

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

# **Térrácsok kontinuum modelljének vizsgálata**

TDK konferencia  
Építészmérnöki kar  
2018

**Szerző:**

Szabó Simon

**Konzulens:**

Dr. Sajtos István

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

**Tartalom**

---

Absztrakt .....	2
1. Bevezetés .....	3
2. A kontinuum módszer .....	4
3. A kontinuum módszer hibái .....	6
4. Kontinuum rendszerbe helyezése .....	8
5. Felvételi pont helye .....	11
6. Statikai határozottság/ határozatlanság .....	14
7. Övek helyzete egymáshoz képest .....	16
8. Rácsozás hatása .....	18
9. Haránt kontrakció .....	20
10. Rácsmerevségek .....	21
11. Konklúzió .....	24
Irodalomjegyzék .....	25

**Absztrakt**

---

A térbeli rácsostartók, térrácsok gazdaságos mivoltuk és sokféle kialakítási lehetőségeik miatt egyre jobban kiszorítják nagyobb fesztávokon a felületszerkezeteket (vasbeton héjak). Nehézséget okoz viszont ezeknek a szerkezeteknek az analízise, mivel a klasszikus módszer szerint még előtervezési szakaszban is nagy mennyiségű adatot kell megadni az igénybevételek meghatározásához, továbbá a kapott eredmények is csekély betekintést engednek a szerkezet erőjátékába. Ennek a problémának a feloldására használták a helyettesítő kontinuum módszert. Így a térrács igénybevételei meghatározhatóak egy könnyebben felvehető és jobban kezelhető kontinuum modellel. Eredetileg a módszert a számítógépek numerikus számításának határai tették szükségessé a módszert, de mostanra, amikor ez nem jelent problémát a módszer továbbra is használható térbeli rácsok parametrikus és előtervezésére.

Az előző évben, dolgozatomban a kontinuum módszert és annak pontosságát mutattam be egy elliptikus felületen elhelyezett térrács példáján. A dolgozat tanulsága az volt, hogy a módszer sok fajta alakváltozást, és ebből adódóan igénybevételt elhanyagol, így a módszerrel kapott értékek nagyon eltértek a pontos rúderőktől. Az elemzett példán kiderült, hogy a módszerből kapott eredmények nagy eltéréseket mutatnak a pontos értékektől a rács pereménél és a támaszok közelében és kielégítő pontosság csak általános mezőközépi helyeken adódott. Ebben a dolgozatban ezeknek az eltéréseknek a miérettjeire keresek választ, illetve hogy hogyan lehetne ezeket a hatásokat minimalizálni. A dolgozat keretein belül elemzem, hogy az egyes, a szakirodalomból ismeretes a kontinuum modellt pontosító módszerek mennyire csökkentik a valós rúderőktől való eltéréseket. Különös figyelmet fordítok a módszerhez használt számítási munka minimalizálására, hogy a pontosított módszer használható legyen a gyakorlatban is.

## 1. Bevezetés

---

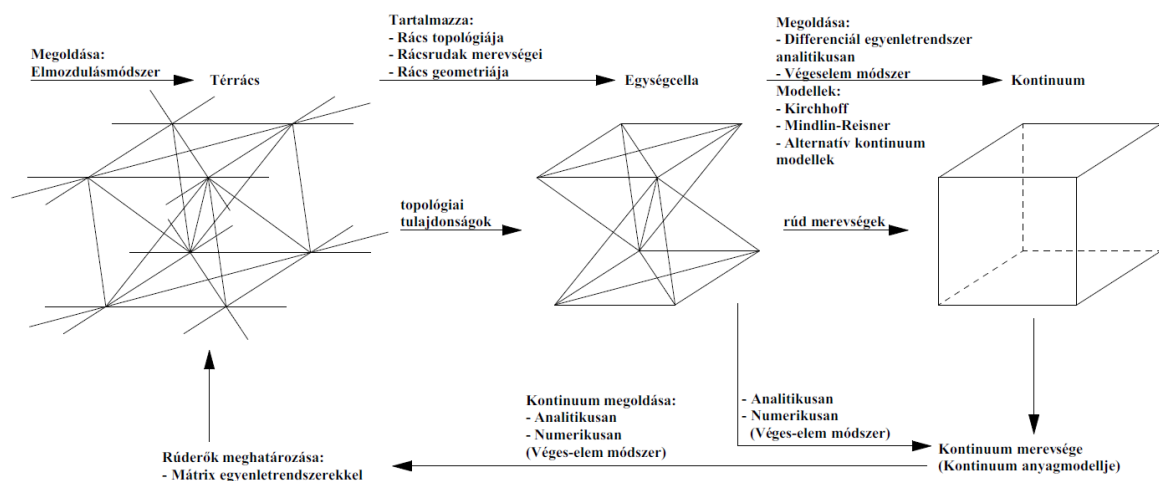
A dolgozat egy, a térrácsok közelítő megoldásához használható módszerről szól. Azt a célt tűztem ki, hogy felderítsem az algoritmus hibáit, meghatározzam a módszer feltevései mennyire felelnek meg a valóságnak és a felmerülő problémák mitől állnak fent, illetve hogyan lehet eltüntetni őket. A dolgozatban nem akartam belemerülni a módszerrel való analitikus megoldásba, helyette a számításokat véges-elem módszerrel végeztem. A véges-elem módszert felhasználva a kontinuum módszer hibáit úgy próbáltam kiküszöbölni, hogy azt véges-elem módszerrel meg lehessen tenni, így többek által használható legyen.

