló vektor.

M: A modell tehetetlenségi hatásait foglalja magába, szerkezete diagonál (súlypontba felírva) vagy pedig szimmetrikus felépítésű (nem súlypontba felírt mozgásegyenlet).

D: A modell viszkózus csillapító hatásait magába foglaló, szimmetrikus mátrix.

G: A modell sebességtől függő, zérus teljesítményű „giroszkópikus”, hatásait magába foglaló ferdén szimmetrikus mátrix.

S: Az elmozdulással arányos konzervatív, visszatérítő hatásokat írja le. Szimmetrikus mátrix.

N: Az elmozdulással arányos nem zérus teljesítményű „cirkuatórikus”, hatásokat leíró ferdén szimmetrikus mátrix.

f(t): A rendszer mozgása által nem befolyásolt gerjesztő hatások vektora.

A mozgásegyenletek alapján a többszabadságfokú rendszer ugyanúgy vizsgálható mint az egyszabadságfokú esetben. Ezek alapján vizsgálható a homogén megoldás, és ezen keresztül a rendszer sajátértékei és vektorai. Mint azt az egyszabadságfokúnál bemutattam a sajátértékek a csillapítási faktoron és a csillapított sajátfrekvencián keresztül jellemzik a rendszert, míg a sajátvektorok a rendszer amplitúdóit határozzák meg.

A homogén megoldáshoz behelyettesítjük a  $\underline{y}(t) = \underline{X} \cdot e^{\lambda \cdot t}$  az egyenletbe így a

$$(6) [\lambda^2 * \underline{\underline{M}} + \lambda * (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{D}}) + (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{N}})] * \underline{X} = 0$$

egyenletet

kapom.

A (7)  $\underline{Z}(\lambda) = [\lambda^2 * \underline{\underline{M}} + \lambda * (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{D}}) + (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{N}})]$  mátrixot rendszermátrixnak, vagy pedig dinamikai merevségi mátrixnak nevezzük (erő/elmozdulás dimenziójú). Ennek a determinánsának a segítségével írható fel a karakterisztikus egyenlet, és annak megoldásával pedig a sajátértékek megkaphatóak. Adott  $\lambda_i$  sajátértékhez tartozóan tudjuk a rendszer jobb, vagy bal oldali sajátvektorait definiálni (szimmetrikus rendszereknél a kétoldali sajátvektorok megegyeznek). Megjegyzés: A mozgásegyenletek Laplace transzformáltja is a fenti kifejezésre vezet.

A  $\underline{Z}(\lambda)$  mátrix inverze pedig az adott elmozdulásra vonatkozó átvitelt, vagy hajlékonyságot jellemzi, ez a  $\underline{Z}(\lambda)^{-1} = \underline{H}(\lambda)$ . A  $\underline{H}(\lambda)$  mátrix és a gerjesztés Laplace transzformáltjának szorzata pedig visszaadja a rendszer adott gerjesztésre vonatkozó átviteli mátrixát. Természetesen lehet átviteli függvényeket definiálni sebességre és gyorsulásra is ezért a rendszermátrixból (dinamikai merevség) a következő átviteli mátrixok származtathatóak:

Compliance	Elmozdulás/erő
Impedance	Sebesség/erő
Inertance	Gyorsulás/erő

Dynamic Stiffness	Erő/elmozdulás
Mobility	Erő/sebesség
Dynamic Mass	Erő/gyorsulás

A fenti táblázatból kitűnik, hogy a mechanikai modellek vizsgálatának alternatív módszere lehet a villamos rezgőköri analógia használata ahol a tömeg a kapacitás, az induktivitás a rugalmas elem, míg az Ohmos ellenállás a csillapító elemnek felel meg.

Az átviteli mátrixokat fel lehet írni a rendszer modális jellemzőiből is, így lehetőség válik, hogy a valós mérések adatait felhasználva lehessen a modellt pontosítani.

A következőkben ismertetem, hogy a mozgásegyenletek milyen alakban kerültek be a numerikus megoldóba.

## Számítási dokumentáció

A modellek konstruálásánál állapottér alakba transzformáltam a mozgásegyenleteket, az általánosított sajátérték mátrixainak a felhasználásával. Az általánosított sajátérték feladat bevezetését az indokolja hogy a (6) saját értékfeladat megoldása ebben a formában bonyolult. Emiatt az (5) egyenletet kiegészítjük az (8)  $\underline{\underline{M}}^* \underline{\dot{y}} - \underline{\underline{M}}^* \underline{\dot{y}} = \underline{0}$  egyenlettel az alábbi módon

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} \underline{\underline{M}}^* \underline{\dot{y}} - \underline{\underline{M}}^* \underline{\dot{y}} &= \underline{0} \\ \underline{\underline{M}}^* \underline{\ddot{y}} + (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{G}})^* \underline{\dot{y}} + (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{N}})^* \underline{y} &= \underline{f}(t) \end{aligned} \right\}$$

Bevezetve az állapotvektort  $\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{y}}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix}$ , és rendezve az egyenleteket a következő

hipermátrixokat kapjuk:

$$(10) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{B}} &= \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{M}} & (\underline{\underline{G}} + \underline{\underline{D}}) \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{A}} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{N}}) \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{u}}(t) &= \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{f}(t) \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{B}}^* \underline{\dot{\underline{X}}} - \underline{\underline{A}}^* \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{u}}(t) \end{aligned}$$

Mint látható nemcsak visszavezettük a feladatot 2 mátrixra, de egyben megteremtettük az alapot a rendszer Cauchy átírására is. Kifejezve a  $\underline{\dot{\underline{X}}}$  vektort és a többi baloldalon lévő tagot a jobb oldalra átrendezve kapjuk az állapottér alakot amelyben már megtörtént a az elsőrendű egyenletté történő redukálás.

$$(11) \quad \underline{\dot{\underline{X}}} = \underline{\underline{B}}^{-1} * \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{B}}^{-1} * \underline{\underline{u}}(t)$$

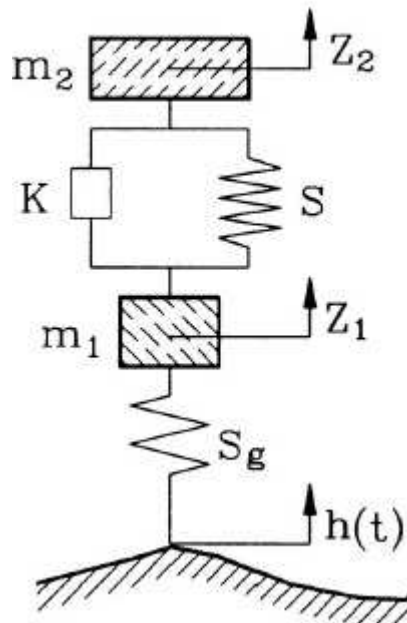
Ezt kiegészítve a megfigyelési egyenlettel kapjuk a kanonikus állapottér alakot, és ez alapján a numerikus megoldó programban a differenciál egyenlet rendszer grafikus módon felépíthető.

