



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

A TÉRDSZALAGOK MODELLEZÉSI LEHETŐSÉGEI

TDK Dolgozat

Műszaki Mechanikai Tanszék

Szerző: Shestakova Yana

Konzulens: Dr. Hénap Gábor

2023. november 4.

Tartalom

Bevezetés.....	2
Probléma felvetése.....	2
Anatómiai áttekintés	2
Passzív mozgásrendszer.....	2
Csontszövet szerkezete (1).....	3
Csontok összeköttetése	4
Ízületek szerkezete (1)	4
Kötőszövet (2).....	5
Korábbi kutatás (3)	5
Geometria feldolgozása és anyagjellemzők.....	5
VEM	8
Adatok beolvasása.....	8
Rögzítés.....	8
Terhelés	9
Irodalom áttekintése (4).....	12
Bárányszívfall vizsgálata.....	12
Emberi térdszalag vizsgálat (5)	13
Hiperelasztikus anyagmodellek	16
Bevezetés.....	16
Elméleti alapok	16
Hiperelasztikus anyagmodellek csoportosítása (7)	20
Anyagegyenletek levezetése (5)	23
Mérés.....	25
Mérés előkészítése	25
Befogás	27
Terhelés	28
Mérési adatok.....	28
Kiértékelés	29
Szakítás előtti adatok.....	29
Szakítóvizsgálatból nyert adatok	29
Adatfeldolgozás	29
Görbeillesztés az Ansys környezetében	33
Források.....	36

Bevezetés

Probléma felvetése

Az előző kutatásomban egy szilárd csontokból álló, anyagjellemzőkkel ellátott modellt készítettem el CT felvételek alapján, melybe virtuálisan beszereltem a szánkó térdprotézist és egy egyszerű szimulációt is tudtam ezzel futtatni elmozdulási kényszer alkalmazásával. A munkám során a céloom egy páciensspecifikus modell alkotása volt a csontszerkezet inhomogenitásának figyelembevételével. Mivel térdízületnek fontos része a szalagok és az inak, ezért ezeknek a vizsgálatára térek ki most.

A komponensek, amik összekötik és stabilan tartják a csontokat az ízületen belül a szalagok és az inak. Ahhoz, hogy ezeket be tudjam implementálni a modellbe, ismét az anyagjellemzőkre összpontosítottam a figyelmet. Nyilván érdekesnek láttam a szövettani felépítést is megvizsgálni, hogy legyen elképzelésem az anyag szerkezetéről, ami elég bonyolult, hiszen az alapállományba beágyazott párhuzamos lefutású kollagén és elasztin rostok alkotják a kötőszövetet, amit vizsgáltam. Mivel egy ilyen bonyolult szövetek nagy elmozdulásra és alakváltozásra képesek, meg kellett néznom milyen anyagmodellekkel szoktak biológiai mintákat leírni.

Az emberi testszövetek viselkedésének leírására sok cikkben a hiperelasztikus anyagmodellekre hivatkoznak, viszont egy-egy modellnek a választása nem mindig indokolt. Sok mérés készült már érfalak, szalagok, egyéb szerveknek a szakítóvizsgálatából, de szerkezetüknél fogva ezeket az anyagokat nehéz szabványosítani és elemzésük szaktudást igényel mind orvosi, mind mérnöki oldalról.

Mivel az elülső keresztzalag szakadásnál a sebészetben már alkalmaznak állati eredetű graftot, pontosabban a marhából kieszedett szalagot (bear implant), ezért én is az állati eredetű mintákkal kísérleteztem. Az én esetemben disznó szalagokhoz tudtam hozzáférni, pontosabban a sertés lapocka ínjaihoz. Ezeket az inakat alapos előkészítés után egytengelyű húzókísérletnek tettem ki rostok orientációjából kiindulva.

Összesen kilenc mérési eredményt kaptam és első ránézésre nagyon különbözőnek tűnt mindegyik mérési eredmény. Viszont azzal a feltételezéssel éltem, hogy az inak ugyanolyan anyagból vannak és nagyjából hasonló keresztmetszetük van, csupán a hosszuk tér el, így ezeket az értékeket 0 és 1 közé eső skálába be lehet sorolni. Az 1-re normálás és feszültség-alakváltozás átlag görbe kirajzolása után olyan adatsort kaptam, ami implementálható volt az Ansys-ban.

Anatómiai áttekintés

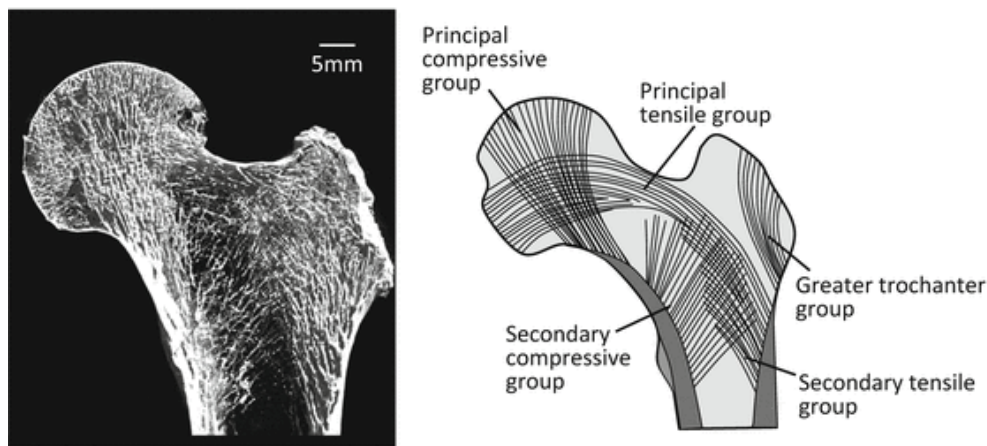
Passzív mozgásrendszer

A test térbeli helyzetváltoztatását a mozgásrendszer biztosítja, melynek kettő fő része van: a passzív rész, mely a test szilárd csontvázából és csontokat összekapcsoló ízületekből áll, ezek mellett a csontvázrendszernek fontos szerepe van a szervezet megtámasztásában, szervek védelmében, illetve vérképzésben. A másik az aktív rész, melynek cselekvő része az izomzat. Kutatásom keretein belül csak a passzív rendszerrel foglalkozom, azon belül a csontokat összekötő szalagokkal.

A csontokat alakjuk szerint négy csoportba lehet sorolni: szabálytalan csontok (pl. csigolyák), rövid (pl. kéztőcsontok), lapos (pl. lapocka) és hosszú csövescsontok (pl. combcsont). Fontos tulajdonságuk a rugalmasság, melyet a szerves anyagok biztosítanak, és a szilárdság, mely mészsók révén alakul ki.

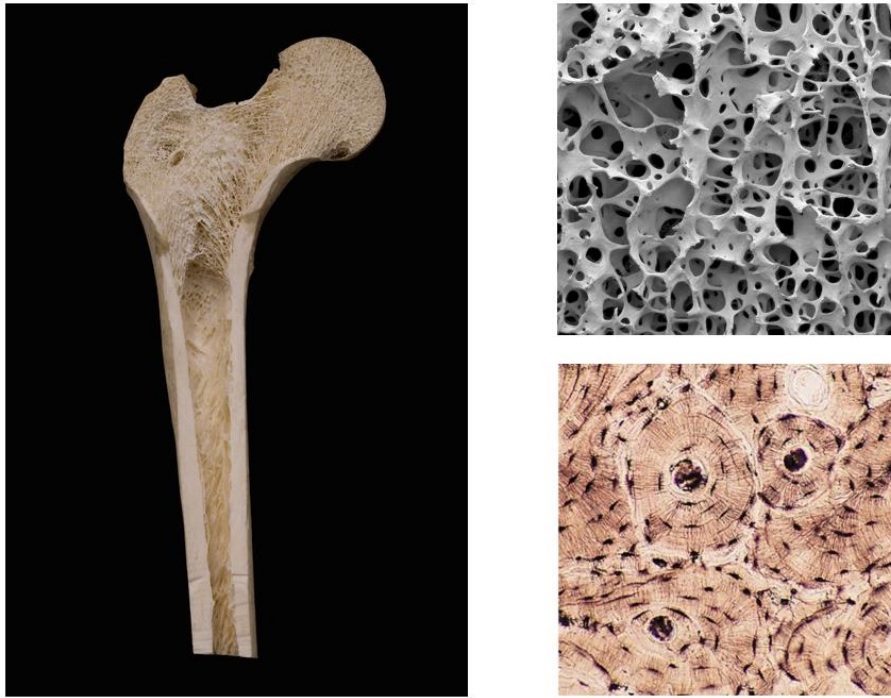
Csontszövet szerkezete (1)

Szerkezetüket tekintve a csontokat kívül tömör kompakt csontállomány képezi, belül pedig a szivacsos állomány van, melyet csontlemezkék és gerendácskák hálózata alkotja és ezeket egyben trajektoriális szerkezetnek (1. ábra) nevezzük. A csontlemezkék lefutási iránya a hatóerő irányába rendeződik, így a szivacsos állomány jobban ellenáll a húzó- és nyomó igénybevételnek.



1. Ábra

Ezen kívül fontos kiemelni, hogy a trajektoriális szerkezet az új erőhatásoknak megfelelően átalakul, csonttöréstől kezdve, új sporton át és egészen új cipőig. A csöves csontok üregében található a puha csontvelő, mely a vérképzésért felelős. A tömör csontállomány a vérerek és idegek köré koncentrikus körökbe rendeződő csontsejtekből áll (2. Ábra jobb felső kép), a szivacsos állomány pedig vöröscsontvelővel kitöltött hézagokat körbezáró csontlemezkékből épül fel (2. Ábra jobb alsó kép).

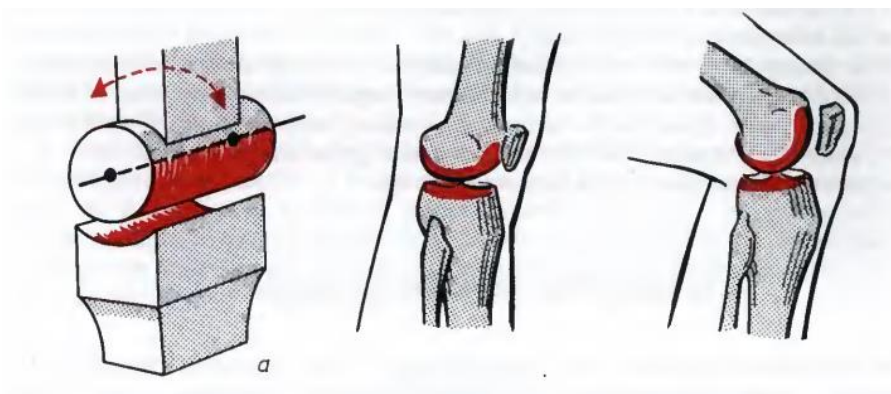


2. Ábra

A csontrendszer működését segítő elemek a porc, a csonthártya és a csontvelő. Az első csontnál puhább, de szívós és szilárd állomány, mely fontos kiegészítője a csontváznak (pl. ízületi porc). A csonthártya felelős a csontok táplálásáért, anyaghiány pótlásáért sérülés esetén, illetve a vastagságbeli növekedésért, hiszen a porccal bevont végeken kívül az egész csontot idegekkel és erekkel hálózza be. A vöröscsontvelő pedig vérképződésben vesz részt.

Csontok összeköttetése

Csontok összeköttetése kétféleképpen valósul meg: folytonos- vagy megszakított összeköttetés révén. Az előbbi lehet kötőszövetes (pl. varratok), porcós (pl. csigolyák között) vagy csontos (pl. keresztcsont). Utóbbihoz tartoznak a valódi ízületek (3. Ábra), melyek két csont között levő kötőszövet felszívódása révén alakulnak ki.



3. Ábra (1)

Ízületek szerkezete (1)

Az ízületek a porccal borított ízfelszínekből, az ízületi tokból, az ízületi üregből, a szinoviális folyadékából és a szalagokból tevődnek össze.

A két egymással kapcsolódó, üvegporccal borított csontvégeket nevezzük ízfelszíneknek, ezeknek az alakja (hengeres, ellipszoid, nyerges, gömb) megszabja az ízületben megvalósítható mozgások számát és irányát.

Az ízesülő felszínek felületei úgy alakulnak ki, hogy egymásba tökéletesen beleillenek: az egyik általában a domború ízületi fej, a másik pedig a homorú ízületi árok. Ezek könnyen elmozdulnak egymáson, hiszen mindkét vége porccal borított, így az érintkező felületek minimális súrlódással elcsúsznak egymáson. Bizonyos összeköttetéseknél (pl. térdízület, gerincoszlop csigolyái) az ízületi árkot rugalmas porckorong (menisci, discus) egészíti ki, melynek köszönhetően a csontok nem érintkeznek egymással.

Az ízületi tok körbeveszi a két csontvéget, ezáltal elhatárolja, de egyben össze is köti az ízületet a szervezettel. Két rétegre lehet bontani a tokot: a külső rostos rétegre, mely csonthártyába megy át, és a belső synovialis rétegre, mely a szinoviális (ízületi) folyadékot termel. A folyadék szerepe a két egymáson elcsúszó felület közötti súrlódás csökkentése, így a porcok nem kopnak el hamar. Ezen kívül az ízületi tok erekkel és idegekkel van ellátva, ezáltal történik az ízület táplálása és regenerálása.

Kötőszövet (2)

Kötőszöveti rostok

A kötőszövetekben háromfajta rostot találunk: enyvadó (kollagén), rugalmas (elasticus) és a rácsrostokat. A kutatásom szempontjából az első kettő, illetve a körülöttük levő alapállomány lesz fontos.