További célom volt a dolgozattal, hogy a módszer reális alternatíva legyen térrácsok méretezésénél. Ezt csak úgy tudtam elképzelni, ha valahogy le tudjuk csökkenteni a módszer hibahatárát, illetve ezért arra törekedtem, hogy ne bonyolítsam az algoritmust.

Kiküszöbölve a módszerből kapott hibás rúderőket és véges-elem módszerrel ötvözve ez olyan tervezési algoritmussá válhat mellyel könnyedén, kis munka befektetéssel lehet meghatározni a térrács rúderőit, a teljes rácsrendszer megmodellezése nélkül, továbbá a lemez/ héjak parametrikus tervezésének bő irodalmát is fel lehet használni, hogy a leggazdaságosabb térrácsot alakíthassunk ki.

## 2. A kontinuum módszer

A kontinuum módszer egy olyan módszer melynek segítségével térrácsok/ diszkrét szerkezetek rúderőit határozhatjuk meg közelítően. A térrácsok klasszikus elméletéből ismert elmozdulás módszer helyett, folytonos szerkezetnek (kontinuumnak/ lemeznek) feltételezve differenciál egyenletek használatával határozzuk meg a rúderőket. A módszer alkalmazásakor nagyon lényeges szempont a kontinuum modelljének megválasztása, mert ez nagyban befolyásolhatja a kapott igénybevételeket. A legegyszerűbb esetben a kontinuumot/ lemezt egy egyszerű biharmónikus differenciálegyenlet írja le, amely könnyen megoldható véges-elem módszerrel, viszont az így kapott rúderők nagyban eltérnek a valósoktól. A kontinuum modell egyszerűségéből adódóan sok alakváltozást elhanyagol, az egyszerű izotróp anyagmodell meg nem tükrözi rendesen a diszkrét hálózat merevségét. Léteznek ennél kifinomultabb modellek melyek figyelembe veszik a összekötő rácsozás csavarási ellenállását, vagy a nyírási deformációt<sup>[1]</sup>, sőt olyan hét paraméteres kontinuum modell is létezik amely a haránt kontrakciót is modellezni tudja<sup>[3]</sup>. Ezeket a modelleket leíró differenciálegyenlet rendszerek megoldása nehézségeket okoz, főleg bonyolultabb geometriáknál. A több hatást figyelembe vevő modellek bonyolultsága miatt érdemes a legegyszerűbb kontinuum modellt használni és korrigálni, hogy a lehető legpontosabb igénybevétel eloszlást kapjunk belőle. Az **1. ábrán** látható a módszer vázlatos ismertetése.



1. ábra: Kontinuum módszer menete

A módszer lépési a következők:

- 1) A térrács geometriai és anyagtulajdonságaiból meghatározni a helyettesítő kontinuumot/lemez merevségeit.

$L$ (rúdhossz) ,  $A$ (terület) ,  $E$ (rug. modulus) ,  $\alpha$ (irányszög)  $\rightarrow t'$ (helyett. vtg.) ,  $E'$ (helyett. rug. modulus)

Az övrudak normálmerevségeit a globális x,y koordinátarendszerbe forgatva megkapjuk a normálmerevségi mátrixot( $T$ ), és a térrács magasságát( $h$ ), illetve az alsó és felső öv merevségeinek arányát is figyelembe véve megkapható a hajlító-merevségi mátrix( $G$ ). A rács hajlító merevségét egyenlővé téve a választott kontinuum modell hajlító merevségével megkaphatóak a helyettesítő kontinuum tulajdonságait.

$$G_{11} = \frac{E' * t'^3}{12 * (1 - \nu^2)}$$

A két változó közül az egyik szabadon megválasztható lemez esetén, viszont héjak esetén érdemes a rács és a kontinuum normál merevséget is megfeleltetni egymásnak.

$$2 * T_{11} = \frac{E' * t'}{1 - \nu^2}$$

Az fent leírt megfeleltetések csak akkor hoznak jó eredményeket, ha a rácsunknak a merevségi mátrixa izotróp, azaz mindkét irányba ugyanolyan merev, a csavarásnak nincs hatása a hajlító igénybevételekre, és a Poisson tényezője 1/3.