A következőekben bemutatom a 2 szabadságfokú rázásra alkalmazott modell lineáris matematikai modelljét, illetve a 4 szabadságfokú modellt is, érzékeltetve hogy a szabadságfok növelése mennyire teszi komplexebbé a modell matematikai felírását.

## Számítási dokumentáció

2 DOF modell:

A mozgásegyenletek rendezését és transzformálását szimbolikus matematikai programban készítettem el. Az alábbiakban a fontosabb mátrixokat mutatom be.



9.Ábra:Negyed járműmodell rázásához

A tömeg mátrix:  $M := \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}$

A csillapítási mátrix:  $K := \begin{bmatrix} kl & -kl \\ -kl & kl \end{bmatrix}$

A merevségi mátrix:  $S := \begin{bmatrix} sl & -sl \\ -sl & sl + sk \end{bmatrix}$

Az állapotmátrix:  $\begin{bmatrix} -\frac{kl}{m_2} & \frac{kl}{m_2} & -\frac{sl}{m_2} & \frac{sl}{m_2} \\ \frac{kl}{m_1} & -\frac{kl}{m_1} & \frac{sl}{m_1} & -\frac{sl}{m_1} - sk \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{A gerjesztő vektor: } \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{sk}{m1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

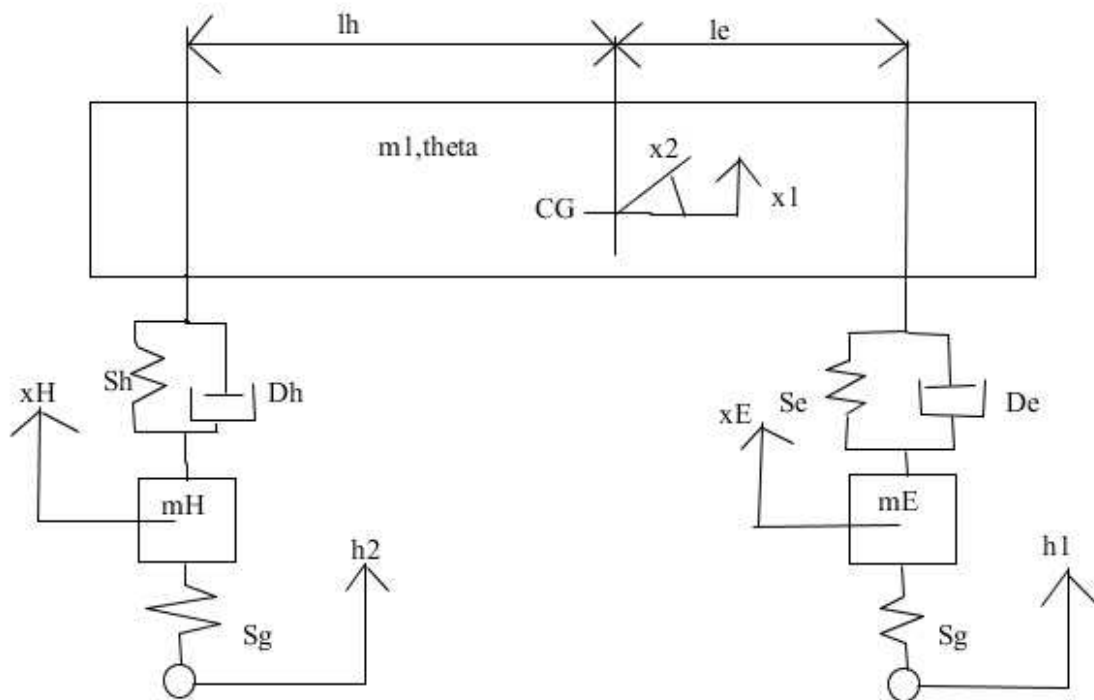
Az átviteli függvények vektora a következő ha csak egy ponton gerjesztjük a rendszert(útgerjesztés) és az összes állapotváltozóra kíváncsiak vagyunk.

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ \frac{(sk1 + s1) ssk}{(s^3 m1 k1 + k1 s^3 m2 + sskk1 + m1 s^4 m2 + s1 s^2 m1 + sk s^2 m2 + s1 s^2 m2 + sk s1)} \right], \right. \\ & \left[ \frac{(s^2 m2 + sk1 + s1) ssk}{(s^3 m1 k1 + k1 s^3 m2 + sskk1 + m1 s^4 m2 + s1 s^2 m1 + sk s^2 m2 + s1 s^2 m2 + sk s1)} \right], \\ & \left[ \frac{(sk1 + s1) sk}{(s^3 m1 k1 + k1 s^3 m2 + sskk1 + m1 s^4 m2 + s1 s^2 m1 + sk s^2 m2 + s1 s^2 m2 + sk s1)} \right], \\ & \left. \left[ \frac{(s^2 m2 + sk1 + s1) sk}{(s^3 m1 k1 + k1 s^3 m2 + sskk1 + m1 s^4 m2 + s1 s^2 m1 + sk s^2 m2 + s1 s^2 m2 + sk s1)} \right] \right] \end{aligned}$$

Ebben a megtalálható az elmozdulás átvitel (az utolsó kettő vektortag), vagyis az út felől jövő gerjesztésre milyen választ ad a rendszer, illetve a sebességátvitel (az első kettő vektortag) ami a bemeneten mérhető gerjesztés és a kimeneten mérhető sebesség között teremt kapcsolatot. A gyorsulás átviteli függvény is könnyen megkapható hiszen mindegyik átviteli függvény egy Laplace konstanssal ( $s=i*w$ ) van megszorozva a többihez képest, vagyis 90 fokos elforgatást jelent a vektortérben. Az előbb idézett átviteli függvények lényegében megegyeznek a táblázatokban megadott angolszász Compliance, Impedance és Inertance függvényekkel.

A következőben a 4 DOF modell állapotteres felírását ismertetem.