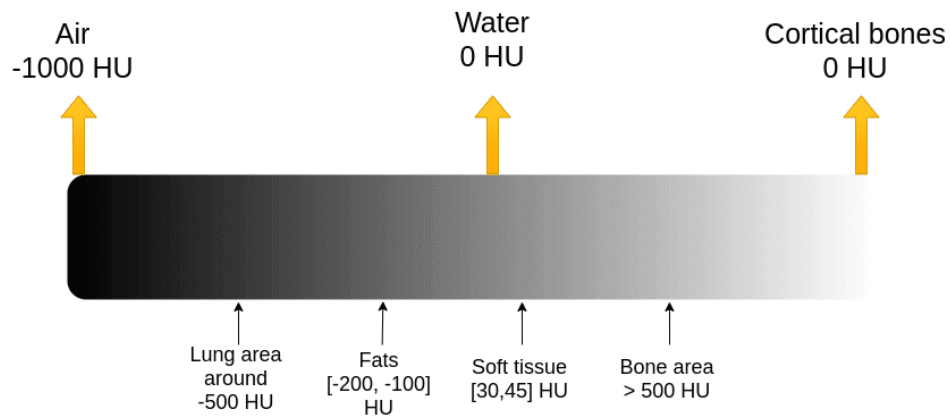
A kollagénrostok képezik a kötő- és támasztószövet rostos anyagának nagy részét. Ezek a rostok mikroszkóp alatt köteges felépítésűeknek látszanak, ezek mind finomabb kötegekre, majd rostokra, ezután kicsi rostocskára bonthatók tovább. A kollagénrostok nagy szakítószilárdsággal rendelkeznek, például a tömött kollagén rostköteg-rendszerből álló inaknak $100 \frac{kN}{mm^2}$ a szakítószilárdsága, nyúlásuk mindössze 2%-os maximális terhelés esetén. Ezek adják az inak és szalagok merevségét.

A másik típusba a rugalmas rostok sorolhatók, melyek a kollagén rostokkal ellentétben elágazó, hullámos, felcsavarodott fonalakba rendeződnek, így hálószerű struktúrát alkotnak. Maximális terhelés esetén 150%-os alakváltozásra is képesek, majd visszatérnek eredeti állapotukba. Ezek a kötő- és támasztószövet rugalmasságát teszik ki.

Korábbi kutatás (3)

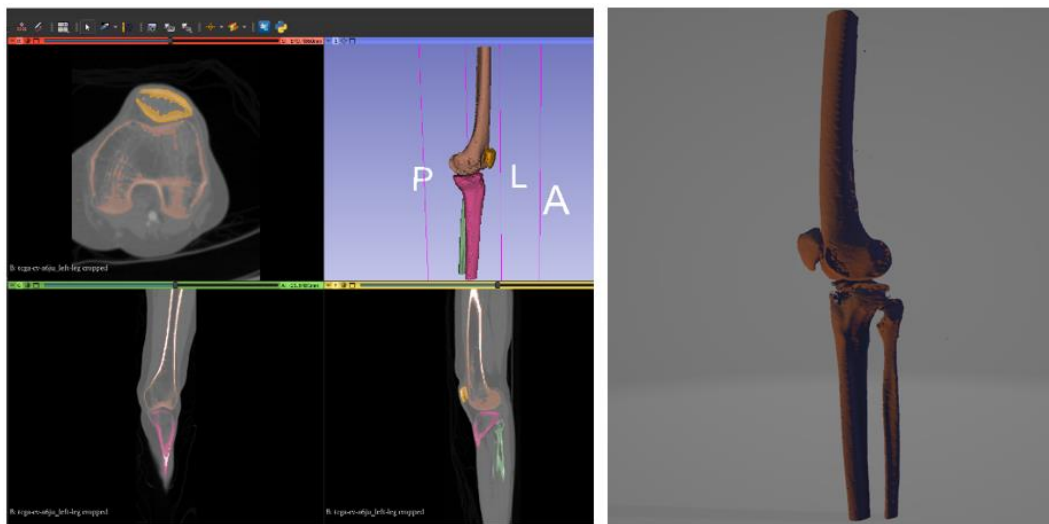
Geometria feldolgozása és anyagjellemzők

A korábbi dolgozatom a csontszövet geometriájának leszűrésére és anyagjellemzőinek beazonosítására tért ki. Mindkét jellemzőt a CT felvételek alapján tudtam kinyerni különböző szoftverek használatával. Computed Tomography képalkotó eljárás során a különböző szövetek denzitási értékeit méri a diagnosztikai berendezés. Ezek a denzitási értékek egy skálához (4. Ábra) lesznek lenormálva, ahol standardállapotban a desztillált víz a nulla, vagyis a referencia, a skála két határa pedig a levegő (-1000 HU), a legtömörebb állomány pedig (1000 HU). A kapott tartományt szürkeskálának, a rajta levő értékeket Houndsfield-egységeknek nevezzük.



4. Ábra

Az első fontos feladat a geometria leszűrése volt, ezt Slicer 3D nevű programmal (5. Ábra bal kép) oldottam meg több lépésben, hiszen a csontokról le kellett választani az izmokat, belülről eltávolítani a csontvelőt és leszűrni a „zajt”. Ezt egy sűrűségtartomány beállításával, szegmensekre bontással, majd a legnagyobb „szigetek” megtartásával tudtam megoldani, majd a kapott geometriát egy 3D nyomtatáshoz kompatibilis STL fájlként (5. Ábra jobb kép) mentettem ki.



5. Ábra

A kapott STL fájlt az Ansys programon belül a SpaceClaim környezetben alakítottam át szilárd, STP kiterjesztésű testté egy felületi háló felrakásával. A háló ugyan leegyszerűsítette a geometriát, de közben meg is tartotta a csontok egyedi vonásait. Ezt követően mind a CT felvételeket, mind a SpaceClaim-ből kinyert mash-t beolvastattam a Bonemat nevű szoftverrel, mely kifejezetten a csontok sűrűségére vonatkozó jellemzőket képes meghatározni az alábbi összefüggés szerint:

$$\rho_{QCT} = a_1 + b_1 \cdot HU \quad (2.1)$$

$$\rho_{Ash} = a_2 + b_2 \cdot \rho_{QCT} \quad (2.2)$$

$$E(\rho) = a_3 + b_3 \cdot \rho_{Ash}^c \quad (2.3)$$

ahol:

$\rho_{QCT} \frac{g}{mL}$: QCT eljárással mért szervesen alkotók sűrűsége, más néven BDM (bone mineral density).

$\rho_{Ash} \frac{g}{mL}$: csonthamu sűrűség, mely az elégetett csont hamujának és az eredeti csont térfogatának arányából adódik.

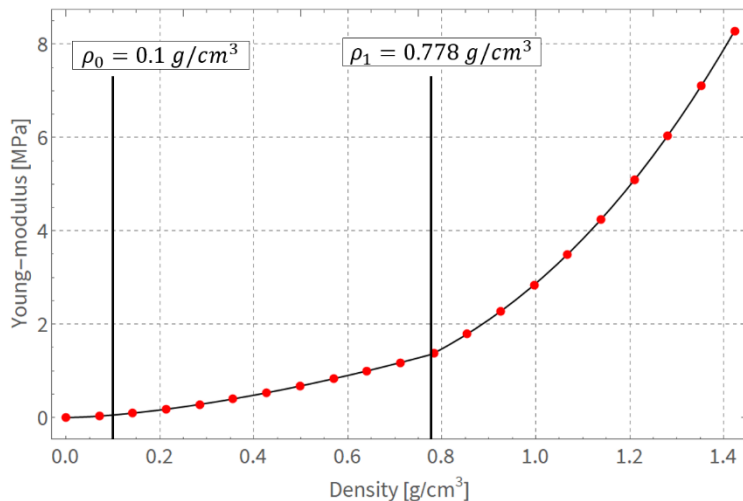
c: abszorpciós tényező, mely megmutatja egy anyagnak a rádiósugárzáselnyelő képességét.

a, b paraméterek: ezek irodalomból kikereshető, függvényillesztési együtthatók (1. Táblázat, 7. Ábra).

Bonemat mindegyik sűrűségértéket kiszámol a mesh-ben levő egy-egy lineáris tetraéderre, majd a Young-moduluszt a sűrűség függvényében fejezi ki három intervallumra bontva (6. Ábra):

1. szakasz: Szivacsos állomány	2. szakasz: Bizonytalansági szakasz	3. szakasz: Tömör csontállomány
$\rho_{Ash} < \rho_1$	$\rho_1 \leq \rho_{Ash} \leq \rho_1$	$\rho_2 < \rho_{Ash}$
$E[MPa] = 2,003 \cdot \rho^{1,56}$	$E[MPa] = 2,003 \cdot \rho^{1,56}$	$E[MPa] = 2,875 \cdot \rho^{3,0}$

1. Táblázat



6. Ábra

CT densitometric calibration
 $\text{RhoQCT} = a + b * \text{HU}$
 a: 0
 b: 1

Correction of the calibration
 $\text{RhoAsh} = a + b * \text{RhoQCT}$
 Apply calibration correction
 Single interval
 Single interval
 Three intervals

Density-elasticity relationship
 $E = a + b * \text{RhoAsh}^c$
 Minimum Elasticity Modulus: 1e-06
 Single interval
 Single interval
 a: 0
 b: 1
 c: 1
 Three intervals

Young's modulus (E)
 HU integration
 Integration steps: 4
 Gap value: 50

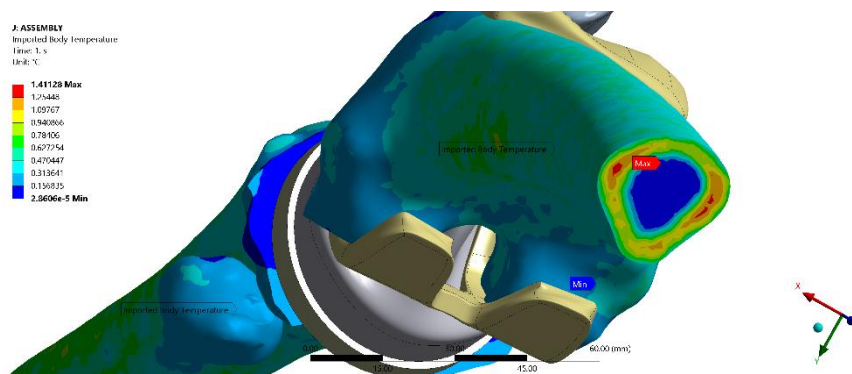
7. Ábra

A kapott eredményeket a Bonemat kettő LIS kiterjesztésű fájlba foglalja, ezek közül az egyik a csomópontok koordinátáit tartalmazza, másik pedig a csomópontok által alkotott elemeket egy-egy sűrűségkategóriába sorolja. Mindegyik csomóponthoz más és más sűrűségérték rendelhető hozzá inhomogenitás révén és egy csomópontban több lineáris tetraéder található, ezért a szoftver kiintegrálja az átlagos sűrűségértéket egy-egy elemre, ami egy sűrűségterképet hoz létre. Ezt a sűrűségterképet csak egy konkrét végeselemhálóra lehet használni, geometriamódosítás ebben az esetben nem lehetséges. Amennyiben elforgatott és eltolt koordináta-rendszerben akarom használni a sűrűségterképet, vissza kell keresnem minden egyes csomópont-hoz tartozó értéket, amit egy script-tel meg tudtam oldani Wolfram Mathematica segítségével.

VEM

Adatok beolvasása

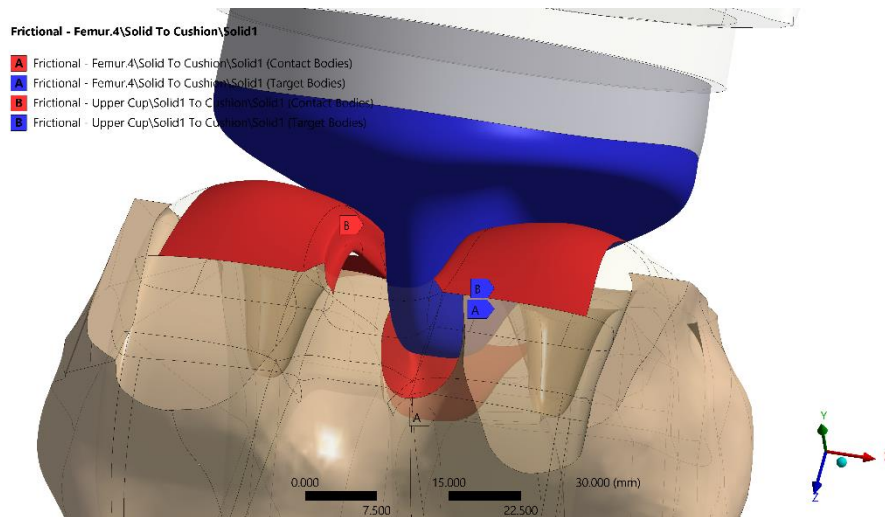
Az Ansys-ban újabb újabb akadályba ütköztem, ugyanis a rugalmassági moduluszt nem lehet megadni a sűrűség függvényében, viszont a Young-modulusz a hőmérséklet függvényében definiálható. Így megadtam 20 db sűrűségértéket hőmérsékletként, illetve a hőtágulási tényezőt nullára vettem, hogy elkerüljem a termikus hatások megjelenését a modellben (8. Ábra).



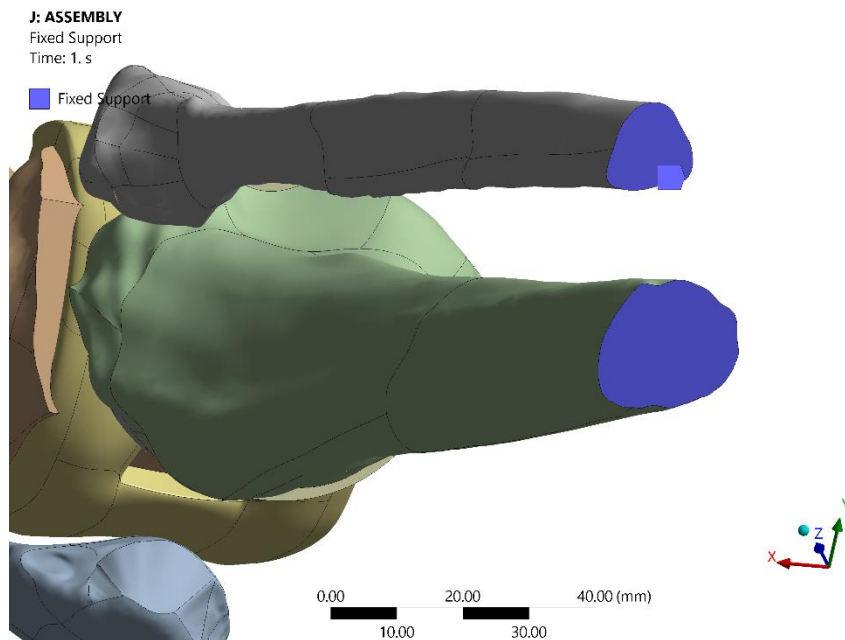
8. Ábra

Rögzítés

Az implantátumvirtuális beszerelését követően ráraktam rá a sűrűségmezőt az összeszerelt szerkezetre, majd az implantátum felületét „Bonded” típusú kontakttal rögzítettem a csontok felszínéhez. A tibia és a fibula „Fixed Support”-tal (10. Ábra) vannak rögzítve egymáshoz. A protézis érintkezési felületein súrlódásos (9. Ábra) kontakt (frictional contact) beállítása szükséges, melynek súrlódási együttható értéke $\mu = 0,1[1]$.