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix} \text{ és } \nu = \frac{G_{12}}{G_{33}} = \frac{1}{3}$$

- 2) Helyettesítő kontinuum terheinek, megtámasztásainak (peremfeltételeinek) felvétele.
- 3) Az így kapott fajlagos igénybevételekből rúderők meghatározása  $\mathbf{m}_x$  (fajl nyomaték x irány) ,  $\mathbf{m}_y$  (fajl nyomaték y irány) ,  $\mathbf{m}_{xy}$  (fajl csavaró nyomaték)  $\rightarrow \mathbf{N}_i$  (rúderők)  
A fajlagos nyomatéki igénybevételeket membránerővé alakítva, majd irányok és merevségek szerint visszaosztva a rudakra megkapjuk a rúderőket.

### 3. A kontinuum módszer hibái

A mérnöki gyakorlatban legtöbbet használt közelítő módszer a végelem módszer, amely olyan matematikai eljárással old meg kontinuum szerkezeteket, hogy finitizálja/ diszkretizálja a kontinuumot. A kontinuum módszer algoritmusa ezzel ellentétes irányú, mivel egy diszkrét szerkezetet alakít kontinuumá. A fordított irányból adódóan két fontos különbség kell megállapítanunk:

- A kapott differenciálegyenlet nem feltétlenül birtokolja a mátrix egyenletrendszer összes tulajdonságát (azaz elhanyagolhat hatásokat).
- A differenciálegyenletből kapott igénybevételek (a végelem módszerrel ellentétben) nem tudják teljesen pontosan megközelíteni a pontos igénybevételeket a differenciál operátorok rendjének növelésével.

Ez a két különbség (de főleg az első) a kontinuum modell precíz felvételét teszi szükségessé, különben a módszerrel kapott eredmények nagymértékben eltérnek a valósoktól.

A dolgozatban a véges-elem programokban elterjed Mindlin-Reisner lemezmodellt használom, mint helyettesítő kontinuum. A modell figyelembe veszi a lemez síkjára merőleges nyíróerő hatását, azaz a nyírási alakváltozásokat, de elhanyagolja a haránt kontrakciós alakváltozásokat is. Mivel a térrácsok általában magas szerkezetek, így ez a haránt kontrakció nem elhanyagolható. Továbbá a kontinuum elhanyagolja a rács különböző „rács szerű” (rácsokra jellemző) alakváltozásokat is. További probléma ezzel a lemezmodellel, hogy a összekötő rácsozások által kialakított „csövek” csavarási merevségét nem veszi figyelembe, mert nyírási merevséget az anyagmodellből számol.

Ugyancsak problémás a térrács peremeinek kérdése, ahol a térrács peremlein létrejövő „löttyögésből” (nyúlás nélküli infinitezimálisan kicsiny alakváltozások) létrejövő igénybevételeket nem veszi figyelembe ez a lemezmodell.

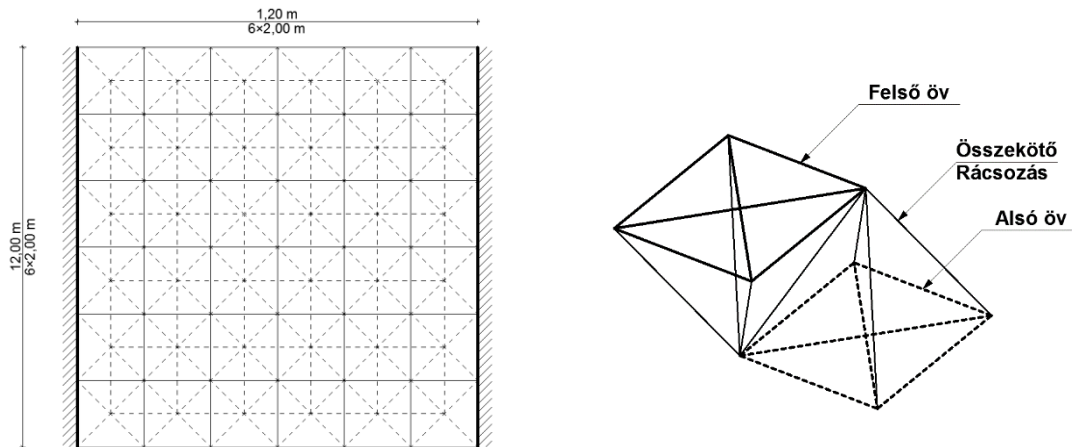
Szintén nagy eltérések jönnek létre a támaszok közelében. Ez betudható a másfajta támasz felvételének (a rácsban csomópontokban ható, a kontinuumban vonalmenti), illetve a támaszok mentén „rácsszerű” és nem kontinuumszerű viselkedésnek.