## Számítási dokumentáció



10.ábra: 4 szabadságfokú fél járműmodell

A tömegmátrix:  $M :=$

$$\begin{bmatrix} m_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_H \end{bmatrix}$$

A csillapítási mátrix:  $K :=$

$$\begin{bmatrix} D_e + D_h & D_e l_e - D_h l_h & -D_e & -D_h \\ D_e l_e - D_h l_h & D_e l_e^2 + D_h l_h^2 & -D_e l_e & D_h l_h \\ -D_e & -D_e l_e & D_e & 0 \\ -D_h & D_h l_h & 0 & D_h \end{bmatrix}$$

A rugómátrix:  $S :=$

$$\begin{bmatrix} S_e + S_h & S_e l_e - S_h l_h & -S_e & -S_h \\ S_e l_e - S_h l_h & S_e l_e^2 + S_h l_h^2 & -S_e l_e & S_h l_h \\ -S_e & -S_e l_e & S_e + S_g & 0 \\ -S_h & S_h l_h & 0 & S_h + S_g \end{bmatrix}$$

## Számítási dokumentáció

Az állapotér mátrix a következő lesz:

$$\begin{aligned}
 A_{state\_space} := & \left[ \left[ -\frac{De + Dh}{mI}, -\frac{De le - Dh lh}{mI}, \frac{De}{mI}, \frac{Dh}{mI}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{-Se - Sh}{mI}, \frac{-Se le + Sh lh}{mI}, \frac{Se}{mI}, \frac{Sh}{mI} \right], \right. \\
 & \left[ -\frac{De le - Dh lh}{\Theta I}, -\frac{De le^2 + Dh lh^2}{\Theta I}, \frac{De le}{\Theta I}, -\frac{Dh lh}{\Theta I}, \right. \\
 & \left. \frac{-Se le + Sh lh}{\Theta I}, \frac{-Se le^2 - Sh lh^2}{\Theta I}, \frac{Se le}{\Theta I}, -\frac{Sh lh}{\Theta I} \right], \\
 & \left[ \frac{De}{mE}, \frac{De le}{mE}, -\frac{De}{mE}, 0, \frac{Se}{mE}, \frac{Se le}{mE}, \frac{-Se - Sg}{mE}, 0 \right], \\
 & \left[ \frac{Dh}{mH}, -\frac{Dh lh}{mH}, 0, -\frac{Dh}{mH}, \frac{Sh}{mH}, -\frac{Sh lh}{mH}, 0, \frac{-Sh - Sg}{mH} \right], \\
 & \left[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
 & \left[ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
 & \left[ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \\
 & \left[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 \right] \right]
 \end{aligned}$$

A gerjesztő vektor:

$$Q_{state\_space} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{Sg}{mE} & 0 \\ 0 & \frac{Sg}{mH} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az átviteli függvények megjelenítése túlságosan nagy vektort eredményez, de képzésük megegyezik a 2DOF rendszerével.

## Gerjesztés

A következőekben röviden jellemzem a modell gerjesztését és annak felépítését.

A járművek és gépek (legfőképpen a mobil gépek) esetén a leggyakoribb gerjesztés a bizonytalansággal terhelt gerjesztés. Vagyis lehetetlen megmondani hogy a jelenlegi pillanatban ismert gerjesztés a jövőben (t idő múlva) milyen értéket fog felvenni 100%-os valószínűséggel. Emiatt a gerjesztést sztohasztikus folyamatként kell kezelni. A sztohasztikus folyamatokat a matematikai statisztikában megismert eszközökkel lehet vizsgálni: várható érték, szórás, szórásnégyzet, autokorrelációs függvény, keresztkorrelációs függvény.

A lineáris rendszereknél sztohasztikus gerjesztés esetén teljesül a statisztikus dinamika alaptétele miszerint a kimenő jel teljesítmény sűrűség spektruma megegyezik a bemenő jel teljesítmény sűrűség spektrumának és a frekvencia átviteli függvény négyzetének a szorzatával. Azonban ennek a felírásnak nagy hátránya az, hogy a négyzetre emeléssel eltűnik a fázistartalom az átvitelből, vagyis csak az amplitúdó információk lesz.

Mivel a vizsgált modellem nem lineáris lesz, és numerikus integrálással oldom meg a differenciálegyenlet rendszeremet, ezért ebben az esetben nem lesz szükség arra, hogy egy munkapont linearizálás során kapott lineáris frekvencia átviteli függvénnyel számoljak. A válasz teljesítmény sűrűség spektrumának számítására azonban szükségem lesz mivel a lengéskényelmi mutatókat ezek alapján lehet meghatározni.

Jelen esetben a gerjesztés előállítását a Gépjárműmechanika című jegyzet szerint történik, vagyis a lengésgerjesztő útprofil generálása egy meghatározott energiasűrűség spektrum alapján történik. A módszer a Rajsz-Mirszon formulával határozza meg a lengéskeltő profilt, amely gyakorlatilag egy trigonometrikus sor koszinuszos tagjaiból áll.

A generálódó útprofil:

$$X(t_k) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t_k + \varepsilon_i)$$

11.Ábra:Útprofil időfüggvény (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

Ahol:

- n= az energiasűrűség spektrum pontjainak száma
- m=a generált útprofil pontok száma



## Számítási dokumentáció

- $d\omega=2.5[1/s]$  a körfrekvencia lépésköz
- $dt=$  idő lépésköz
- $\varepsilon_i=0\dots 2*\pi[\text{rad}]$ : véletlenszerű fázisszög
- $A_i=(2*d\omega*S[i])^{1/2}$ : amplitúdó
- $S[i]=$  az adott típusú útprofil energiasűrűség spektruma

Mivel a program célja a lengéskényelmi mutatók meghatározása ezért a méréseknek megfelelően mindig 1km-es útszakaszon vizsgálja a lengéskényelmi mutatókat.

A program bemenő paraméternek a vizsgálati sebességet kéri és számítja hogy mennyi idő alatt megy végig 1 km úton.

A  $dt$  lépésköz megadásával kiszámítja az útprofil pontjainak a számát. ( $m=dt/t$ )

A gerjesztés számításához szükséges az energiasűrűség spektrumok ismerete. Ezeket a következő módon lehet meghatározni.

$$S[i] = D_h^2 \cdot \left[ \frac{A_1 \cdot \delta_1 \cdot v}{\omega^2[i] + \delta_1^2 \cdot v^2} + \frac{A_2 \cdot \delta_2 \cdot v \cdot (\omega^2[i] + \delta_2^2 \cdot v^2 + \beta_k^2 \cdot v^2)}{(\omega^2[i] + \delta_2^2 \cdot v^2 - \beta_k^2 \cdot v^2)^2 + 4 \cdot \delta_2^2 \cdot \beta_k^2 \cdot v^4} \right] \quad (3.5.)$$

$$S[i] = D_h^2 \cdot \frac{\delta \cdot v}{\omega^2[i] + \delta_1^2 \cdot v^2} \quad (3.6.)$$

12.Ábra:Energiasűrűség spektrumok (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

Ahol:

- $D_h$  : az útprofil magasság szórás
- $A_1+A_2=1$  : állandók
- $\delta_1, \delta_2$ : a csillapításra jellemző tényezők
- $\beta_k$ : az útprofil periodikus összetevőjét figyelembe vevő tényező
- $v[\text{m/s}]$ : sebesség

Az egyes útfelületek legenerálásához szükséges paraméterek a következők:

Az út típusa	Képletszám	A képletben szereplő állandók					Az útprofil magasság szórása $D_h$ [cm]
		$A_1$	$A_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\beta_k$	
Rossz minőségű földút	(3.5)	0,550	0,450	0,085	0,080	0,235	3,00-10,00
Kikoptatott macskakő	(3.5)	0,953	0,047	0,213	0,049	1,367	2,52
Egyenletesebb macskakő	(3.6)	--	--	0,450	--	--	1,35-2,29
Aszfalt	(3.5)	0,850	0,150	0,200	0,050	0,600	0,80-1,26
Beton	(3.6)	--	--	0,150	--	--	0,50-1,24

13.Ábra: Paraméterek az útgerjesztés generálásához (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

A Rajszy-Mirson modell szerinti gerjesztés felírásánál fontos, hogy a megoldó algoritmus lépésköze megegyezzen a legenerált gerjesztő függvényével, vagy ha nem egyezik meg, akkor a megoldó által használt lépésköz esetén, amennyiben az nem esik egybe a gerjesztő adatsor lépésközével a két gerjesztő adatpont között interpolációval kell egy közbelső értéket meghatározni. Amennyiben változó lépésközü algoritmust alkalmazunk abban az esetben nem szükséges az ilyen fajta interpoláció.