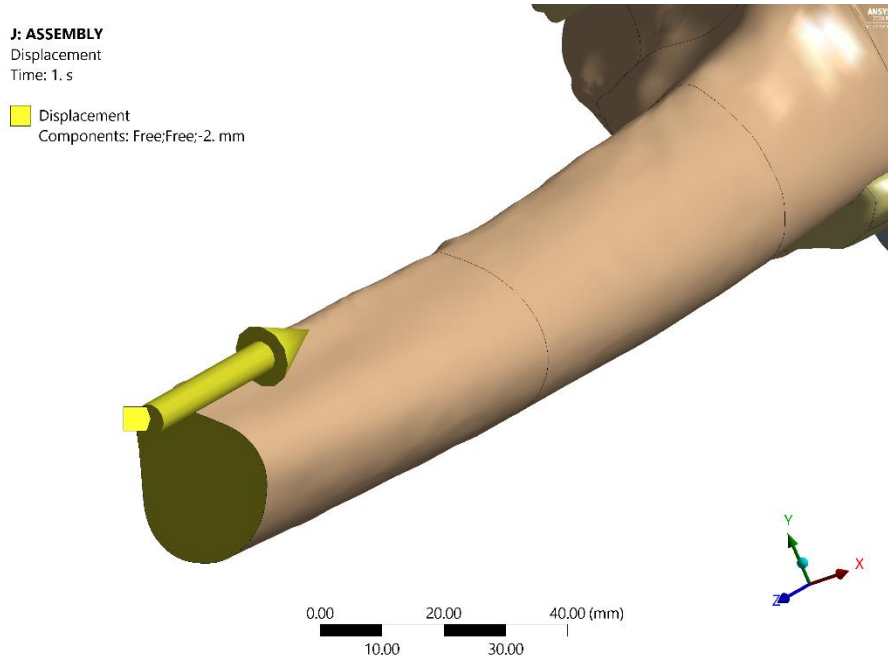
9. Ábra



10. Ábra

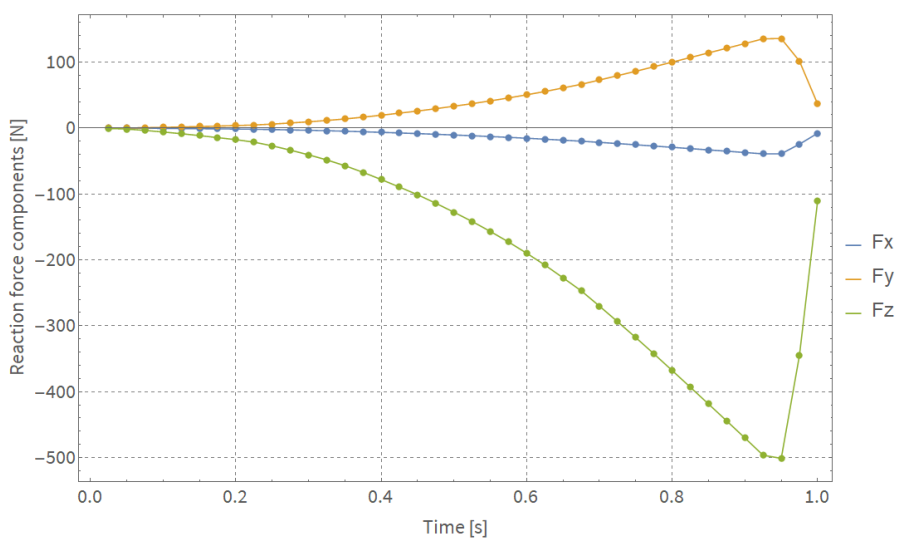
Terhelés

A terhelés egy z-tengely menti előírt elmozdulási kényszer (11. Ábra), amit a femur megfogott végére tettem. A kontaktfeladat során a femur megfogott vége 2 mm-t tesz meg 40 lépésben, a kontaktfelületek megtalálják egymást.

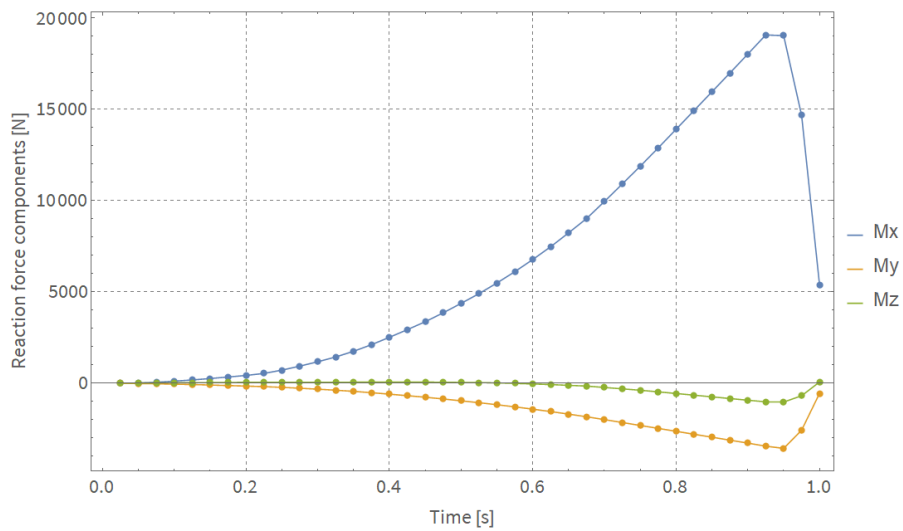


11. Ábra

A femur végén alkalmazott elmozduláshoz tartozó terhelés reakcióerőként adódik, így elkerülhető az erővezérelt terhelés alkalmazása, amelynél a kontaktfelületek elcsúszhatnak egymás mellett. A feladatot az is nehezíti, hogy a csontvégek között nincs stabil kapcsolat, emiatt a két csontvéget meg kell fogni. Elmozdulásvezérelt terhelés során a kontakt felületek biztosan megtalálják egymást és a maximális reakcióerő és -nyomatékkomponensek az alábbi ábrákon láthatók:

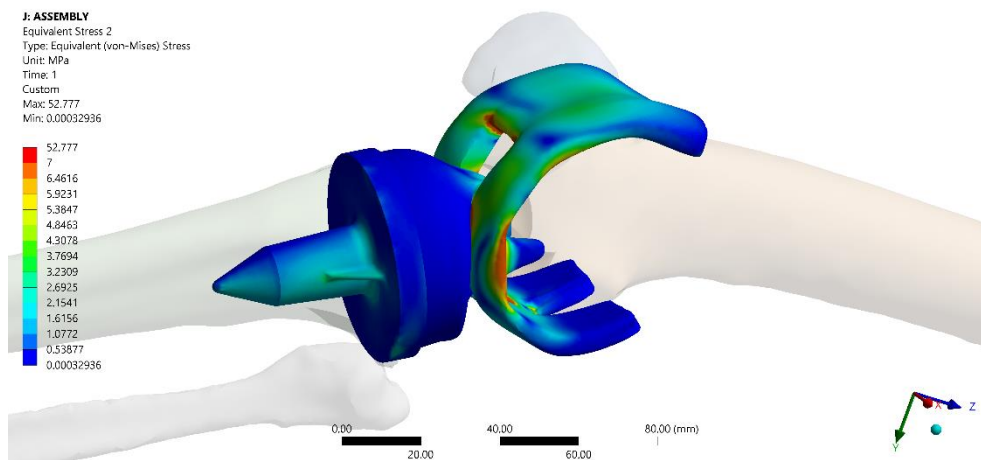


12. Ábra

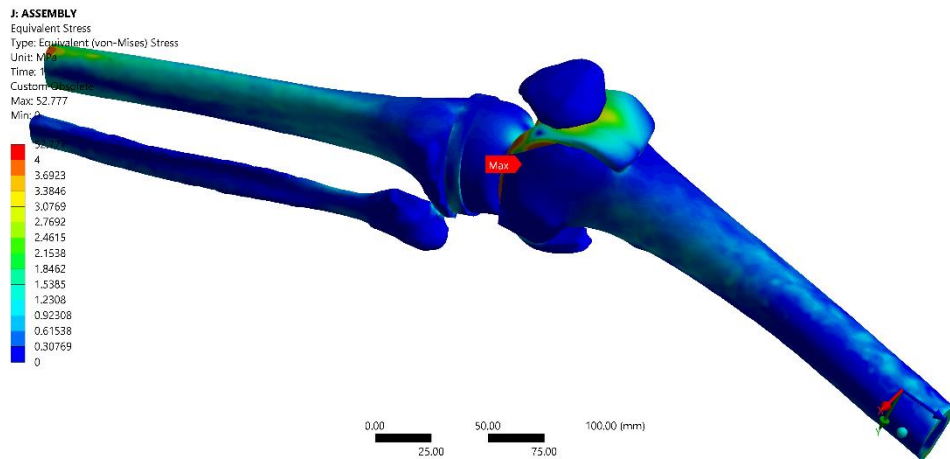


13. Ábra

Megjelenítettem a Mises-féle egyenértékű feszültségeloszlást mind implantátumban (14. Ábra), mint a teljes modellben (15. Ábra), majd az alakváltozási energiasűrűséget magukban a csontokban. Annak ellenére, hogy sok egyszerűsítéssel éltem a modellalkotás során, mégis elég jól látszik, hogy a protézis átveszi a terhelés jelentős részét, ami miatt „stress shielding” veszélye áll fenn.



14. Ábra



15. Ábra

Irodalom áttekintése (4)

Bárányszívfal vizsgálata

A mérési eljáráshoz az inspirációt a honfitársaimtól vettem, azonban ők a szívizomzatot vizsgálták meg alaposan: 10 darab bárány szívét szereztek be a vágóhídról, hűtőben kiszállították a laboratóriumba és fiziológiás oldatban tárolták 30 perccel a szakító kísérlet előtt, hogy a szövetek ne veszítsék el a nedvességtartalmukat. A beáztatott mintából

18 × 18 mm² nagyságú, négyzet alapú hasábokat vágtak ki, méghozzá a jobb és a bal kamrák falaiból, illetve a két kamrát elválasztó falból is. A szemölcsizmok mentén vették fel az axiális-, arra merőlegesen pedig a radiális irányt, vagyis egy henger koordináta-rendszerben dolgoztak. Ennek az volt a magyarázata, hogy az izomrostok orientációjától eltekintettek, mivel a minták nem voltak vizualizálva.



16. Ábra

A kísérlet egy kéttengelyű szakítópróba volt (16. Ábra), melynél elsőként egy 0,5 mN-nyi előterhelést alkalmaztak minden mintára, majd mind axiális, mind radiális irányban terhelődött tovább egyenletesen, míg nem érte el a 0,4%-os alakváltozást. A kapott eredmények pontjaira hat fajta hiperelasztikus anyagmodellt illesztettek és megállapították, hogy 10 darab mintára elég nagy a szórás, így, ha az egyik mintához (jobbkamra fala) egy konkrét anyagmodell illesztésével kapunk paramétereket, akkor azok nagy eltérést mutatnak ugyanazzal az anyagmodellel, de egy másik mintából (elválasztó fal) kapott paraméterekhez képest. Itt fontos volt összehasonlítani a determinisztikus együtthatót egy-egy szövettípusra

alkalmazott anyagmodellek paramétereire. A statisztikai analízis (2. Táblázat) kimutatta, hogy a bal kamra izomzatának viselkedését a Chio-Vito és a Fung modellek követik le a legjobban, jobb kamrának viselkedését pedig a Holzapfel (2000), Holzapfel (2005), polinomiális anizotróp és a four-fiber-family írják le a legjobban:

R^2 значения для всех стенок сердца (левый, правый желудочки и межжелудочковая перегородка)

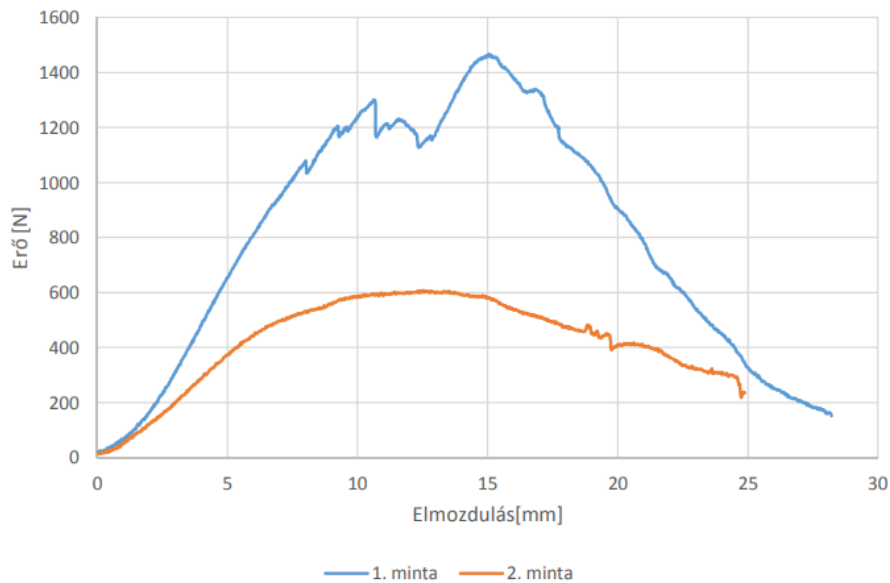
Параметры	Левый желудочек	Межжелудочковая перегородка	Правый желудочек
Модель Фанга	0,98	0,92	0,95
Полиномиальная модель	0,97	0,95	0,99
Модель Хольцапфеля (2000)	0,96	0,94	0,98
Модель Хольцапфеля (2005)	0,97	0,95	0,99
Модель four-fiber family	0,98	0,94	0,99
Модель Чои-Вито	0,94	0,77	0,85

2. Táblázat

Emberi térdszalag vizsgálat (5)

Másik érdekes és tanúságos kísérletben már emberi ínakkól nyert adatok kerültek feldolgozásra. A tesztben olyan emberi inakat szakítottak el, melyek alkalmasak lehetnek a keresztszalagok pótlására szakadás/ sérülés esetén. A mintákat merev pofák közé szorították be ezzel biztosítva a súrlódásmentes kapcsolatot, majd kétféle terhelésnek tették ki az inakat: az egyik egy kvázi-statikusan terhelés, amely a minta teljes, vagy részleges szakadásáig folytatódik. A második esetben a kvázi-statikusan terhelést megelőzte egy prekondicionálás, mely dinamikus terhelésnek felel meg, 1000-es ismétlési számmal. A ciklusszám nem általános és a kísérlet vezetője határozta meg azt.