A dolgozat a következő kérdésekre keres választ:

- 1) Statikailag ekvivalens terhek/támaszok milyenek?
- 2) Hol érdemes felvenni a kontinuum igénybevételek, hogy az legjobban megközelítse a valóságokat?
- 3) A modell hogy követi a statikai határozottságot/ határozatlanságot?

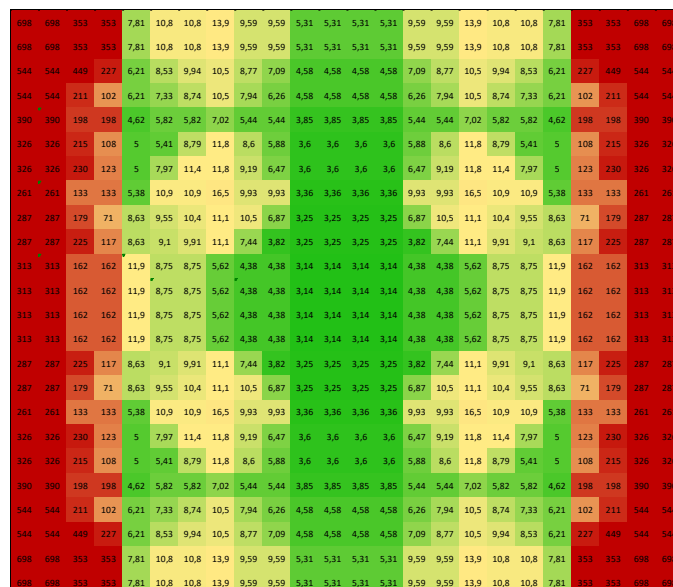
- 4) Nyírási/ haránt kontrakciós igénybevételek figyelembevétele mennyire pontosítja az eredményeket?
- 5) Övek egymáshoz való helyzetének, merevségeik arányának, távolságaiknak milyen a hatása az igénybevételekre?

Az **2. ábrán** egy bal és jobb oldalon csuklósan, a felső övénél megtámasztott 1 méter magas kétrétegű térrács látható, melynek alsó és felső öve egymáshoz képest fél egységcellával el van tolva, és övrácsa 2×2 méteres négyzetekből és két diagonálisból áll.



**2. ábra:** 2 rétegű, eltolt övű térrács

A **3. ábra** a kontinuum modellből kapott és a diszkrét modellből kapott eredmények hányadosát ábrázolja a rács mentén. Jól látható, hogy a legjobb eredményeket mezőközépen kaptuk, olyan háromszoros eltérést, viszont a peremeknél már tízszeres, illetve a támaszoknál még nagyobb eltéréseket kapunk (az óriás értékek a perem menti kis rúderők arányából adódik).



**3. ábra:** kontinuum analízis során kapott eltérések eloszlása



---

## 4. Kontinuum rendszerbe helyezése

---

Amikor felvesszük a helyettesítő kontinuumot, arra terheket kell tennünk és meg kell támasztanunk. Ezeknek ugyanolyan hatást kell kifejteniük a kontinuumra, mint az eredeti terhek/ megtámasztások a térrácsra.

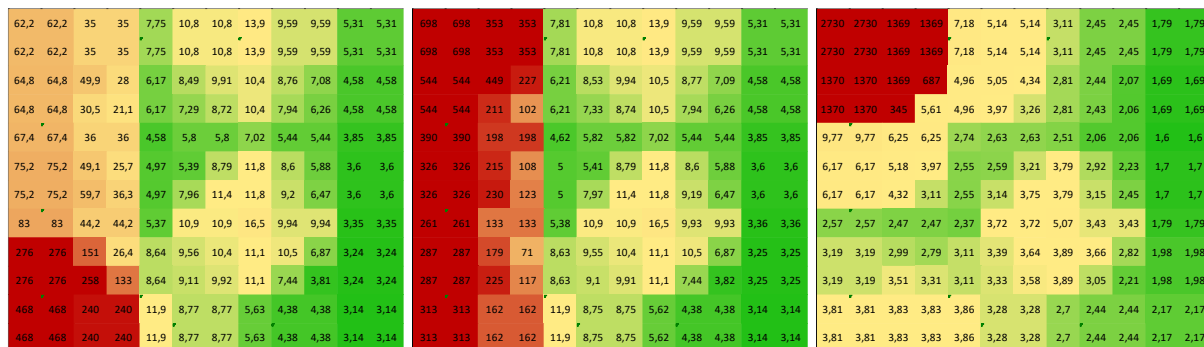
A térrácsra ható terhek a csomópontokban hatnak koncentrált erőként. Ezeket a koncentrált erőket a rudak egyenletesen elosztják, így az igénybevétel eloszlása a rácsnak sima, nincsenek benne szingularitások. Ezzel szemben a kontinuumra helyezett koncentrált erők igénybevételcsúcsokat okoznának a támadási pontok körül, így érdemes a koncentrált erőket egyenletesen eloszló erőként szétkenni a kontinuum felületén. Ez a megoldás a 5. fejezetben tárgyalt problémát okozza, hogy míg a térrács modellben a rudakban nem változnak az igénybevételek a hosszuk mentén, addig a kontinuumban folyamatosan változnak az igénybevételek.