## Lengéskényelmi mutatók

A gyakorlatban két fajta lengéskényelmi mutatót használnak a VDI 2057 szerinti és az ISO 2631 szerinti mutatókat. A VDI 2057 szerinti mutatót elsősorban a német területeken használják. Közös a két módszerben hogy mindkettő kiinduló pontja a válasz lengés gyorsulás sűrűség spektrumából indul ki és különböző frekvenciától függő súlyzó tényezőkkel figyelembe veszi az emberi szervezet frekvencia érzékenységét is. A két módszer közös alapja még hogy a biomechanikailag a derékcsigolyák közötti nyomóerő változását hivatott kifejezni és ezzel becslést adni a

vezetőt ért fárasztó „igénybevételekre”. A két módszert elsősorban haszongépjárművek esetén alkalmazzák.

A VDI 2057 eljárás:

Az energia sűrűség spektrumból meg kell határozni a tercoktávonkénti lengégyorsulások szórását (Forrás: Gépjárműmechanika jegyzet).

$$\frac{f_f}{f_a} = \sqrt[3]{2} \quad \text{ahol } f_f : \text{ a tercoktáv felső határa [Hz]}$$

$$f_a : \text{ a tercoktáv alsó határa [Hz]}$$

$$f_k = \sqrt{f_f \cdot f_a} \quad f_k : \text{ középfrekvencia [Hz]}$$

14.Ábra: Trecoktávok szerinti felbontás (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

Ezután a program megkeresi azokat a pontokat amelyek a megadott frekvenciákhoz tartoznak, amennyiben ilyen nem lenne interpolációval meghatároz egy frekvenciát és ahhoz tartozó sűrűségfüggvény értéket.

Ezután a kapott tercoktáv intervallumokra kiszámítja a függvény alatti területet egy trapéz területformula segítségével a következő módon:

Alsó határ koordinátái:  $f_a, S_a$

Felső határ koordinátái:  $f_f, S_f$

A trapéz területe a következő:  $D^2 = (f_f - f_a) \cdot S_a + ((f_f - f_a) \cdot (S_f - S_a) / 2)$

A területnél  $D^2$  írtam ugyanis a sűrűségfüggvény alatti terület a szórásnégyzettel egyezik meg! Ezután egy gyökvonás segítségével megkapjuk a szórást.

A parciális lengéskényelmi mutatókat a szabvány szerint a következő képen kell kiszámítani:

$$\begin{array}{llll} 1 \leq f_k \leq 4 & [\text{Hz}] & \text{akkor} & K_l = 10 \cdot D_{zi} \cdot \sqrt{f_k} \\ 4 \leq f_k \leq 8 & [\text{Hz}] & \text{akkor} & K_l = 20 \cdot D_{zi} \\ 8 \leq f_k \leq 80 & [\text{Hz}] & \text{akkor} & K_l = D_{zi} \cdot \frac{160}{f_k} \end{array}$$

15.Ábra:Parciális mutatók (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

A redukált mutató a következő:

$$K = \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2}$$

16.Ábra:Redukált mutató VDI szerint (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

ISO 2631 szerinti lengéskényelmi mutató:

Szinte teljesen megegyezik a VDI szerinti képzéssel, az eltérés annyiban merül ki hogy itt a szórásnégyzetekre van szükség a lengégyorsulásokból, és ezeket a szórásnégyzeteket szorozzuk meg súlyozó tényezőkkel amelyek frekvenciától függenek így biztosítva azt hogy az emberi test frekvencia érzékenyen reagál az öt ért lengésekre.

A súlyozótényezők:

$a_i = 0.5 \cdot f_k^{1/2}$	ha	$1 \leq f_k \leq 4$	[Hz]
$a_i = 1$	ha	$4 \leq f_k \leq 8$	[Hz]
$a_i = 8 \cdot f_k^{-1}$	ha	$8 \leq f_k \leq 80$	[Hz]

17.Ábra:Súlyozó tényezők ISO szerint (Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

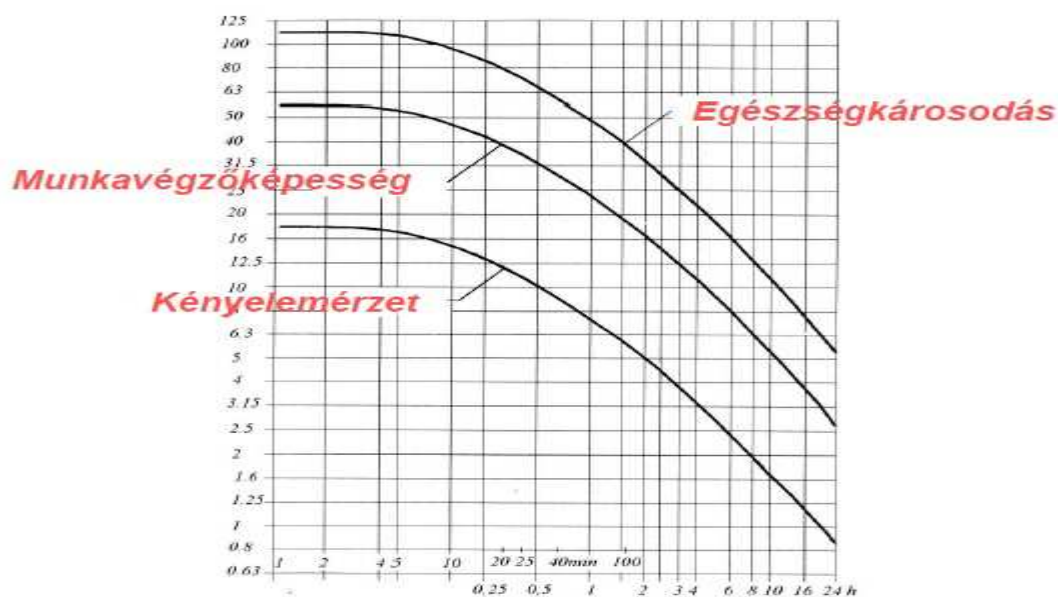
A redukált mutató:

$$D_{ze} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot D_{zi}^2}$$

18.Ábra:Redukált mutató(Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

A kapott redukált mutatókat össze kell vetni a szabvány által meghatározott diagramall, vagy cél értékeke.