Az egydimenziós húzókísérlet során öt különböző inat szakítottak el, de csak a quadriceps ín eredményei lettek kiértékelve. Kettő teszteredmény (18. Ábra) erő-elmozdulás diagramjai között elég nagy az eltérés a szövettani és geometriai paraméterek révén:



17. Ábra

A laboratóriumi eredmények kiértékelése során fontos volt az anyagegyenletek paramétereinek meghatározására. Első lépésként a geometriai adatok kerültek feljegyzésre, de sajnos nem derül ki, hogy ezek átlagolt értékek, vagy csak egy helyen lettek lemérve. Minták vastagságát pedig durván 2 mm-re becsülték meg. Fontos, hogy a geometriai adatokat valóban nagyon nehéz kinyerni, hiszen tolómérővel túlságosan rászorítva, vagy ellenkezőleg, ha éppen hozzáérünk vele az ín felületéhez, akkor viszonylag nagy eltérést kapunk ugyanazon a mérési ponton. A minták geometriai adataiból meg lett állapítva az inak térfogata, majd abból egy keresztmetszet az alábbi képlettel:

$$A = \frac{V}{l_0 + \Delta l} \quad (3.1)$$

ahol:

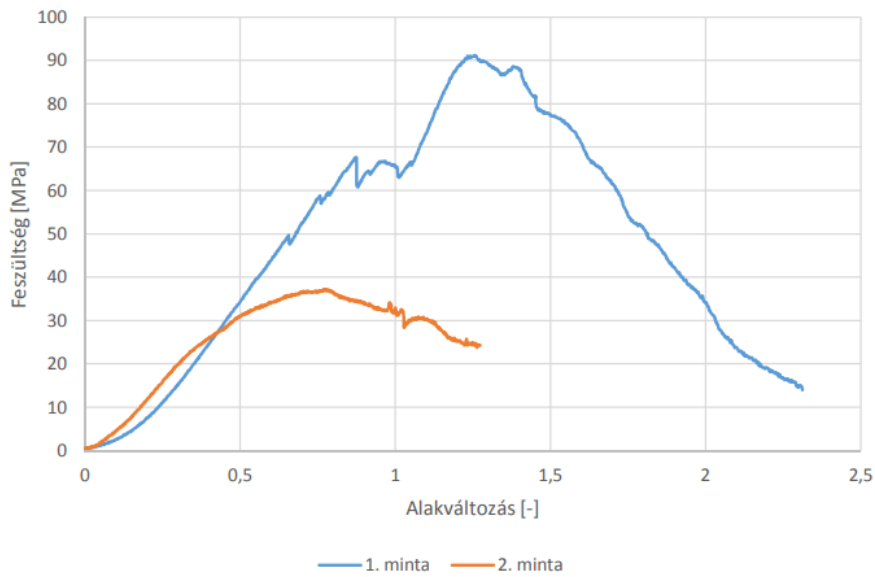
V – a minta számított térfogata,

$(l_0 + \Delta l)$ – a minta pillanatnyi hossza.

Ebből egy Cauchy-féle feszültség lett meghatározva, amely a terhelő erő és az aktuális keresztmetszet hányadosaként adódik:

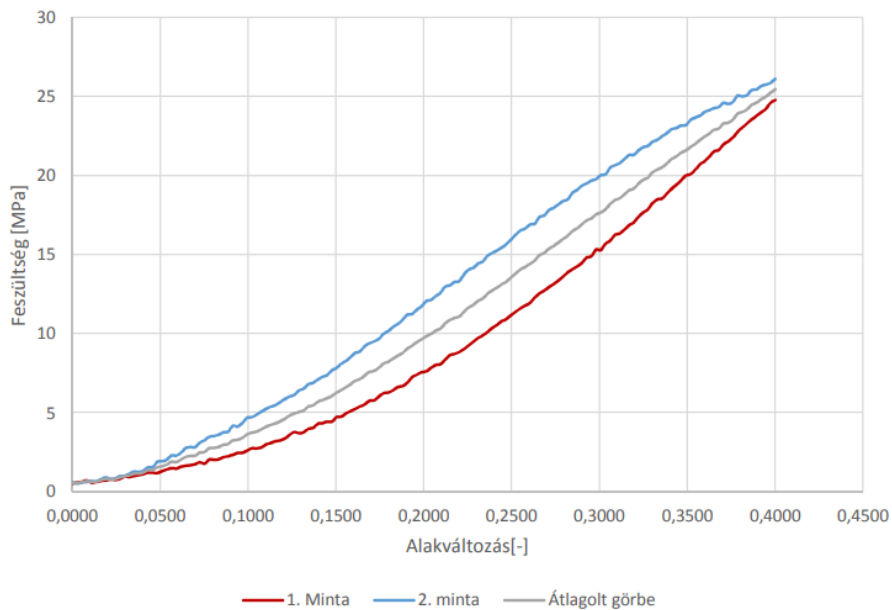
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.2)$$

Fontos megjegyezni, hogy az inak térfogatát állandónak tekintették a kísérlet során, ami lényeges egyszerűsítés ugyan, de ezzel együtt közel áll a valósághoz is. Ezekből az eredményekből a feszültség-alakváltozat görbéket (18. Ábra) sikerült kinyerni:



18. Ábra

A kapott diagramból egy átlagolt mérési sorozat készült el, melynél fontos volt a függvény értelmezési tartományát is megadni, ami 0,4-re lett állítva (19. Ábra):



19. Ábra

A paraméterek meghatározását követően minden egyes modellhez ki lett számolva a determinációs együttható, mely alapján látszik, hogy csak a Neo-Hooke anyagmodell nem felel meg az inak mechanikai terhelésre adott válaszáinak leírására (3. Táblázat):

	Neo-Hooke	2 PM Mooney-Rivlin	3 PM Mooney-Rivlin	5 PM Mooney-Rivlin	9 PM Mooney-Rivlin
c_1	4,1021	25,7161	41,8743	-31,3324	6,8652
c_2		-21,2282	-39,1724	37,7370	-1,9804
c_3				172,3839	-12,2147
c_4			-6,0628	-531,1455	14,0438
c_5				435,0568	19,5510
c_6					-6,0385
c_7					7,3951
c_8					3,9167
c_9					-17,5500
Cod	0,479862	0,998513	0,999361	0,999858	0,999813

3.2. Táblázat Az egyes modellekhez meghatározott anyagi paraméterek és determinációs együtthatók (saját forrás)

3. Táblázat

Hiperelasztikus anyagmodellek

Bevezetés

Ha deformálható test szempontjából nézzük a hiperelasztikus anyagok viselkedését, akkor ezekre nem érvényesül a Hooke-törvény, hiszen ezek inhomogén, nemlineáris és legtöbb esetben anizotróp anyagok. Egy ilyen helyzetben a feszültség és az alakváltozás nemlineáris kapcsolatát a potenciális energiasűrűségfüggvénnyel fejezhető ki. Ezek az elasztomer anyagok képesek 200-300%-os alakváltozást szenvedni, majd visszatérnek eredeti állapotukba. Ilyen anyagi viselkedés nem csak az iparban használt polimerek, fémhabok, gumik mutatnak, de testünk szövetei is, például vérerek, húgyvezeték, gyomor fala, inak. Az emberi test szöveteinek mechanikai viselkedését leíró anyagmodell választása legtöbb esetben arra alapozott, hogy az adott hiperelasztikus függvény be van-e építve a végeselem szoftverbe, vagy sem. Emiatt népszerű a Mooney-Rivlin többparaméterű anyagmodell, mivel ez a legtöbb szövetre alkalmazható, illetve nem kell egy újabb modellre programozni a végeselem szoftvert.

Elméleti alapok

A vizsgált kontinuum pontjait Lagrange-féle (azonosító/ kezdeti) rendszerben tudjuk leírni a kezdeti $t_0 = 0$ időpillanatban, amelynél a tenzormezőket a kezdeti konfiguráció által elfoglalt tartomány pontjaihoz rögzített koordinátarendszerben használjuk. A Lagrange-féle (kezdeti konfigurációban értelmezett) koordinátafüggvényeket nagybetűvel és nagybetűs indexekkel jelöljük. (6)

Az Euler-féle (vonatkoztatási/ pillanatnyi) rendszerben egy adott tartomány mozgó pontjait tudjuk megvizsgálni egy adott időpillanatra. Az Euler-féle (pillanatnyi konfiguráción értelmezett) koordinátafüggvényeket kisbetűvel, illetve kisbetűs indexekkel jelöljük. (6)

Mindkét rendszernél Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert feltételezem kényelem kedvéért, egyébként a kettő koordinátarendszer egymásba toltató, vagyis egy tenzor megvalósítja a leképezést egyik vektortérből a másikba. Ilyen lineáris leképezésre képes a deformációs gradiens tenzor, mely homogén skalárszorzásra nézve és additív.

Az \mathbf{F} deformációs gradiens tenzor kétponttenzor, tehát egyik bázisvektora pillanatnyi, másik viszont kezdeti konfiguráción értelmezett, így egy adott ponthoz tartozó vonalelem vektort egyik rendszerből a másikba tudja áttranszformálni. A $d\mathbf{x}$ vonalelem vektort egy tetszőleges P anyagi pont által befutott út meredekségével állítható elő, tehát ez egy érintő irányú vektor. A vonalelem vektort az anyagi pont pozícióját az Euler-féle rendszerben megadó mozgásfüggvény (3.1) parciális deriváltjaként lehet előállítani. A Lagrange-rendszer pontjait a mozgásfüggvény inverzével állítjuk elő (3.2) (6).

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ és } \exists \mathbf{F}^{-1}$$

A hiperelasztikus anyagmodelleknél elengedhetetlenek a deformációs- és alakváltozási tenzorok, ezeknek a definiálásához pedig a dimenziótlan fajlagos ívhossz és fajlagos nyúlást szükséges bevezetni.

A fajlagos ívhossz egytengelyű húzás esetén (7):

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \frac{ds}{dS_0} = 1 + \varepsilon \quad (4.4)$$

ahol:

l – deformáció utáni hossz,

l_0 – az eredeti minta hossza,

ε – fajlagos alakváltozás,

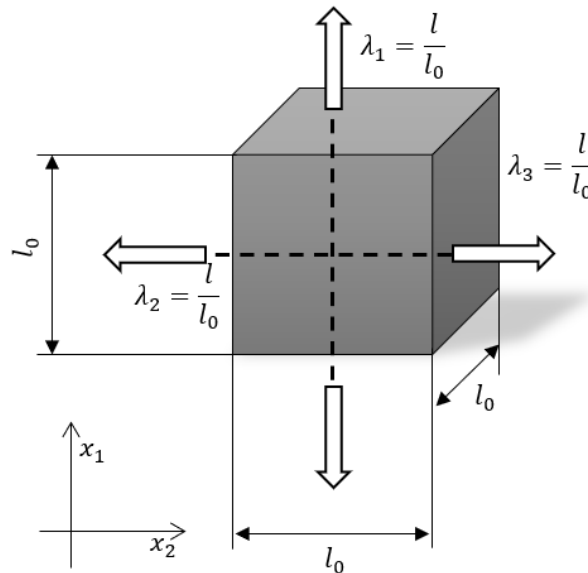
ds – pillanatnyi konfiguráción értelmezett vonalelem vektor megváltozásának abszolútértéke,

dS_0 – kezdeti konfiguráción értelmezett vonalelem vektor kezdeti állapotának abszolútértéke.

A fajlagos alakváltozás és a fajlagos ívhossz kapcsolata abból ered, hogy a test kezdeti állapotát a pillanatnyi állapotához képest vizsgáljuk, ezt vonalelemek hosszával is ki lehet fejezni:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{ds}{dS_0} - 1 = \lambda - 1 \quad (4.5)$$

Alapvetően \mathbb{R}^3 dimenziós térben három fő nyúlást definiálunk: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ezek az alakváltozást jellemzik. Ennek a gyakorlati alkalmazását egy kéttengelyű húzó kísérleten lehet megnézni: tegyük fel, hogy egy infinitezimális kiskockát terhelünk (20. Ábra). Ekkor λ_1 és λ_2 a síkban (x_1, x_2) történő deformációra, λ_3 pedig a vastagság megváltozására vonatkozik. Amennyiben az anyag az adott tartományban összenyomhatatlannak tekinthető, a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$ összefüggés érvényesül.



20. Ábra

A deformációs gradiens tenzor determinánása (J):

$$\det(\mathbf{F}) = J = \frac{V}{V_0} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \quad (4.6)$$

ahol V a megváltozott térfogat viszonyítva a V_0 eredeti térfogathoz.

A fő nyúlások segítségével fejezhetők ki a deformációs tenzor skalárinvariánsai (7):

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (4.7)$$

$$I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 \quad (4.8)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \quad (4.9)$$

Ha a (3.6) egyenletet négyzetre emeljük, akkor pont a harmadik skalárinvariánst kapjuk meg, melynek értéke szintén 1.

A deformációs gradiens tenzor determinánása alakváltozással is kifejezhető:

$$\det(\mathbf{F}) = \varepsilon_v + 1 = \frac{dv - dV_0}{dV_0} + 1 = \frac{dv}{dV_0} \quad (4.10)$$

ahol:

dv – a pillanatnyi konfiguráció infinitezimális térfogatelem változása,

dV_0 – az azonosító konfiguráció infinitezimális térfogateleme.