A térrács lehet pontszerűen vagy vonalszerűen megtámasztva, de minden esetben a csomópontokban elhelyezett pontszerű támaszokból áll a támaszrendszer. Ezzel szemben a kontinuum szerkezeteknél a koncentrált támaszok szingularitásokat okoznának az igénybevételekben, így érdemes a pontszerű támaszok sorozatát vonal menti támaszokkal helyettesíteni.

Külön említést érdemel a vonal menti támaszok peremfeltételei. Míg a térrácsnál pontszerű csuklós támaszokat használtunk (0 elfordulási merevség, nagy elmozdulási merevség), addig az ilyen (0 elfordulási merevségű) vonal menti támasz (kemény peremfeltétel) nagy eltéréseket eredményez a valós megoldástól (**3. ábra**). Ezek az eltérések abból adódnak, hogy a rács nem tud a megtámasztás síkjára merőlegesen alak változni a saját hajlítási merevsége miatt. Így olyan vonal menti támaszt érdemes használni, mely gátolja a támasz síkjára merőleges elfordulásokat is (lágy peremfeltétel). A kapott eltérések a peremek környéknyékén kívül nem változnak, viszont befogott peremekkel az eltérések a rács teljes felületén nagyban javulnak (**4. ábra**). Ez annak tulajdonítható, hogy a rács modellünkben mindkét támaszunkat csuklósnak feltételeztük, az így kialakuló nagy normálerők összefeszítik a szerkezetet, ami így közelebb áll egy befogott, mint egy csuklós támaszhoz.

A térrács ily módon való beszorulásából az következik, hogy az a felső öv átboltozódik, és az alsó öv pedig nagyon megfeszül, így az alsó övben sokkal nagyobb igénybevételek jönnének létre, mint amit a modellünk megjósol. A módszer során azt tételezzük fel, hogy hajlítás hatására a két öv merevségének arányában osztozik az erőkön, azaz a mi esetünkben

ugyanolyan merev öveknél az igénybevételeknek (nyírásból származó igénybevételek elhanyagolásával) egyenlőnek adódnak a módszerrel.



Balra: lágú peremfeltétel, Középen: kemény peremfeltétel, Jobbra: Befogott perem

4. **ábra:** Eltérések eloszlása a térrács bal felső negyedében csuklós támaszokkal

Egyik oldalt görgős támaszt felvéve (5. **ábra**) befogott peremű rácsnál nagy eltéréseket kapunk mind a támasz közelében, mind mezőközépen. A kemény peremfeltétel esetén, mezőközépen jó értékek adódnak, de a peremek környezetében nagyok az eltérések. A lágú peremfeltétel bizonyul a legjobbnak, mezőközépen másfélszeres, a peremek mentén ötszörös eltérésekkel.



Balra: lágú peremfeltétel, Középen: kemény peremfeltétel, Jobbra: Befogott perem

5. **ábra:** Eltérések eloszlása a térrács bal felső negyedében csuklós és görgős támaszal