VDI határgörbék:



19.Ábra: VDI határgörbék(Forrás:Gépjárműmechanika jegyzet)

ISO határértékek:

$D_{ze}=0,1 \text{ m/s}^2$  : fáradtság nélkül elviselhető

$D_{ze}=0.315 \text{ m/s}^2$  : munkavégző képesség változatlan

$D_{ze}=0.63 \text{ m/s}^2$  : egészségkárosodás nélkül elviselhető

## A megvalósított algoritmus leírása

Az algoritmus a következő bementi értékeket kéri be(összhangban a 4 DOF féljármű modellel):

- felépítmény tömeg ( $m_1$ ) [kg]
- felépítmény inercia ( $\theta$ ) [ $\text{kgm}^2$ ]
- első futómű tömeg ( $m_E$ ) [kg]
- hátsó futómű tömeg ( $m_H$ ) [kg]
- első és hátsó futómű csillapító elem karakterisztikái
- futómű áttételek (út és sebesség áttétel): Ezek az áttételek a futómű geometriai paramétereiből számíthatóak

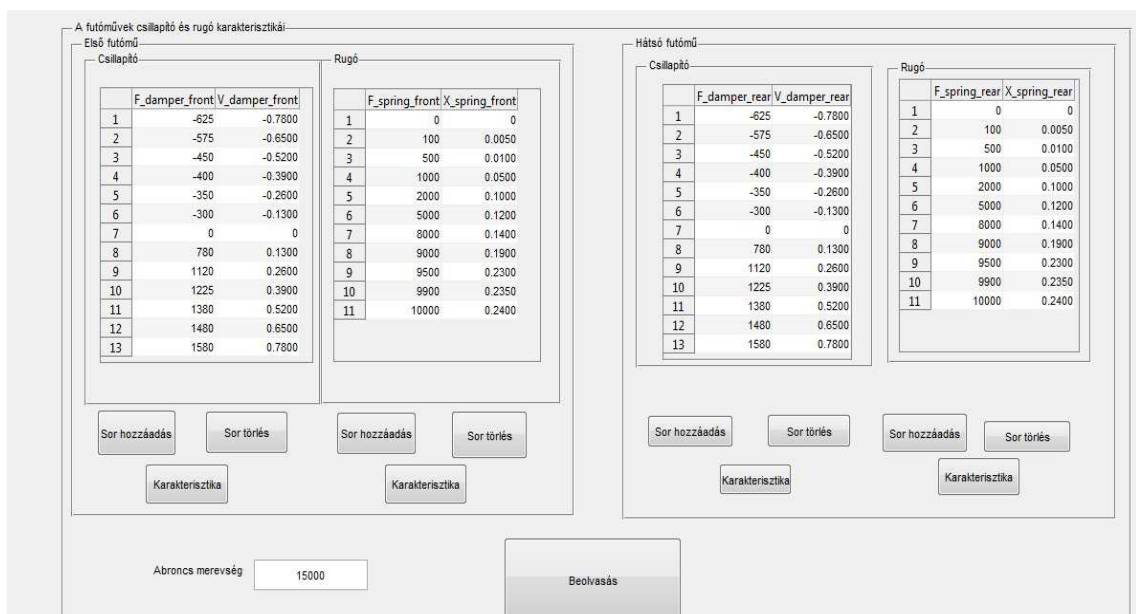
## Számítási dokumentáció

- vizsgált sebesség
- abroncsmerevség (sg)
- vizsgálati lépésköz (dt)
- gerjesztés fajtája( földút, aszfalt, beton, macskakő)

A program környezetben ahol implementáltam az algoritmust létrehoztam egy grafikus interfészt ami megkönnyíti az adatok bevitelét és az eredmények megjelenítését.

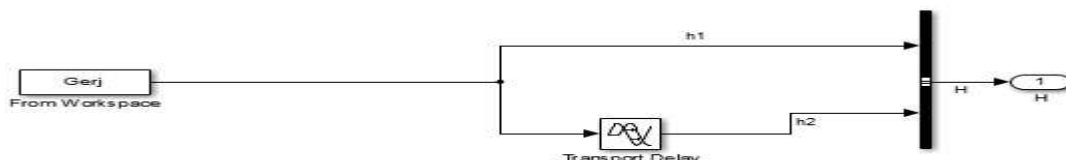


20.Ábra:Grafikus interfész főfelület



21.Ábra:Karakterisztika beolvasás

A modell négy fő alrendszerből tevődik össze. Az első a gerjesztő alrendszer, amelynél a GUI-ban legenerált gerjesztő út-idő függvényt egy-egy dimenziós struktúrában tudom a rendszer bemenetére adni. Itt képzem az első és hátsó futómű közti időeltérést mivel az első futóművet ért gerjesztések  $(l_e + l_h) / v = t_{késés}$  időkésséssel érik el a hátsó tengelyt.