Deformációs tenzorokat mind kezdeti, mind pillanatnyi rendszerben is meg lehet adni, például a Green-féle deformációs tenzor a kezdeti konfiguráción az alábbi módon adható meg:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (4.11)$$

Pillanatnyi rendszerben pedig a Cauchy-féle deformációs tenzorra következő a formula:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \quad (4.12)$$

Ezeknek a deformációs tenzoroknak a sajátértékeinek a gyökeiből kaphatók meg a főnyúlások.

Az alakváltozási tenzorokat szintén mindkét féle rendszerben meg tudjuk adni, viszont itt fontos az ívhossz és az alakváltozás kapcsolatára kitérni, mivel ez tenzorról tenzorra kicsit eltér. Egy dimenziós esetben, vonalelemek abszolútértékével kifejezve néhány definíció (6):

1. Cauchy-féle: $\varepsilon^C = \frac{ds}{ds_0} - 1 = \lambda - 1$
2. Green-Lagrange-féle: $\varepsilon^{G-L} = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$
3. Euler-féle: $\varepsilon^E = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$

Mivel ezeket az alakváltozásokat bármely koordinátarendszerben tudjuk leírni, ezért ezekhez egy-egy lineáris leképezés tartozik, ezek közül az utolsó kettőt szeretném kiemelni:

Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzor (6):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (4.13)$$

ahol:

\mathbf{I} – egységtenzor.

Euler-féle alakváltozási tenzor (6):

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{c}) \quad (4.14)$$

ahol:

\mathbf{i} – egységtenzor.

Jól látható az alakváltozási- és deformációs tenzorok közötti összefüggés, viszont az \mathbf{E} és \mathbf{e} között szintén teremthető kapcsolat a deformációs gradiens tenzor segítségével, mely a kezdeti vektortérbe a pillanatnyiba és vice versa transzformációt képes elvégezni (6):

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (4.16)$$

Jól látszik, hogy a feszültségi- és alakváltozási tenzorok között, illetve a kétféle koordináta-rendszer között a deformációs gradiens teremt kapcsolatot.

A hiperelasztikus potenciál az energiasűrűséget adja meg a deformáció függvényében, tehát valamilyen alakváltozási- vagy deformációs tenzor függvénye. Ezt a potenciált egyszerűbb a főnyúlásokkal, vagy deformációs tenzorok skalárinvariánsaival kifejezni. Biológiai szövetekre (8):

$$W = F_1(I_1, I_2) + F_2(\lambda) + F_3(I_1, I_2, \lambda) \quad (4.17)$$

ahol:

F_1 – az izotrop alapállomány hatása,

F_2 – a kollagénrostok válasza,

F_3 – a rostok és az alapállomány kölcsönhatása,

λ – a rostok hosszváltozása.

Hiperelasztikus anyagmodellek csoportosítása (7)

Az alakváltozási energiasűrűség függvényből a feszültségi állapotot nagy alakváltozások esetén a kezdeti konfiguráción értelmezett Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzonnal lehet előállítani a következő módon: II. Piola-Kirchhoff-féle feszültségi tenzor előáll az alakváltozási energiasűrűség függvény Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzor szerinti parciális deriváltjaként:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$$

Az alakváltozási energia függvény előállításához paraméterekre van szükség, amelyek a vizsgált anyagtól függő konstansok. Ezeknek a paramétereknek a mennyisége nem csak anyagtól, de a választott anyagmodelltől is függ.

Alapvetően az anyagmodelleket két csoportra lehet bontani: az első csoport a fenomenológiai, melynél az anyag mikroszerkezetétől eltekintünk és csupán egy matematikai összefüggést állapítunk meg a kísérletek eredményei alapján. A másik csoport a mikromechanikai modell, mely kifejezetten az anyag szerkezetére összpontosul.

További csoportosítás az alapján történik, hogy a deformációs gradiens invariánsaitól, vagy a fő ívhosszaktól függ-e az adott anyagmodell. Ezután be lehet sorolni az anyagmodelleket összenyomható és összenyomhatatlanok közé, de ez már részlet kérdése (4. Táblázat).

Deformációs gradiens tenzor invariánsaitól függő, fenomenológiai hiperelasztikus anyagmodellek közel, vagy teljesen összenyomhatatlan anyagok esetére:	Fő fajlagos ívhosszaktól függő, fenomenológiai hiperelasztikus anyagmodellek összenyomhatatlan anyagok esetére:
<p><i>Polinomiális anyagmodell</i> (I_1, I_2 skalárinvariánsak):</p> $W = \sum_{i+j} c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k}$ <p><i>Kétparaméteres Mooney-Rivlin modell</i> (I_1, I_2 skalárinvariánsak):</p> $W = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)$ <p><i>Yeoh modell</i> (I_1 skalárinvariáns)</p> $\sum_{i=1}^n c_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}$ <p>Ezekből származtatható a <i>Neo-Hooke modell</i> (I_1 skalárinvariáns):</p> $W = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2$	<p><i>Ogden-modell</i> (fő fajlagos ívhosszak):</p> $W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} (J - 1)^2$ <p>Ebből származtatható a <i>Neo-Hooke modell</i> (I_1 skalárinvariáns):</p> $W = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J - 1)^2$
Deformációs gradiens tenzor első invariánsától függő, mikromechanikai hiperelasztikus anyagmodell közel, vagy teljesen összenyomhatatlan anyagok esetére:	Fő fajlagos ívhosszaktól függő, fenomenológiai hiperelasztikus anyagmodell összenyomható anyagok esetére:
<p><i>Gent-modell</i> (I_1 skalárinvariáns):</p> $W = -\frac{EI_m}{6} \ln \left(1 - \frac{\bar{I}_1 - 3}{I_m} \right) + \frac{1}{d} \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln(J) \right)$	<p><i>Hiperhab-modell</i> (fő fajlagos ívhosszak):</p> $\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (J^{\alpha_{03}} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i}) - 3) + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\beta_i \alpha_i} (J^{-\beta_i \alpha_i} - 1)^2$

4. Táblázat

Elsőként tekintsük át a polinomiális anyagmodell:

$$W = \sum_{i+j} c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k}$$

ahol:

c_{ij}, d_k, n – az anyagtól függő konstansok,

\bar{I}_1, \bar{I}_2 – a deformációs gradiens tenzor deviátoros részére vonatkozó invariánsak.

A deformációs gradiens tenzor deviátoros részére vonatkozó invariánsak előállítására a következő képlettel lehetséges, azonban fontos megjegyezni, hogy összenyomhatatlannak tekintem az anyagot, így (4.6) egyenletet felhasználva a térfogatváltozásra vonatkozó tag nullára adódik, illetve a skalárinvariánsok (4.7) és (4.8) egyenletek alapján:

$$\bar{I}_p = J^{-\frac{2}{3}} \cdot I_p, \text{ ahol } p = 1, 2, 3 \quad (4.18)$$

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{I^2}} \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = I_1 \quad (4.19)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{I^2}} \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_3) = I_2 \quad (4.20)$$

A polinomiális modell a potenciális energiasűrűség függvénynek egy általános felírása, így ebből származtatható a Mooney-Rivlin, a Neo-Hooke és a Yeoh modellek, melyeket a ... táblázatban soroltam fel, azonban ezekhez kettő további, az adott anyag konstansainak függvényében felírható moduluszra van szükség:

- kezdeti térfogatváltozási modulusz

$$k_0 = \frac{2}{d_1}$$

- kezdeti nyírási modulusz

$$\mu_0 = 2(c_{10} + c_{01})$$

A kezdeti térfogatváltozási modulusz a modellek térfogatváltozására vonatkozó tagban szerepel, így attól el lehet tekinteni.

1. Kétparaméteres Mooney-Rivlin modell a polinomiális modellből a következő feltételek mellett $n = 1, J = 1$

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3)^1(\bar{I}_2 - 3)^0 + c_{01}(\bar{I}_1 - 3)^0(\bar{I}_2 - 3)^1$$

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3)$$

A kétparaméteres Mooney-Rivlin modell széleskörű alkalmazást nyert 100%-ig terjedő deformációk esetén, azonban nagy deformációk esetén a magasabb rendű, az 5 és 9 paraméteres modelleket érdemes használni.

2. Háromparaméteres Mooney-Rivlin modell a polinomiális modellből a következő feltételek mellett $n = 2, J = 1, c_{20} = c_{02} = 0$

3. Yeoh modell a polinomiális modellből a következő feltételek mellett $n = 3, J = 1, \mu_0 = 2c_{10}$

$$W = \frac{\mu_0}{2}(\bar{I}_1 - 3) + c_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3$$

Yeoh modellnek a három paraméteres alakja kiváló a húzásból származó nagy deformációk leírására, kicsi deformációk (50% alatt) esetén nem érdemes alkalmazni.

4. Neo-Hooke modell a polinomiális modellből a következő feltételek mellett $n = 1, J = 1, c_{01} = 0, c_{10} = \frac{\mu}{2}$

$$W = \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3)$$

A Neo-Hooke modell az egyik legegyszerűbb anyagmodell, egyetlen konstans tartalmaz, mely a nyírási modulusból származtatható. A modell kicsi deformációk (30-40%-os) esetén alkalmazható.

Anyagegyenletek levezetése (5)

Az anyagmodellek közül a kilenc paraméteres Mooney-Rivlin modell anyagegyenleteit célszerű levezetni, mivel ebből a többi modellhez tartozó szükséges paraméterek származtathatók.

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3)^1 + c_{01}(\bar{I}_2 - 3)^1 + c_{11}(\bar{I}_1 - 3)^1(\bar{I}_2 - 3)^1 + c_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + c_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{12}(\bar{I}_1 - 3)^1(\bar{I}_2 - 3)^2 + c_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3)^1 + c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + c_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3$$

Vezessük be a deformációs gradiens tenzort, mely a főnyúlások irányában van definiálva, ekkor (4.11) egyenletet felhasználva a jobb Cauchy-Green tenzor felírható a főnyúlásokkal:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

Egytengelyű húzás esetén:

$$\lambda_1 = \lambda \tag{4.21}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-2} \tag{4.22}$$

$$\sigma_{11} = \sigma \tag{4.23}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \tag{4.24}$$

A (4.21) és a (4.22) egyenleteket felhasználva az alakváltozási invariánsok (4.7), (4.8), (4.9) egyenletek alapján:

$$I'_1 = \lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2} \tag{4.25}$$

$$I'_2 = 2 \cdot \lambda + \lambda^{-1} \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial I'_1}{\partial \lambda} = 2 \cdot \lambda - 4 \cdot \lambda^{-3} = 2(\lambda - 2 \cdot \lambda^{-3}) \tag{4.27}$$

$$\lambda \frac{\partial I'_1}{\partial \lambda} = 2\lambda(\lambda - 2 \cdot \lambda^{-3}) = 2\lambda^2 - 4 \cdot \lambda^{-2} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial I'_2}{\partial \lambda} = 2 + \lambda^{-2} \tag{4.29}$$

$$\lambda \frac{\partial I'_2}{\partial \lambda} = \lambda(2 + \lambda^{-2}) = 2\lambda + \lambda^{-1} \tag{4.30}$$

Ha az energiasűrűség függvényt a nyúlás szerint parciálisan deriváljuk, akkor lehetőség nyílik a feszültségi állapot meghatározására:

$$\sigma = \lambda \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial I'_1} \frac{\partial I'_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial W}{\partial I'_2} \frac{\partial I'_2}{\partial \lambda} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I'_1} = c_{10} + c_{11}(\bar{I}_2 - 3)^1 + c_{20}(2\bar{I}_1 - 6)^1 + c_{12}(\bar{I}_2 - 3)^2 + c_{21}(2\bar{I}_1 - 6)^1(\bar{I}_2 - 3)^1 + c_{30}(3\bar{I}_1 - 9)^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial I'_2} = c_{01} + c_{11}(\bar{I}_1 - 3)^1 + c_{02}(2\bar{I}_2 - 6)^1 + c_{12}(\bar{I}_1 - 3)^1(2\bar{I}_2 - 6)^1 + c_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{03}(3\bar{I}_2 - 9)^2$$

Ebből:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I'_1} &= c_{10} + c_{11}(2 \cdot \lambda + \lambda^{-1} - 3)^1 + c_{20}(2 \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2}) - 6)^1 + c_{12}(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2} - 3)^2 \\ &\quad + c_{21}(2 \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2}) - 6)^1(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2} - 3)^1 \\ &\quad + c_{30}(3 \cdot (\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2}) - 9)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I'_2} &= c_{01} + c_{11}(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2} - 3)^1 + c_{02}(2 \cdot (2 \cdot \lambda + \lambda^{-1}) - 6)^1 \\ &\quad + c_{12}(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2} - 3)^1(2 \cdot (2 \cdot \lambda + \lambda^{-1}) - 6)^1 + c_{21}(\lambda^2 + 2 \cdot \lambda^{-2} - 3)^2 \\ &\quad + c_{03}(3 \cdot (2 \cdot \lambda + \lambda^{-1}) - 9)^2 \end{aligned}$$

Majd ebből:

$$\begin{aligned} \sigma &= c_{10}(2\lambda^2 - 2 \cdot \lambda^{-1}) + c_{01}(2\lambda - 21 \cdot \lambda^{-2}) + c_{20}(4\lambda^4 - 12\lambda^2 + 4\lambda - 8 \cdot \lambda^{-2} + 12 \cdot \lambda^{-1}) \\ &\quad + c_{11}(6\lambda^3 - 6\lambda^2 - 6\lambda - 6 \cdot \lambda^{-3} + 6 \cdot \lambda^{-2} + 6 \cdot \lambda^{-1}) \\ &\quad + c_{02}(8\lambda^2 - 12\lambda - 4 \cdot \lambda^{-4} + 12 \cdot \lambda^{-2} - 4 \cdot \lambda^{-1}) \\ &\quad + c_{30}(-54 \cdot \lambda^{-1} + 72 \cdot \lambda^{-2} + 54\lambda^2 - 24 \cdot \lambda^{-3} + 18\lambda^3 - 36\lambda^4 + 6\lambda^6 - 36\lambda) \\ &\quad + c_{21}(-48 \cdot \lambda^{-1} + 6 \cdot \lambda^{-2} + 54\lambda^2 + 36 \cdot \lambda^{-3} - 36\lambda^3 - 16 \cdot \lambda^{-4} - 12\lambda^4 \\ &\quad + 10\lambda^5 + 6\lambda) \\ &\quad + c_{12}(-6 \cdot \lambda^{-1} - 54 \cdot \lambda^{-2} - 6\lambda^2 + 36 \cdot \lambda^{-3} - 36\lambda^3 + 12 \cdot \lambda^{-4} + 16\lambda^4 \\ &\quad - 10 \cdot \lambda^{-5} + 48\lambda) + c_{03}(36 \cdot \lambda^{-1} - 54 \cdot \lambda^{-2} - 72\lambda^2 - 18 \cdot \lambda^{-3} + 24 \cdot \lambda^3 \\ &\quad + 36 \cdot \lambda^{-4} - 6 \cdot \lambda^{-6} + 54\lambda) \end{aligned}$$