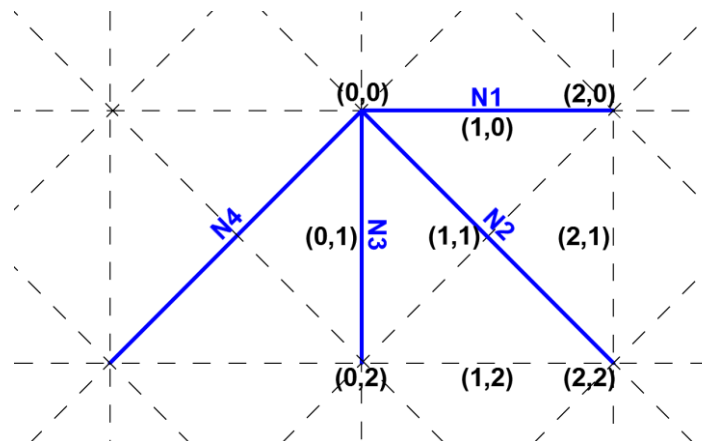
További eltérést vehető észre a kontinuum és a rács igénybevételek között olyan helyeken ahol a vonal menti támasz megszakad, azaz véges merev támaszból hirtelen végtelenül nem merev támaszba vált a perem. A kontinuum modell esetén itt egy szingularitás jön létre a csavaró nyomatékban, így a kontinuumból kapott rúdelekben is, ezzel szemben a rácsnál semmi ilyen nem figyelhető meg. Mivel a rács igénybevételei nem ugrásszerűen változnak, így szimplán figyelmen kívül kell venni a szingularitást, és egyenletesen változó igénybevételt kell figyelembe venni a rúdelek meghatározásakor.

Az eddig legjobbnak bizonyult megtámasztási rendszerben tökéletesen merev elmozdulási merevségű támaszokat ( $10^{10}$  kN/m/m) vettünk fel, illetve az elfordulási merevséget is nagyon merevre vettük fel ( $10^{10}$  kNm/rad/m). A rácsmodellünk azért nem tud a megtámasztás vonalára merőlegesen elfordulni, mert a saját hajlítási merevsége nem engedi neki, így érdemes a támasz elfordulási merevséget a rács hajlítási merevségével egyenlőnek felvenni, hogy a perem közelében a legjobb értékeket kapjuk meg.

## 5. Felvételi pont helye

Egy térrács egységcelláján olyan rudak és csomópontok összességét értjük, melyben minden különböző elemből megtalálható egy darab. Más szóval a térrács elemeinek olyan legkisebb halmaza, mely rendelkezik az egész térrács tulajdonságaival. A 3. fejezetben bemutatott térrács egységcellájában 4-4 db rúd van a két övben és 4 db összekötő rácsrúd.

Ha a rács geometriai és anyagtulajdonságaiból meghatároztuk a helyettesítő kontinuumot és az ebből kapott igénybevétel eloszlásokat megkaptuk, a kontinuum egy pontjából vett fajlagos igénybevételekkel lehet számolni rúderőket a rácsra. Míg egy egységcellán belül a kontinuum igénybevételek változnak, addig a rúderők konstansok a rúd mentén, így felmerül a kérdés, hogy az egységcellán belül mely pontbeli kontinuum igénybevételekkel érdemes kiszámítani a rúderőket. Az egységcellán belüli változás kifejezetten problematikus azokban a zónákban, ahol a kontinuum előjelet vált, illetve olyan zónákban, ahol gyorsan változik az igénybevétel. A **6. ábrán** látható egy a 3. pontban bemutatott példából kiragadott egységcella a térrács egy általános helyén.



6. ábra: Egységcella indexei

Az egységcellába az egyik övben 4 rúd tartozik, amelyekben N1, N2, N3 és N4 erő keletkezik a teher hatására. Az egységcella 9 kitüntetett pontját, ahol vizsgáljuk a fajlagos igénybevételekkel  $(i,j)$  koordinátával jelöljük. Azt keressük, hogy az egyes rúderőkre mely pontbeli fajlagos kontinuum igénybevételből kapjuk a legpontosabb eredményt.

A táblázatban a kontinuumból kapott és a valós rúderők arányát tüntetjük fel:

	N1	N2	N3	N4	eltérés:
0,0	1,13	1,29	3,25	1,29	74 %
1,0	1,04	1,16	3,43	1,21	71 %
2,0	1,32	1,24	4,05	1,11	93 %
0,1	1,13	1,31	4,4	1,31	103,8 %
1,1	1,03	1,19	4,63	1,21	101,5 %
2,1	1,33	1,19	5,43	1,13	127 %
0,2	1,12	1,31	4,95	1,31	117,3 %
1,2	1,03	1,2	5,2	1,2	115,8 %
2,2	1,33	1,15	6,11	1,15	143,5 %
átlag:	1,16	1,23	4,61	1,21	105,21 %
minimum:	1,03	1,15	3,25	1,11	
legjobb hely:	1,1	2,2	0,0	2,0	63,5 %