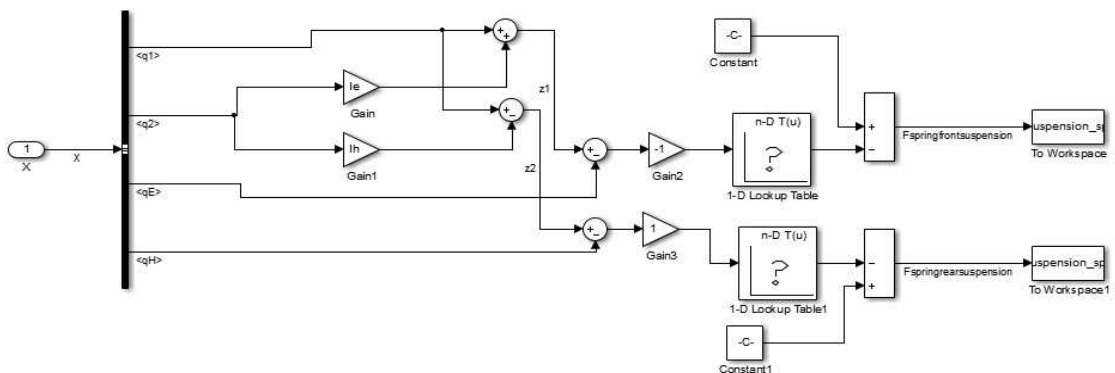


22.Ábra:Gerjesztés

### Rugóerő számítása:

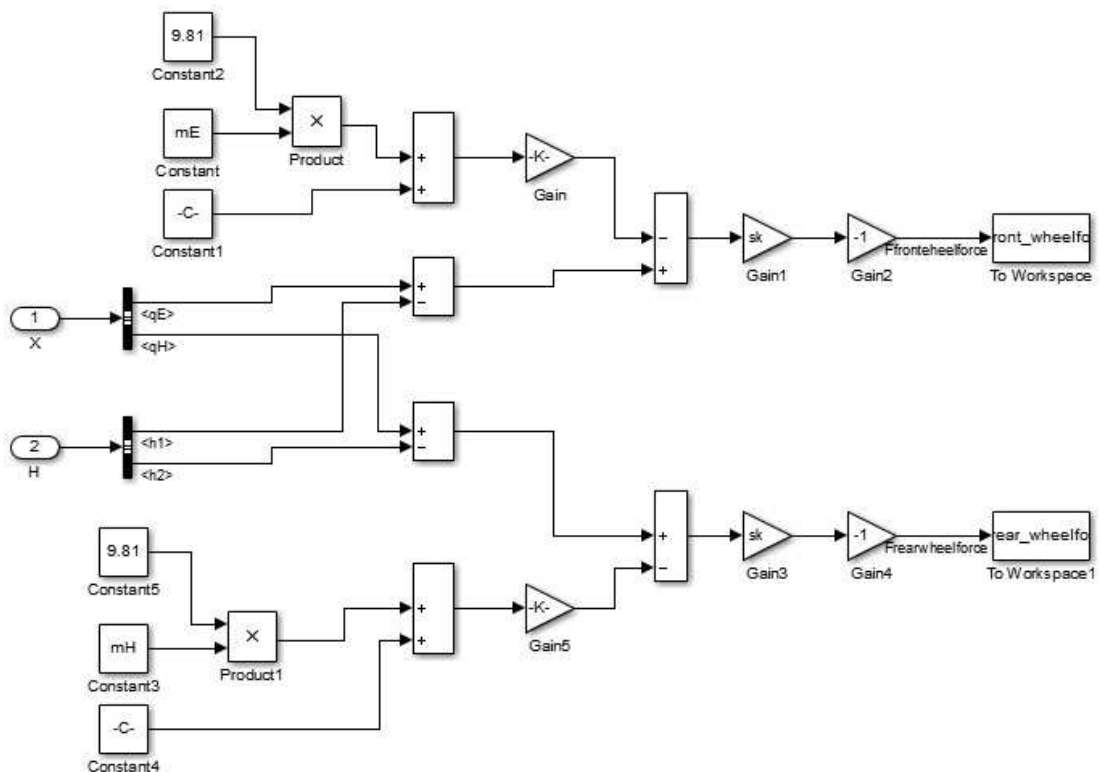
A Springforce nevű alrendszer feladata a rugóerő számítása, mégpedig úgy hogy képi a felépítmény ( $q_1$  változó) és a felfüggesztések ( $q_E, q_H$  változó) különbségét (itt már figyelembe veszi a forgásból eredő rugóbekötés elmozdulást) és ennek veszi a negáltját vagy változatlanul hagyja, majd pedig az értékhez egy 1D Lookup Table segítségével rugóerőt rendel. Az így kapott értéket a rugó statikus előfeszítéséhez adja hozzá és így kapja meg a rugóerőt. A negálásra az első futómű esetében azért van szükség mert a munkapontba összenyomott rugónak, már nem mindegy hogy a két elmozdulás különbsége tovább nyomja-e össze a rugót vagy pedig tehermentesíti, és mivel az eredeti mozgásegyenletek felírásánál a pozitív iránynak a talajszinttől felfelé mutató irányt vettem, ezért ha a  $z_1 - q_E$  érték pozitívrá jön ki, vagyis a felépítmény jobban elmozdul a felfelé mint a futómű ez azt jelenti hogy az addig összenyomott rugó tehermentesül, mivel a húzás miatt a munkapontinál kisebb erőt kell kifejtenie. De mivel a Lookup Tableben a karakterisztika úgy van megadva hogy a húzáshoz (pozitív elmozdulás) tartozzon a pozitív előjelű erő (itt a statikában megismert előjelszabály érvényes, húzott rúd pozitív igénybevételi ábra, nyomott rúd negatív előjelű nyomatéki ábra) ezért ha nem lenne a negálás akkor a rugó leterhelődése pozitív erőt eredményezne vagyis nőne a rugó deformációja, ami a pozitív  $z_1 - q_E$  különbségnek (kirugózás) ellentmondana. A Constans blokkok a felépítmény első és hátsó tengelyre számított súlyerejét adják meg.

## Számítási dokumentáció



23.Ábra:Rugóerő számítása

A kerékerő számítás a következők szerint történik:



24.Ábra:Kerékerők

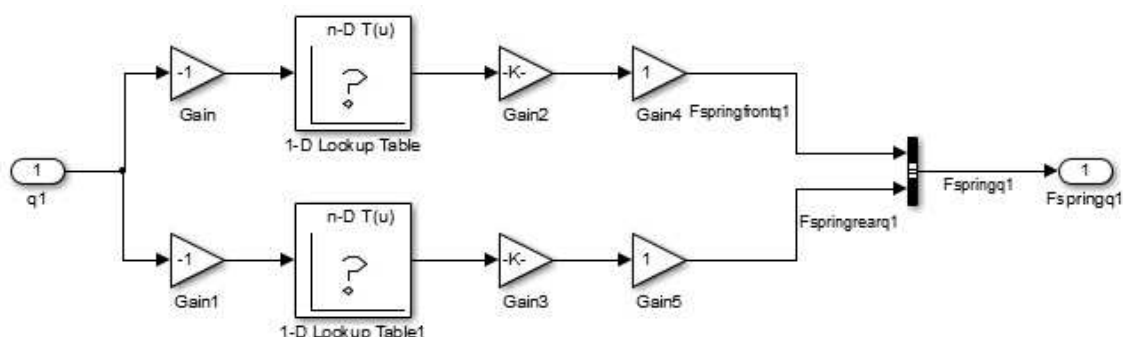
Ebben a blokkban is legelőször képezzük a gerjesztések( $h_1, h_2$ ) és a futóművek( $q_H, q_E$ ) elmozdulásának különbségét( $q_H - h_2, q_E - h_1$ ), majd ezt az értéket vetjük össze az abroncs jármű súlyerejéből származó statikus deformációjával. A statikus deformációt az összes egy tengelyre eső tömeg súlyerejének és az abroncs radiális merevségének a hányadosaként képezem. A kapott dinamikus deformáció és az abroncsmerevség szorzataként pedig előáll a kerékerő.



### Felfüggesztés rugó és csillapító erőinek a meghatározása:

A rugóerőnél az előbbieken elmondottak itt is igazak lesznek, vagyis mivel mind a rugóknak és a csillapítóknak egy jól meghatározott üzemi tartományai vannak, és mivel ezek nem esnek egybe a modell eredetileg felvett koordináta rendszerével ezért itt is szükséges volt a felírt lineáris mozgásegyenleteket módosítani. A módosítás leggyakrabban egy negációt jelent vagyis azért hogy az erők illeszkedjenek a felírt koordináta rendszerekhez a nem lineáris karakterisztikák és munkapontok miatt.