Ebből előállítható:

- a három paraméteres Mooney-Rivlin modell (9):

$$\begin{aligned} \sigma &= c_{10}(2\lambda^2 - 2 \cdot \lambda^{-1}) + c_{01}(2\lambda - 21 \cdot \lambda^{-2}) \\ &\quad + c_{11}(6\lambda^3 - 6\lambda^2 - 6\lambda - 6 \cdot \lambda^{-3} + 6 \cdot \lambda^{-2} + 6 \cdot \lambda^{-1}) \end{aligned}$$

- az öt paraméteres Mooney-Rivlin modell (9):

$$\begin{aligned} \sigma &= c_{10}(2\lambda^2 - 2 \cdot \lambda^{-1}) + c_{01}(2\lambda - 21 \cdot \lambda^{-2}) \\ &\quad + c_{20}(4\lambda^4 - 12\lambda^2 + 4\lambda - 8 \cdot \lambda^{-2} + 12 \cdot \lambda^{-1}) \\ &\quad + c_{11}(6\lambda^3 - 6\lambda^2 - 6\lambda - 6 \cdot \lambda^{-3} + 6 \cdot \lambda^{-2} + 6 \cdot \lambda^{-1}) \\ &\quad + c_{02}(8\lambda^2 - 12\lambda - 4 \cdot \lambda^{-4} + 12 \cdot \lambda^{-2} - 4 \cdot \lambda^{-1}) \end{aligned}$$

- a három paraméteres Yeoh modell (9):

$$\sigma = c_{10}(2\lambda^2 - 2 \cdot \lambda^{-1}) + c_{20}(4\lambda^4 - 12\lambda^2 + 4\lambda - 8 \cdot \lambda^{-2} + 12 \cdot \lambda^{-1}) + c_{30}(-54 \cdot \lambda^{-1} + 72 \cdot \lambda^{-2} + 54\lambda^2 - 24 \cdot \lambda^{-3} + 18\lambda^3 - 36\lambda^4 + 6\lambda^6 - 36\lambda)$$

Ezekhez a konstansok beazonosításában az alábbi táblázat nyújt segítséget (9):

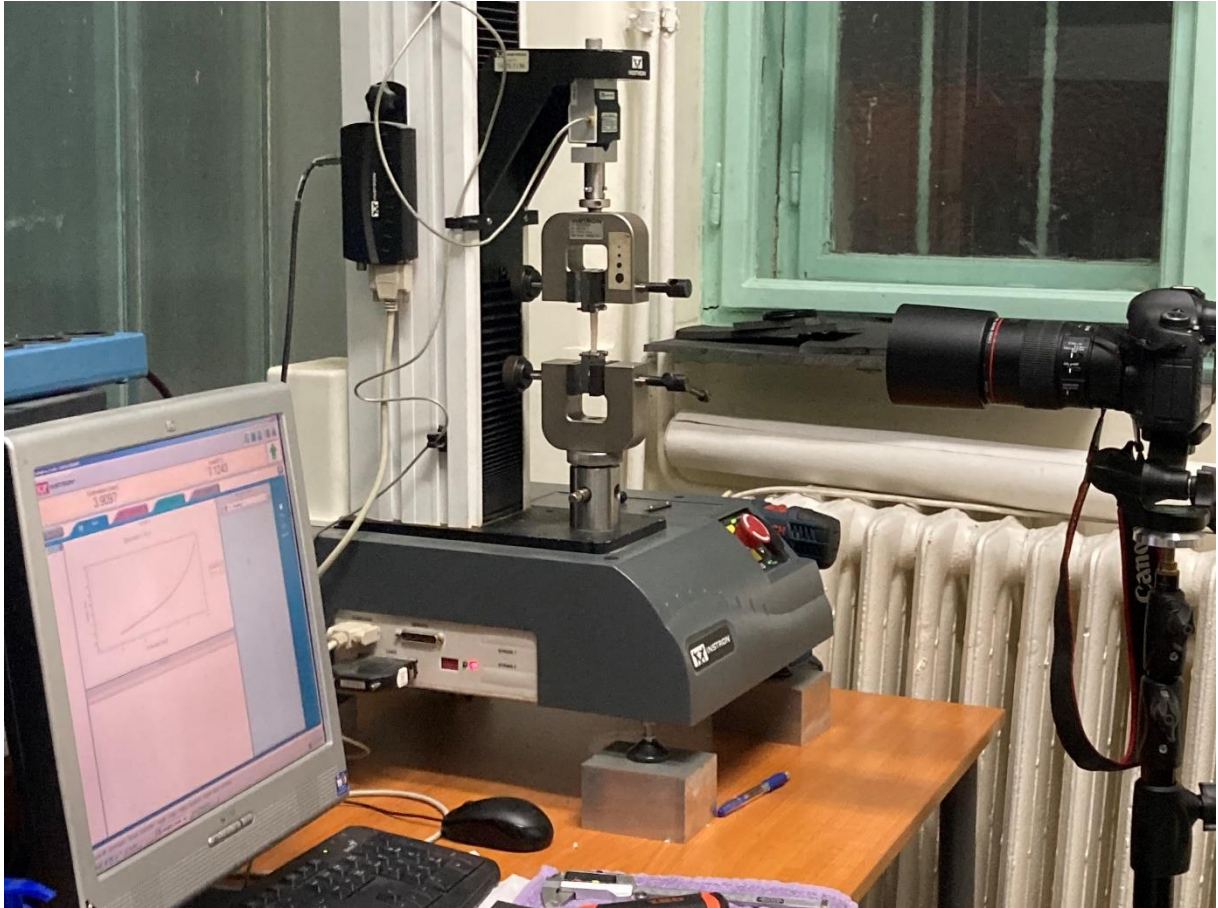
Model Name	Year	Strain Energy Function	Params	Parameters
Mooney-Rivlin [49]	1940	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$	2	C_{10}, C_{01}
Neo-Hookean [48]	1943	$W = C_{10}(I_1 - 3)$	1	C_{10}
Isihara [51]	1951	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 C_{01}(I_2 - 3)$	3	C_{10}, C_{20}, C_{01}
Biderman [52]	1958	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$	4	$C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{30}$
James-Green-Simpson [53]	1975	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$	5	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{30}$
Haines-Wilson [54]	1979	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$	6	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{02}, C_{20}, C_{30}$
Yeoh [55]	1990	$W = \sum_{i=1}^3 C_{0i}(I_1 - 3)^i$	3	C_{10}, C_{20}, C_{30}
Lion [56]	1997	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{50}(I_1 - 3)^5$	3	C_{10}, C_{01}, C_{50}
Haupt-Sedlan [57]	2001	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$	5	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$
Hartmann-Neff [58]	2003	$W = \alpha(I_1^2 - 3^2) + \sum_{i=1}^N C_{0i}(I_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^N C_{0j}(I_2^2 - 3\sqrt{3})^j, N = 1, 2, 3, \dots$	$2N + 1$	α, C_{0i}, C_{0j}
Carroll [59]	2011	$W = AI_1 + BI_1^4 + CI_2^{1/2}$	3	A, B, C
Nunes [60]	2011	$W = C_1(I_1 - 3) + \frac{4}{3}C_2(I_2 - 3)^{3/4}$	2	C_1, C_2
Bahreman-Darjani [61]	2014	$W = A_2(I_1 - 3) + B_2(I_2 - 3) + A_4(I_1^2 - 2I_2 - 3) + A_6(I_1^3 - 3I_1I_2)$	4	A_2, B_2, A_4, A_6
Zhao [62]	2019	$W = C_{-1}^1(I_2 - 3) + C_1^1(I_1 - 3) + C_2^1(I_1^2 - 2I_2 - 3) + C_2^2(I_1^2 - 2I_2 - 3)^2$	4	$C_{-1}^1, C_1^1, C_2^1, C_2^2$

5. Táblázat

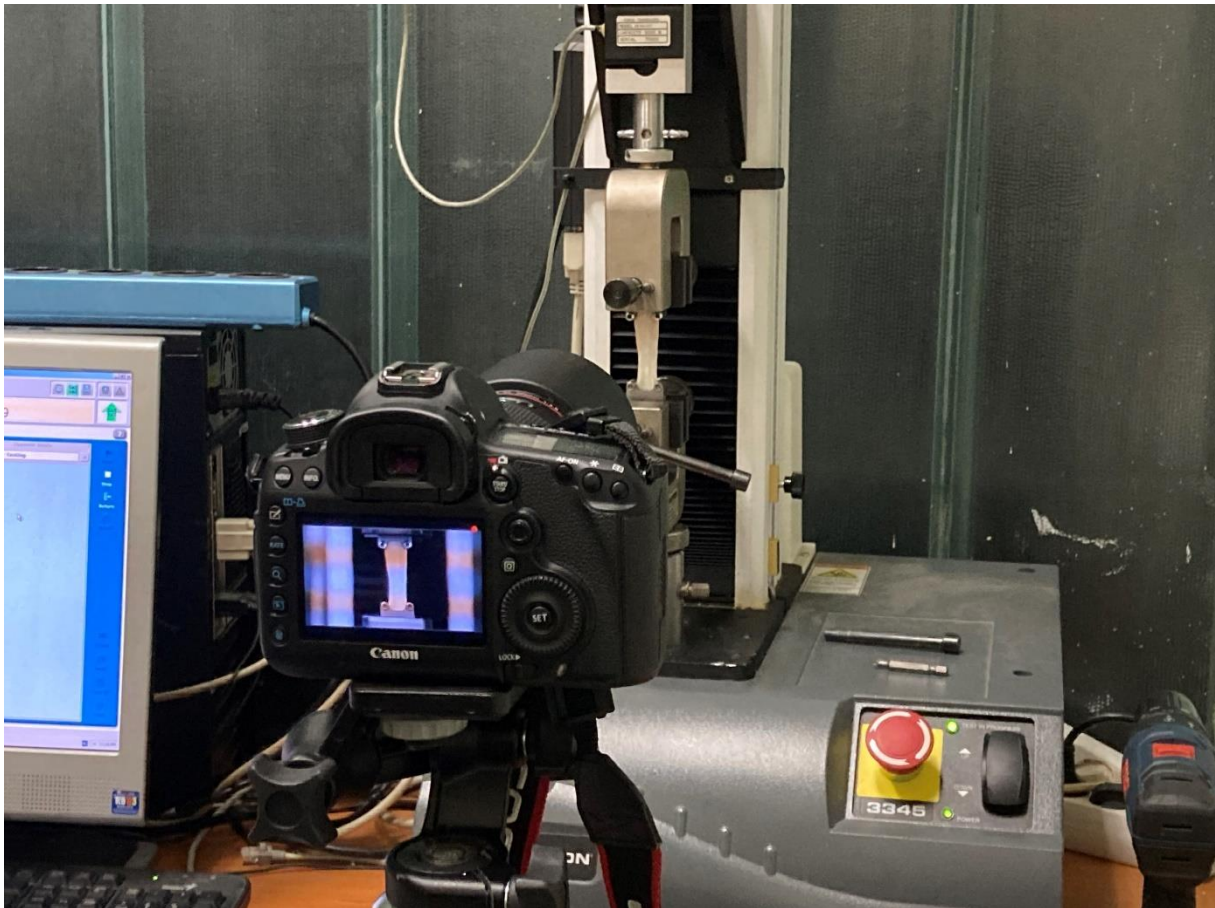
Mérés

Mérés előkészítése

A paramétereket a kiválasztott hiperelasztikus modellekhez szakítópróbával tudjuk kinyerni, viszont a szalagok elszakítása egy bonyolult feladat volt, hiszen be kellett szerezni és előkészíteni a mintákat, megfelelő befogást találni hozzájuk, éppen jó terhelést alkalmazni és kontrakciót mérni.



21. Ábra

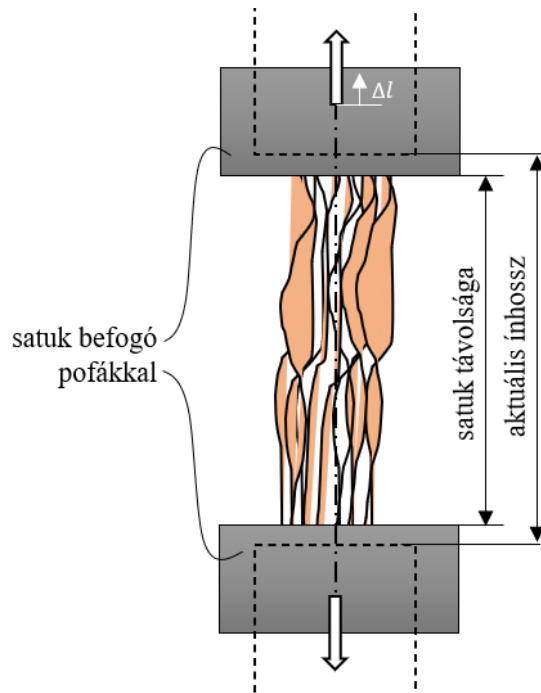


22. Ábra

A mintákat a vágóhídon szereztem be, a mintavétel a sertés lapockájáról történt (csont és izom kapcsolat, vagyis ínak), összesen 6 db szalagot sikerült leszedni, amiket otthoni körülmények között elkészített, közel 2°C hőmérsékletre hűtött fiziológias oldatban szállítottam haza, majd befagyasztottam. A minták előkészítése során nagyjából ugyanolyan vastagságúra vágtam szét a szalagokat, összesen 9 db kisebb mintát sikerült előállítani a rendelkezésemre álló ínakból. A befogásba kerülő részt nem módosítottam, így nagy felület miatt csökkent a befogásból való kicsúszás esélye.