**1. táblázat:** módszerből kapott és a valós rúderők aránya

Jól látható, hogy a felvételi hely függvényében a kapott értékek nagyban változnak. Az táblázatból látható, hogy jól felvett felvételi pontokkal a kontinuum és a valós igénybevételek eltérése akár 63%-ra levihető. A legjobb pontok kiválasztásához, 9 pontban kéne meghatározni az igénybevételeket az eddigi 4 sarokpontban történő felvétel helyett. Ez nagyban növelné a számítási munkát, így nem ajánlott. Így érdekesebb az egységcella 4 sarokpontjában fellépő igénybevételeket átlagolni, és ezzel az átlagos értékkel számolni. Nézzük meg ez mennyire ad pontos értéket:

Egy rúd az egységcellán belül található kontinuum igénybevételek összegét veszi fel, így mivel az algoritmusunkban konstans értékkel kell számolni, érdemes meghatározni egy konstans átlagos értéket, melynek integrálja megegyezik a „valós”, változó kontinuum igénybevételekével. A merevségi mátrix felállítása során a következő feltételezéseket tettük:

- N1: 0°-al felfordított övrúd, az x irányú nyomatékból származó igénybevételeket veszi fel.
- N2: 45°-al elfordított övrúd, mind x mind y irányú hajlító és a csavaró nyomatékokból származó igénybevételeket is felvesz.
- N3: 90°-al elfordított övrúd, az y irányú nyomatékból származó igénybevételeket veszi fel.
- N4: 135°-al elfordított övrúd, mind x mind y irányú hajlító és a csavaró nyomatékokból származó igénybevételeket is felvesz.

Vizsgáljuk a rács közepén található egységcellát, ahol nincs csavaró nyomaték, így csak az x és y irányú hajlító nyomatékoktól függ a kapott igénybevétel a módszerből. Határozzuk meg az egységcella négy sarokpontjában az igénybevételeket ( $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$ ) és átlagoljuk el az értékeiket.

Rúd	N1	N2	N3	N4
Módszerből erő	-227,8 kN	-76,13 kN	20,3 kN	-76,13 kN
Valós erő	-234,44 kN	-68 kN	54,894 kN	-68 kN
Arány	1,03	1,12	2,69	1,12
<b>Átlagos eltérés:</b>	<b>1,49</b>			

2. táblázat: Átlagos igénybevételekből számolt rúderők és eltéréseik a valós igénybevételektől

A 2. táblázatból jól látható, hogy sokkal pontosabb értékeket kaptunk az átlagos igénybevételekkel, mint bármelyik önkényesen felvett ponttal az egységcellából. Nézzük meg, hogy változnak a valós rúderőktől való eltérések az egyes rudakban, ha megváltoztatjuk a nyomatékok értékét az átlagos nyomatékoktól. A diagram vízszintes tengelye az  $m_x$  nyomatéktól való eltérést, a függőleges tengely az  $m_y$ -től való elérést mutatja kNm-ben. A diagram értékei a valós rúderőktől való eltéréseket mutatja.

N1						N2					
	-10	-5	0	5	10		-10	-5	0	5	10
-10	1,107	1	1,119	1,271	1,47	-10	1,483	1,397	1,31	1,224	1,137
-5	1,142	1,036	1,076	1,216	1,397	-5	1,397	1,31	1,224	1,137	1,05
0	1,178	1,071	1,037	1,166	1,331	0	1,31	1,224	1,137	1,05	1,038
5	1,213	1,107	1	1,119	1,271	5	1,224	1,137	1,05	1,038	1,14
10	1,249	1,142	1,036	1,076	1,216	10	1,137	1,05	1,038	1,14	1,265

N3						N4					
	-10	-5	0	5	10		-10	-5	0	5	10
-10	2,116	1,602	1,289	1,078	1,08	-10	1,483	1,397	1,31	1,224	1,137
-5	58,641	5,923	3,119	2,117	1,602	-5	1,397	1,31	1,224	1,137	1,05
0	2,281	3,489	2,69	58,945	5,926	0	1,31	1,224	1,137	1,05	1,038
5	1,119	1,348	1,694	2,281	3,488	5	1,224	1,137	1,05	1,038	1,14
10	1,349	1,197	1,046	1,119	1,347	10	1,137	1,05	1,038	1,14	1,265

7. ábra: Eltérések eloszlása a hajlító nyomatékok változtatásának hatására

A 7. ábrán jól látható, hogy a feltételezésünk kvázi jó volt. N1 rúderő  $m_x$  hajlító nyomaték értékétől függ főleg, mivel  $m_y$  változásának hatására nem változik az értéke. N3 rúderő főleg az  $m_y$  től és N2, N4 rúderők  $m_x$  és  $m_y$  től is függ. Az is látszik, hogy N3-on kívül a másik három diagram a (0,0) pont közelében, azaz a számított átlagos igénybevételeknél veszi fel minimumát. N3 eltérése abból következtethető, hogy ebben az irányban nem mértékadó az x irányú hajlítás, így az elhanyagolt igénybevételek (nyírás, haránt kontrakció) belezavarnak.