Az első módosítás a felépítmény ( $q_1$  változó) rugóerő hatásában nyilvánul meg. A módosított rugómodellt mutatja az alábbi ábra:

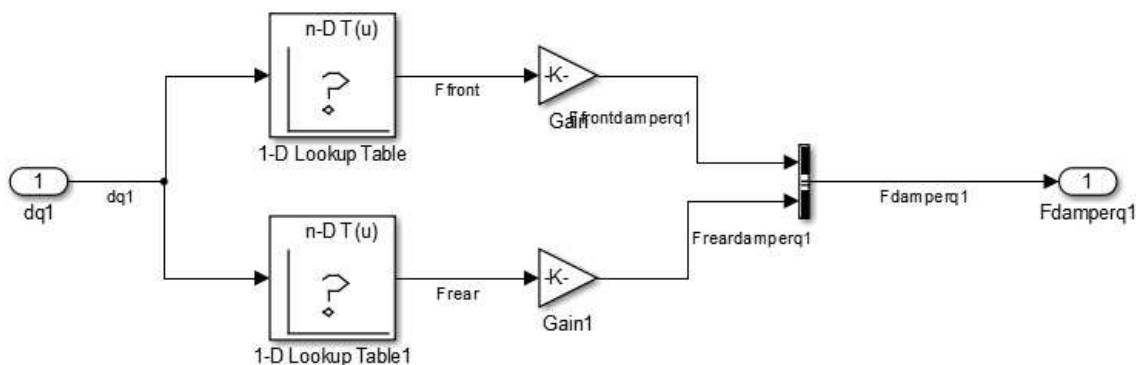


25.Ábra:Rugóerő számítás

A rugóerőnél már megállapítottak igazak itt is , vagyis ha pozitív lenne a  $q_1$  felépítmény elmozdulás, és gondolatban fixáljuk a futóműveket , akkor az egy pozitív erőt jelentene a Lookup-Table-ből felvéve, ami azt jelentené hogy a rugó erő megegyezik az elmozdulással , mert mindkettő a globális pozitív irányba mutat. Ezt az erőt negatívan visszacsatolva megkapjuk előjelhelyesen a felépítményre ható erőt(gyorsulást), vagyis akadályozza az elmozdulást a rugó ami helyes. Azonban mivel egy előfeszített, adott munkapontban dolgozik a rugó, ezért a ki és berugózási tartomány megkülönböztetendő egymástól, mivel ritkán van lineáris karakterisztikájú rugó a futóműben. Ha teljesen lineáris lenne a rugó karakterisztika akkor teljesen érzéketlen lenne a be és kirugózási tartományra mivel visszacsatolás révén mindig előjelhelyesen történne a gyorsulás visszacsatolása. Nem lineáris karakterisztika esetén azonban a felépítmény pozitív irányú elmozdulása a rugó leterhelődését jelenti, vagyis az eddigi előfeszítő erő csökkeni fog vagyis kirugózás fog történni, ami a tartományban a negatív elmozdulásokhoz tartozó rész(az adott munkaponthoz viszonyítva) lesz. Ezért kell itt is egy elmozdulás negálás is, hogy megfelelően legyen a karakterisztikában a le és

felterhelődés figyelembe véve, de mivel a negálás miatt a negatív előjelű erőket fog a Lookup-Table szolgáltatni, ez azt jelenti, hogy a visszacsatolást is negálni kell hogy a kifejtett erő(gyorsulás) irányok ne forduljanak meg, vagyis ne álljon fel olyan eset amikor a leterhelődő rugó még jobban össze akarja húzni a felépítményt és a futóművet holott még nem érte el a teljes leterhelődés állapotát, vagyis nyomot rugóként működik. A gondolat menetét végigvéve a  $q_H$  és  $q_E$  elmozdulásokra látható, hogy azok a rugóblokkok amelyeknek a bemenő jele a  $q_E$  és  $q_H$  elmozdulás nem kell a negálás mert alapvetően a rendszer struktúrája miatt előjelhelyesen kapják ez erőket(gyorsulásokat), és megfelelően dolgoznak a ki- és berugózási tartományokban.

A fenti gondolatmenetet követve a csillapító esetén is látható hogy el kell térni a lineáris állapotterez felírás előjelezésétől, csak ebben az esetben a  $dq_H, dq_E$  (futómű) sebességek esetén kell alkalmazni a sebességek és a visszacsatolások negálását. Csillapító esetén a  $dq_1$  (felépítmény) előjelezése egyezik meg az elem berugózás, és kirugózás karakterisztikájával ezért itt nem kell a csillapítón keresztüli önmagába és a másik mozgásba csatoló erők(gyorsulások) előjelét módosítani. (A csillapító karakterisztikákat úgy adják meg hogy a húzáshoz tartozzanak a pozitív erő értékek, míg összenyomásnál a negatív erők, és ezen karakterisztika felek egymástól eltérő erőértékeket adnak meg a csillapító belső szerkezeti módosításával)



26.Ábra:Csillapító blokk

Összefoglalva a következőkben tér el program dinamikai modellje a kapott lineáris állapottér modelltől:

- Abban az esetben amikor a rugók a beállított munkapontjukhoz (az algoritmus számítja a tengelyre eső súlyerőből a megadott karakterisztikák alapján) képest a

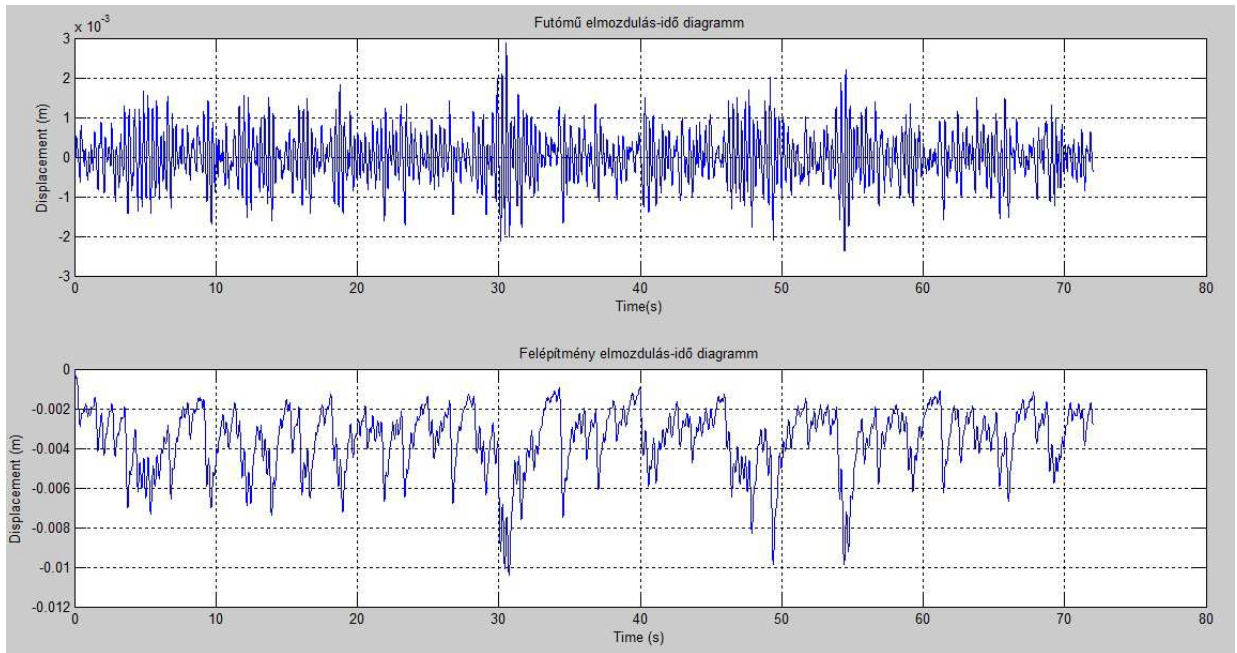
felvett pozitív irányú elmozdulás esetén nem a megfelelő irányú erőt fejtik ki, ekkor a lineáris alaktól eltérő előjelű visszacsatolást kell alkalmazni.