Befogás

A befogást úgy oldottam meg, hogy a legkisebb befogópofákat választottam, melyeknek a belső felülete recés műanyagbetétekkel van ellátva. A befogópofákat elég erősen szorították össze a satuk, így biztosítva volt a súrlódásmentes befogás. A minták elszakítása előtt minden szalagnak a két befogópofa közé eső résznek 10 helyen lemértem a szélességét, majd a szakítógépre helyezés után 5 helyen lemértem a vastagságot, és ezt követően meghatároztam a két befogópofa távolságát oldalirányban, majd a satuk távolságát szemből. A befogópofák közötti rész a kezdeti hossz (23. Ábra), melyből a fajlagos nyúlás és alakváltozás határozható meg, satuk távolságára pedig azért volt szükség, mert a kontrakciót csak kamera felvételekből lehet meghatározni (21. és 22. Ábra), hiszen az ínak struktúrájuk révén nem egyenletesen és nem ugyanott vékonyodnak el, így kép alapján könnyebb megállapítani, hol keletkeztek hézagok az elmozdulás során. A geometriai jellemzők mérését digitális tolómérővel végeztem.



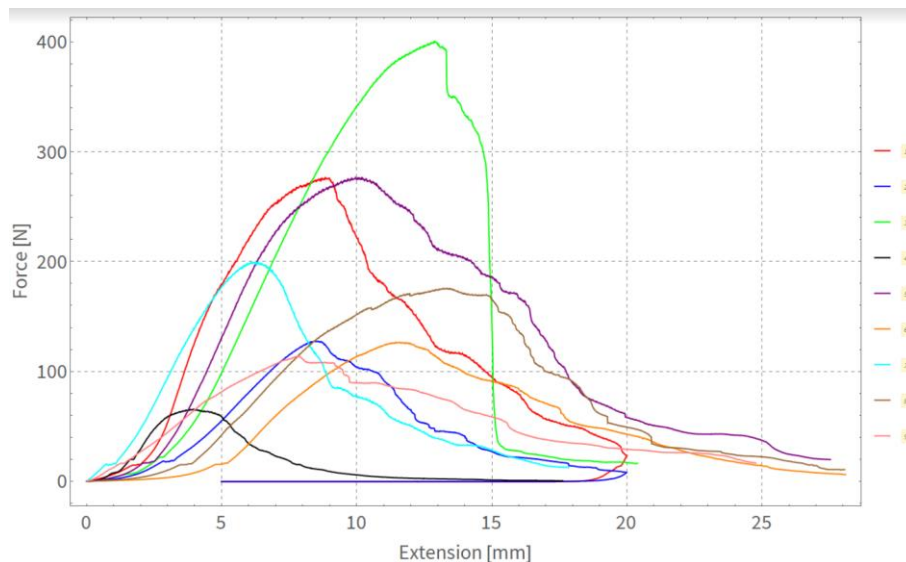
23. Ábra

Terhelés

A szakítópróba egytengelyű húzókísérlet volt kvázi-statikussal, melyhez az elmozdulásvezérlést alkalmaztam, hiszen a maximális szakítóerőt nem ismerem. A Δ megnyúlást 20 mm-re állítottam, szakítósebességnek pedig $5 \frac{mm}{min}$ értéket adtam meg, mert egyrészt a hirtelen dinamikus igénybevétel pontatlan eredményeket adott volna, másrészt kvázi-statikussal vizsgáltam az esetet, illetve a minták száma is korlátozott volt.

Mérési adatok

A kimenő adatokat CSV kiterjesztésű fájlként kaptam meg, minden egyes szalaghoz egy fájl tartozik, mely tartalmazza az elmozdulást és a terhelő erőt minden egyes rögzített időpillanathoz. Ezek grafikusán megjelenítve:



24. Ábra

Az újabb kihívás abban rejlik, hogy az ínak hossza és keresztmetszete egyértelműen eltér, még hozzá a belső szerkezetük is más, hiszen minden ínban az alapállomány és a kollagénrost aránya eltér. Ideális esetben minden szakító vizsgálat előtt meg kellett volna számolni a térfogategységre eső rostok arányát, viszont ez mintaroncsolással járt volna, hiszen fénymikroszkóppal csak a vékonyra vágott szeletet lehet megvizsgálni. Ha szakítóvizsgálat után végezném az ínak szövetelemzését, akkor abba a problémába ütköznék, hogy az alapállomány mennyisége rohamosan lecsökkent a párolgás miatt.

Kiértékelés

Szakítás előtti adatok

Szakítás előtt minden mintának a két befogópofa közé eső rész szélességét lemértem 10 helyen, vastagságukat pedig 5 helyen, a mérést digitális tolómérővel végeztem. Ezután kiszámoltam mindegyik ín átlag szélességét és vastagságát. Fontos, hogy a próbatestek hossza eltérő, emiatt a kapott mérési eredményeket le kell normálni annak érdekében, hogy egymásra hasonló görbéket kapjak.

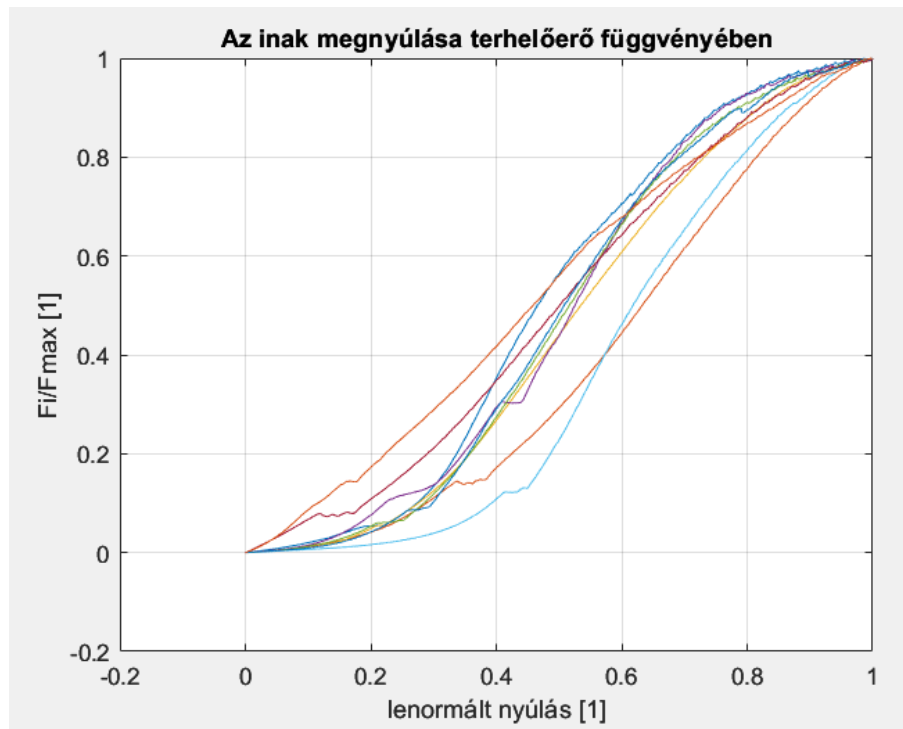
Szakítóvizsgálatból nyert adatok

A szakítóvizsgálat (egytengetű húzó kísérlet) eredményeként kinyert CSV kiterjesztésű fájlokban egy-egy ínhoz tartozó terhelő erő és elmozdulás van megadva minden egyes időpillanathoz. Az összes mérési eredményemet használtam fel, mivel feltételeztem, hogy az anyag viselkedése minden innál nagyon hasonló, a mérési eredmények közötti eltérést pedig a minták különböző hossza és keresztmetszete okozza, ezért érdemesnek láttam minden egyes ínhoz az erő és elmozdulás viszonyát megvizsgálni. A mintákra vonatkozó adatokat csak maximális terhelésig vettem figyelembe, mivel a legnagyobb terhelésnél mindenhol, vagy helyenként maradandó károsodás keletkezik a rostokban, ami nem összeegyeztethető az üzemszerű működéssel.

Adatfeldolgozás

A fájlakat Matlab környezetében dolgoztam fel, minden egyes szalaghoz tartozó három adatsort három oszlopot tartalmazó mátrixként adtam meg, majd minden mátrixban csak a második (elmozdulás) és harmadik (erő) oszlopot vettem figyelembe. A harmadik oszlopban

megkerestem a maximális erőt és ennek függvényében a hozzá tartozó elmozdulást a második oszlopban, mert csak a legnagyobb terhelésig van értelme az adatsornak, az elmozdulásnál viszont fontos volt a vektor dimenziója. Így kaptam kettő azonos nagyságú vektort egy-egy ínhöz, amelyekben a szereplő adatokat tudtam átskálázni 0 és 1 közé:



25. Ábra

A kapott görbék szépen egymás mellé rendeződtek ugyan és ez matematikailag helyes is, viszont fizikai tartalmán még dolgozni kell. Mivel a tengelyek mentén 0 és 1 közé eső, dimenziótlan mennyiségeket kaptam, ezeket át kell konvertálni feszültség-alakváltozás függvényé. Irodalomból ki kellett kutatnom egy maximális, ínakban ébredő feszültséget (35[MPa]-re becsültem meg a diagram alapján (26. és 27. Ábra)), amivel beszoroztam a függőleges tengely menti értékeket, ezzel megkaptam a σ_i feszültséget minden egyes mintához. A λ_i fajlagos nyúlás átskálázása során mindegyik Δl_i hosszváltozást leosztottam a F_{max} -hoz tartozó hosszváltozással:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{F_{max}} \cdot 35[MPa]$$

$$\lambda_i = \frac{\Delta l_i}{\Delta l_{max}}$$

ahol:

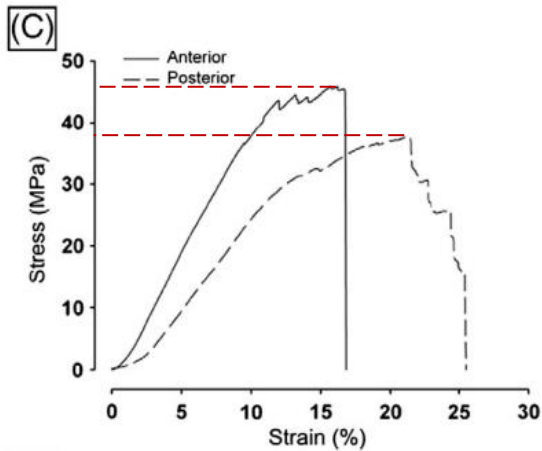
F_i – az aktuális terhelés,

F_{max} – a maximális terhelőerő,

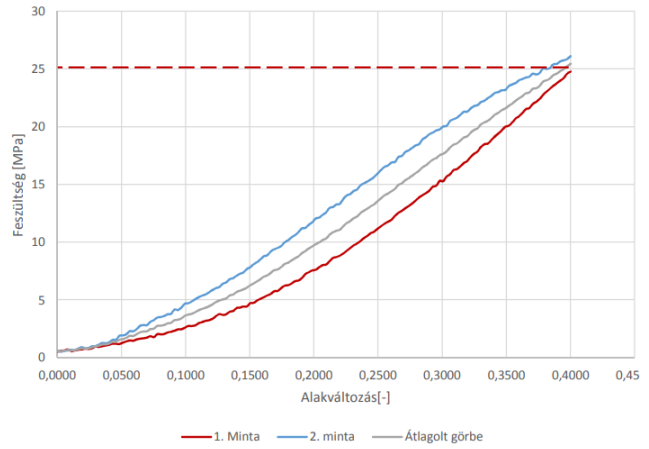
λ_i – átskálázott fajlagos nyúlás,

$\Delta l_i - t_i$ időpillanathoz tartozó elmozdulás,

$\Delta l_{max} - F_{max}$ -hoz tartozó elmozdulás (nem a maximális elmozdulás!).

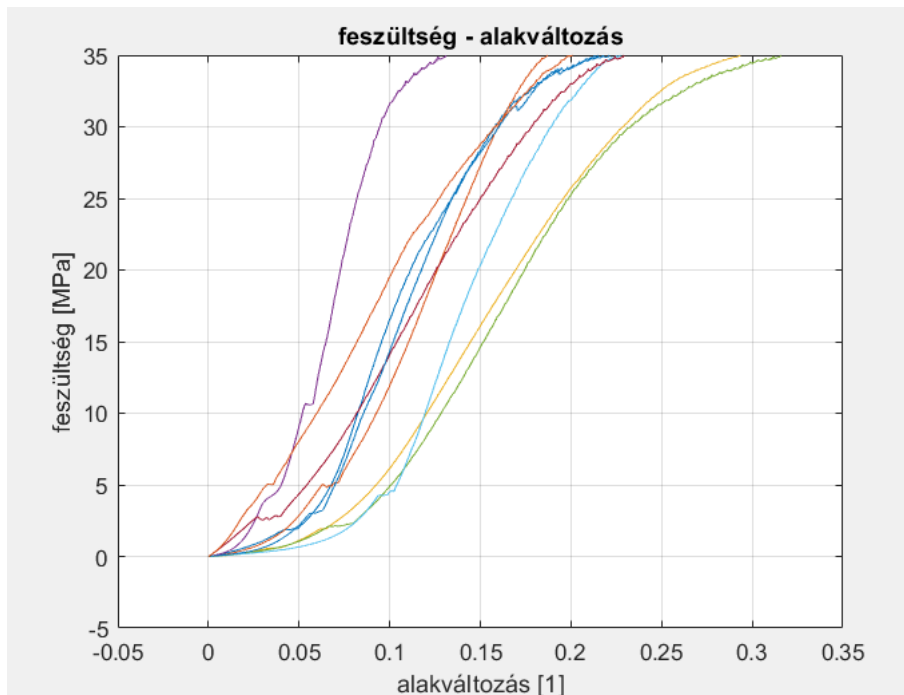


26. Ábra (10)



27. Ábra (5)

Az alakváltozáson többlet kellett dolgozni: először mindegyik eredeti méréssorból a maximális erőhöz tartozó elmozdulásokat leosztottam a minta hosszával, ebből megkaptam a fajlagos nyúlást minden ínhöz, ezeknek az átlagával definiáltam egy $\varepsilon_0 = 0,22[1]$ átlagos alakváltozás, ami egyben a maximális érték is.



28. Ábra

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_0}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta l_i}{l_0}$$

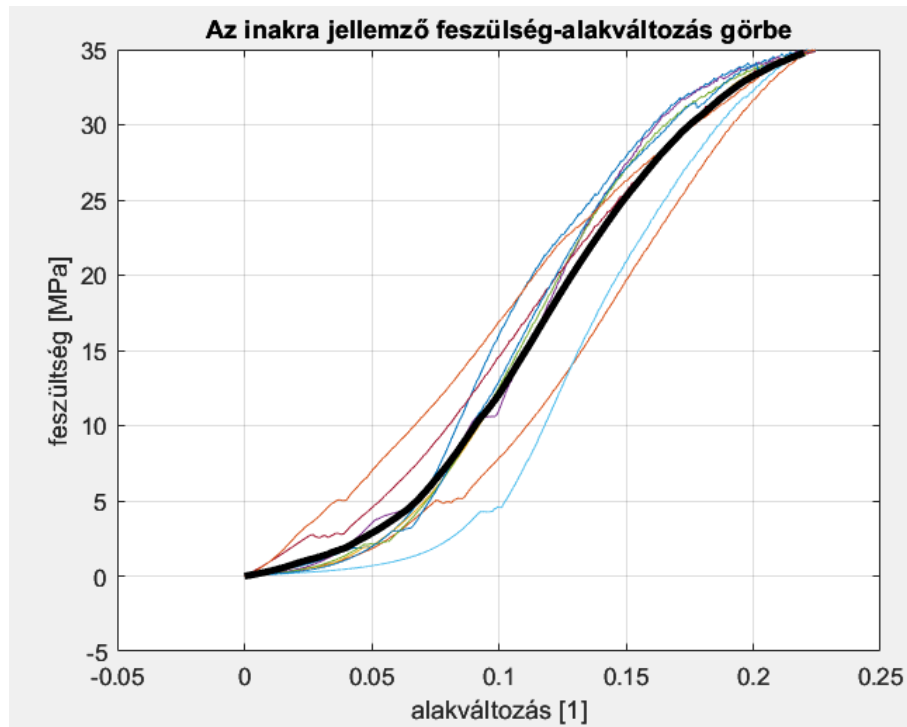
ahol:

$\varepsilon_i - t_i$ időpillanathoz tartozó alakváltozás,

l_0 – az ín pofák közé szorított rész távolsága,

n – a minták száma,

ε_0 – átlagos alakváltozás.



29. Ábra

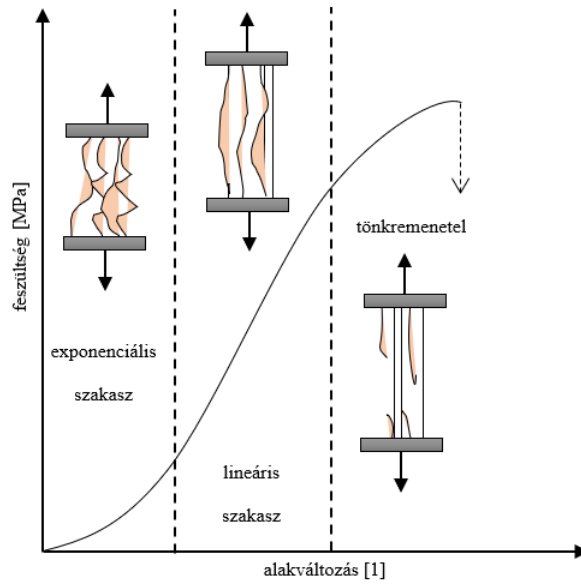
$$\bar{\varepsilon}_i = \lambda_i \cdot \varepsilon_0 = \frac{\Delta l_i}{\Delta l_{max}} \cdot \varepsilon_0$$

$\bar{\varepsilon}_i - \sigma_i$ -hez tartozó átlagos alakváltozás.

Mindegyik λ_i fajlagos ívhosszt beszoroztam ε_0 átlagos alakváltozással, így megkaptam a kilenc darab mintára súlyozott feszültség-alakváltozás görbét. Az átlag görbe pontjait kimentettem XLS fájlként, hogy be tudjam olvastatni Ansys-szal és ráilleszteni az anyagmodelleket.

A kapott átlag görbe jól közelíti a kollagénrostos kötőszövetből álló inak mechanikai viselkedését kvázi-statikusan terhelés hatására:

- az exponenciális szakaszban a rostok kissé rendezetlen irányúak, húzó igénybevétel hatására fokozatosan kiegyenesednek,
- a lineáris szakaszban a kiegyenesedett szálak tovább terhelődnek, viselkedésük lineáris egyenessel közelíthető,
- amikor a legelső rost elszakadt, akkor bekövetkezik a visszafordíthatatlan tönkremenetel, ahol a szálak nem egyszerre mennek tönkre.

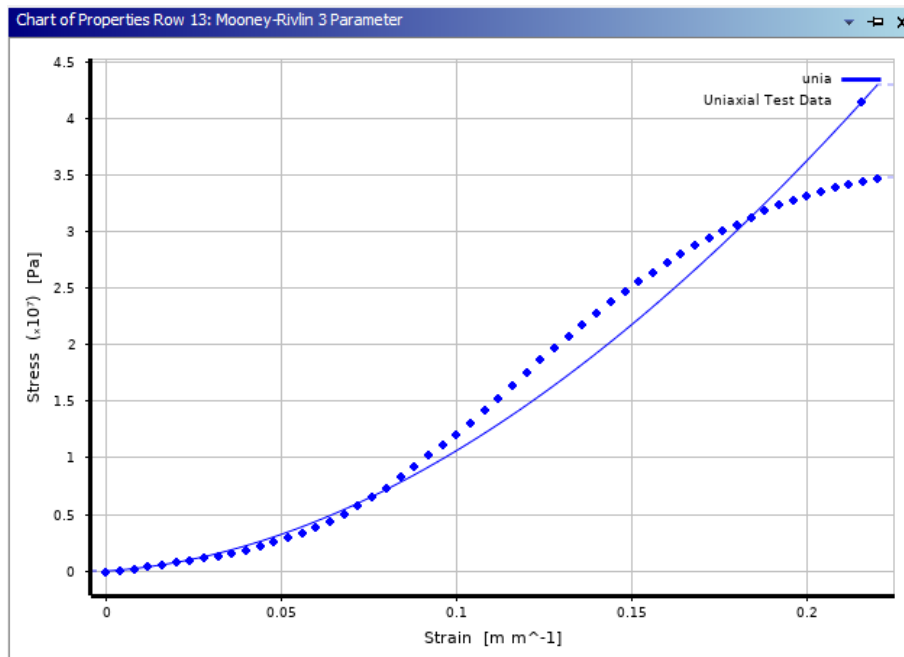


30. Ábra

Görbeillesztés az Ansys környezetében

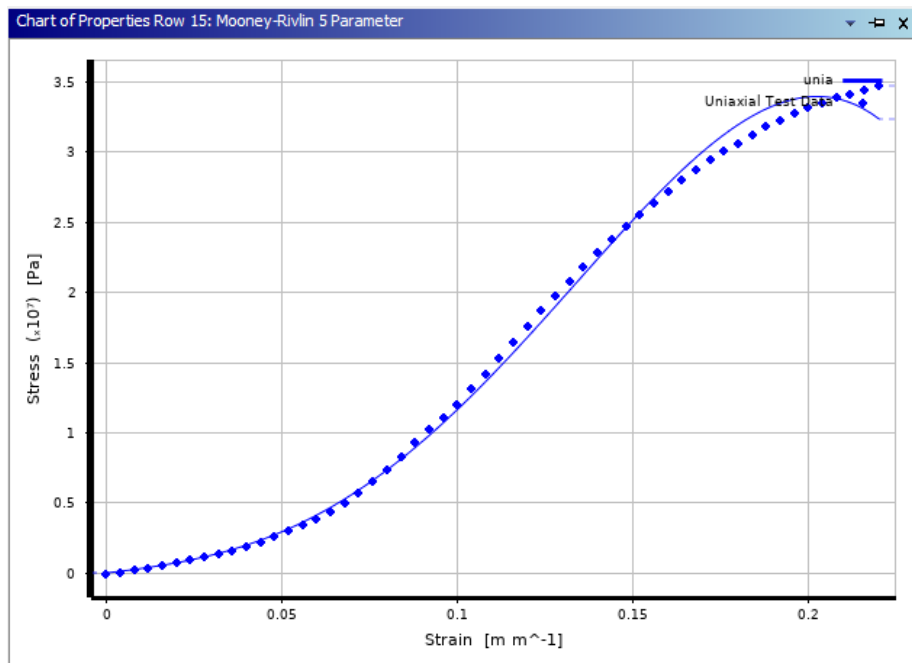
A kapott átlaggörbéhez tartozó adatsorra a három-, az öt- és a kilenc paraméteres Mooney-Rivlin, illetve a három paraméteres Yeoh anyagmodellt illeszttem Curve fitting segítségével, majd megkaptam az anyaghoz tartozó konstansokat:

Három paraméteres Mooney-Rivling modell:



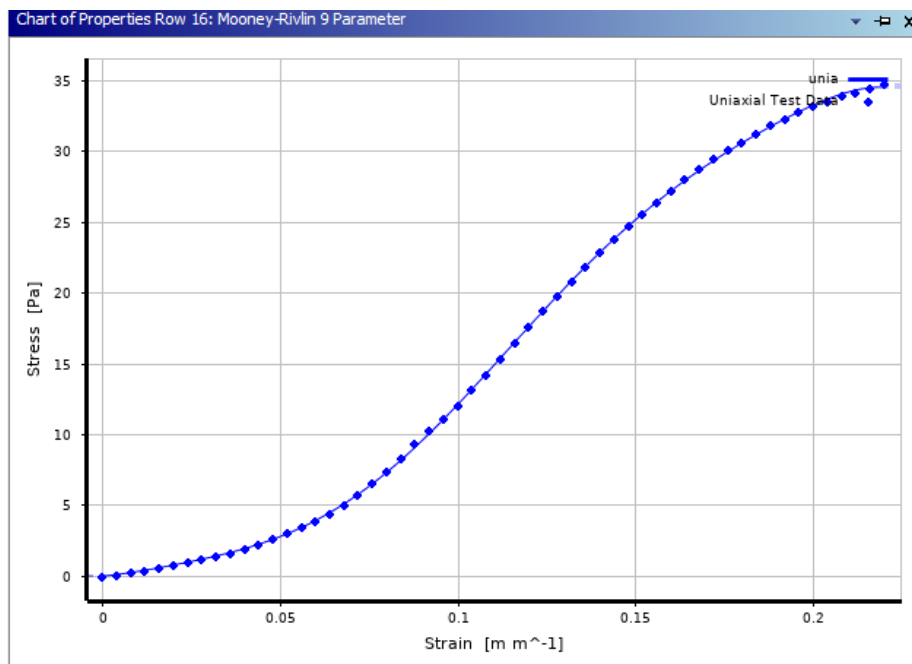
31. Ábra

Öt paraméteres Mooney-Rivling modell:



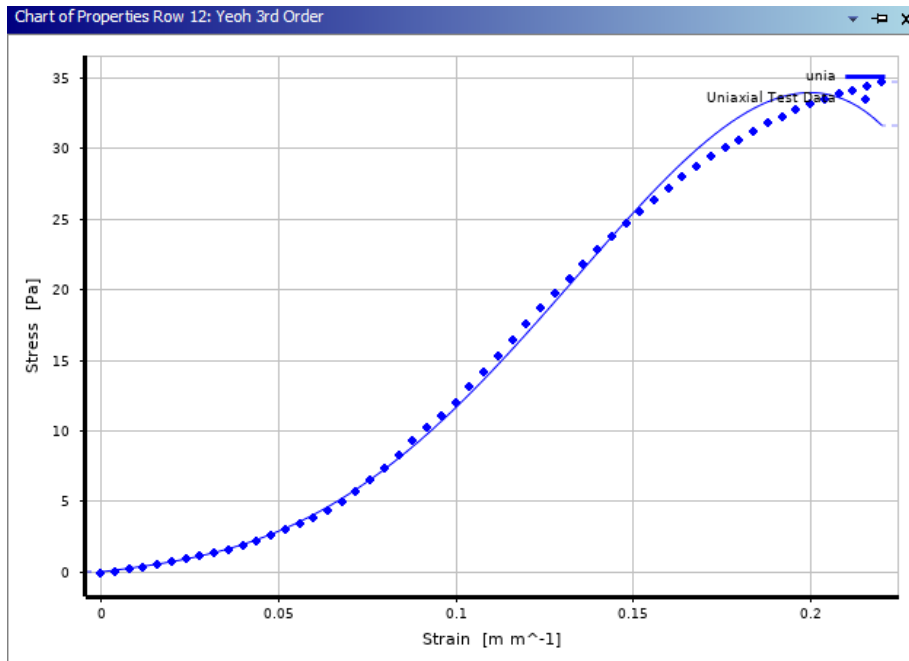
32. Ábra

Kilenc paraméteres Mooney-Rivlin modell:



33. Ábra

Három paraméteres Yeoh modell:



34. Ábra

A görbeillesztésnél ránézésre a kilenc paraméteres Mooney-Rivlin modell követi legjobban a mérési adatsort, azonban ez a modell szinte bármely nemlineárisan rugalmas anyagnál alkalmazható, hiszen kilenc illesztési paramétere van. A három paraméteres Yeoh- és az öt paraméteres Mooney-Rivlin modell szintén megfelelő lehet az ínszalagok viselkedésének leírására, azonban a három paraméteres Mooney-Rivlin-nál már kevésbé pontosan követi a görbe a mérési adatsort.

Források

1. Tibor, Dr. Donáth. *Anatómia - élettan.*
2. János, Szentágothai. *Funkcionális anatómia I.*
3. Yana, Shestakova. *A felszínpótló térdprotézis végeelem analízise.*
4. *RUSSIAN JOURNAL OF BIOMECHANICS.*
5. Ferenc, Szakály. *Emberi inak, ínszalagok numerikus modellezése.*
6. Gábor, Dr. Hénap. *Kontinuum mechanika előadás jegyzet.*
7. M.I. Shmurak, A.G. Kuchumov, N.O. Voronova. *HYPERELASTIC MODELS ANALYSIS FOR DESCRIPTION OF SOFT HUMAN TISSUES BEHAVIOR.*
8. Weiss, Jeffrey A. *Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity.*
9. *A comparative study of 85 hyperelastic constitutive models for both unfilled.*
10. Connizzo, Brianne K. *Structure–function relationships of postnatal tendon development.*