- Amikor a csillapító karakterisztikából számított húzó vagy nyomóerő nem összeegyeztethető a felvett elmozdulásokhoz tartozó erővel.
- A nyomatékoknál mivel az erők (csillapító és rugó) transzformálása az elsődleges, hogy helyesen jöjjenek ki az irányok ezért, a helyesen beállított előjelű erők esetén már könnyen kiadódik hogy a felvett elforduláshoz képest negatív vagy pozitív irányba döntenek-e meg a felépítményt.

### **Próba futások:**

A következőekben pár rossz működési esetet vizsgálok meg, ezzel próbálom meg verifikálni és validálni a modellem működését. Mivel határhelyzeteket vizsgálok ezért a tehetetlenségi nyomatékot nagyon nagyra választottam azért hogy csupán a futómű és a felépítmény rázását tudjam vizsgálni és futási időt takarítsak meg.

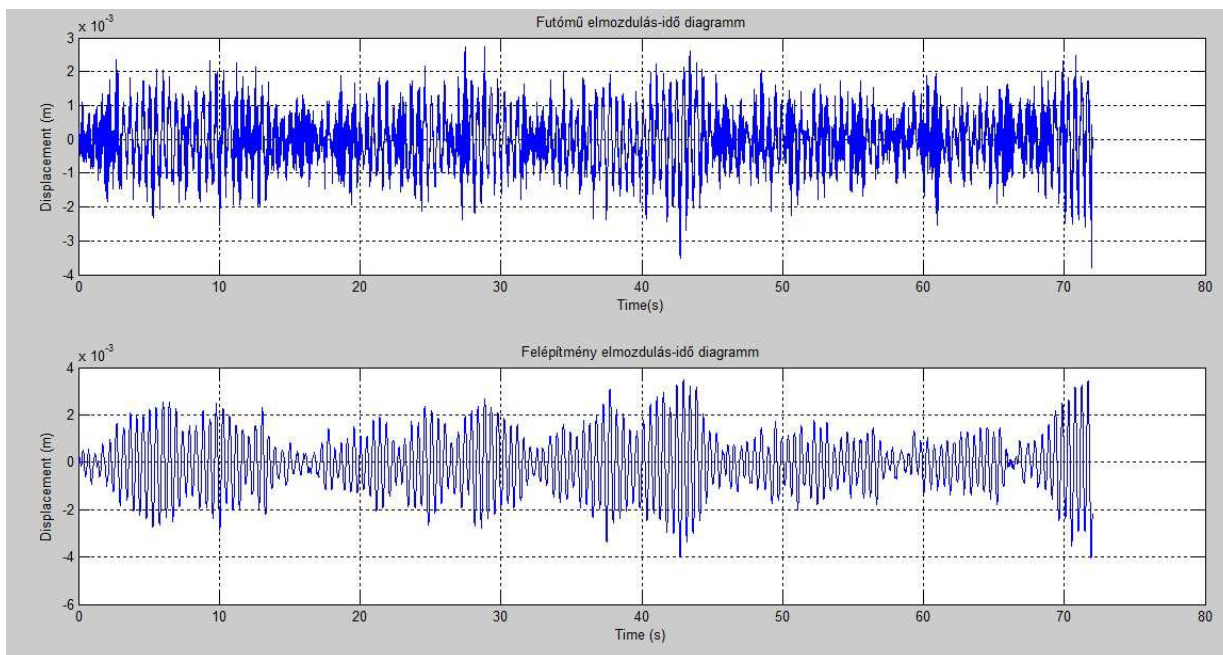
1.eset: Túl erősen csillapított eset, vagyis sokkal erősebb a lengéscsillapító mint a vele működő rugó. Előzetesen azt várom hogy a felépítmény vagy a futómű elmozdulás nem egy konstans érték körül fog végbemenni hanem a túl erős csillapítás miatt nem tud teljesen kirugózni a futómű, így a lengések nem a 0 érték körül fognak létrejönni, hanem egy annál kisebb érték körül, esetleg a látható lesz hogy ez az érték is csökken idővel ahogy a túl erős csillapító összehúzza a futóművet és ezáltal „leültetve” a kocsit.



27.Ábra:Túl erős csillapító miatti kocsiszekrény ereszkedés

A grafikonon jól látható, hogy a lengések középértéke az egyensúlyi helyzethez képest 5 mm-el lejjebb helyezkednek el, vagyis előzetes elvárásaink szerint ebben az esetben teljesül amit előzetesen vártunk , és amit a modell mutat.

2.eset: Túl erős rugók. Előzetesen azt várom ,hogy a lengéscsillapító nem tud majd a rugó ellenerejének ellen tartani, ezért a pattogni fog a kerék az útfelületen, vagyis nagy kerékerő szórás fog jelentkezni, illetve a felépítmény mozgása sokkal jobban fogja közelíteni a szinuszos csillapítatlan lengésképet, és az egyes tranziens átmenetek hatása fogja inkább alakítani az elmozdulás karakterisztikát.



28.Ábra: Alulcsillapított rendszer mozgása

Látható, hogy az elvárt csillapítatlan lengésképet megkaptam , és a gerjesztésben bekövetkező tranziens váltások is markánsabban kivehetőek.

### Összefoglalás

Sikerült egy megfelelő algoritmus létrehozni a numerikus szimulációs környezetben amely képes a fontosabb lengésminőségi mutatókat meghatározni. A modellben még számos lehetőség van továbbfejlesztésre például: felhasználó barát kezelés, nagyobb szabadságfokú dinamika beépítése, irányítás tervezési lehetőségek, hossz és keresztirányú dinamika egymásra hatása.