## 6. Statikai határozottság/ határozatlanság

Ahhoz, hogy megkapjuk a helyettesítő kontinuum tulajdonságait, meg kell határoznunk a rács merevségeit. Ezt a rudak anyagtulajdonságaiból és irányszögeiből határozhatjuk meg. A merevségek számítása közben egyszer se vesszük figyelembe, hogy az egységcella statikailag határozott vagy határozatlan-e. Ez egy jelentős ellentmondást szül a rács és a kontinuum modell között.

Ha a rácsunk statikailag határozatlan, akkor az övrudak merevségeinek függvényében változnak az igénybevételek, viszont a merevségek változtatása nem változtatja meg a helyettesítő kontinuum igénybevételeit, így a módszerből kapott rúderők nem változnak. Így azt tapasztalhatjuk, hogy a valós, merevségektől függő rúderőkre a módszerből a merevségektől független értékeket kapunk. Kérdés, hogy határozatlan rácsoknál milyen merevségeloszlásra kapjuk a legjobb megoldást. További problémát okoz, hogy habár statikailag határozott rácsoknál a merevségváltoztatás hatására nem változnak a rúderők, de kérdés, hogy ez pontosabb eredményt ad-e.

Ha összehasonlítjuk egy „x” és egy  $10 \times x$  merevségű övű rács igénybevételeit, ahol „x” egy reális szelvényekből összerakott rácsot jelöl. Azt tapasztaljuk, hogy a rúderők egyes tartományokban, nagyban, máshol kevésbé különböznek a két esetben. Az **8. ábrán** látható az eltérések eloszlása. Látható, hogy az eltérések 10 és 40% között ingadoznak. A minta, amit kaptunk nagyon hasonlít a 2. es fejezetben bemutatott példában kapott eltérések eloszlására, így sejthető hogy ennek a jelenségnek a hatása is közrejátszott a nagy eltérésekben.

1,3	1,3625	3,635	1,0925	1,0925	3,635	1,3625	1,3
1,21	1,3425	1,4	1,12	1,12	1,4	1,3425	1,21
1,1925	1,2475	1,3775	1,175	1,175	1,3775	1,2475	1,1925
1,2025	1,4375	1,16	1,2125	1,2125	1,16	1,4375	1,2025
1,2025	1,4375	1,16	1,2125	1,2125	1,16	1,4375	1,2025
1,1925	1,2475	1,3775	1,175	1,175	1,3775	1,2475	1,1925
1,21	1,3425	1,4	1,12	1,12	1,4	1,3425	1,21
1,3	1,3625	3,635	1,0925	1,0925	3,635	1,3625	1,3

**8. ábra:** Eltérő merevségű rácsok igénybevételeinek aránya

Ha kiszámítjuk két statikailag határozatlan „x” illetve  $10 \times x$  merevségű rács igénybevételeit, majd meghatározzuk az eredmények az arányait a kontinuumból kapott igénybevételekkel (amelyek függetlenül a merevségtől egyenlőek). Azt kapjuk, hogy az arányok akár 18-20% al eltérhetnek egymástól. Ha az eltérések eloszlását nézzük, akkor azt figyelhetjük meg, hogy egyes helyeken az „x”, máshol a  $10 \times x$  merevségű rács igénybevételeire ad jobb közelítés a kontinuum. Ebből arra lehet következtetni, hogy a kontinuum valamilyen igénybevételre túl merev, másmilyenre túl „puha” (9. ábra).

K	K	K	J	J	K	K	K
K	K	K	J	J	K	K	K
P	P	P	J	J	P	P	P
P	P	P	J	J	P	P	P
P	P	P	J	J	P	P	P
P	P	P	J	J	P	P	P
K	K	K	J	J	K	K	K
K	K	K	J	J	K	K	K

K: kemény, P: puha, J: jó

9. ábra: Statikai határozatlanságból származó eltérések

Azt kaptuk a kísérletekből, hogy a szabadperem közelében a merevségeket túlbecsüli, így a merevebb rács ad, általános részen, de nem szimmetria tengelyben alábecsüli, így a puhább rács ad jobb közelítést. Szimmetriatengelyen fekvő egységcelláknál ugyanakkora eltéréseket kapunk a két rács igénybevételei és a kontinuum között. A szabad peremeken való túlbecsülést azt okozhatja, hogy a térrács peremén nyúlásmentes alakváltozások jöhetnek létre, amit semmi nem gátol, így gyengébben viselkedik, mint belső mezőkön.

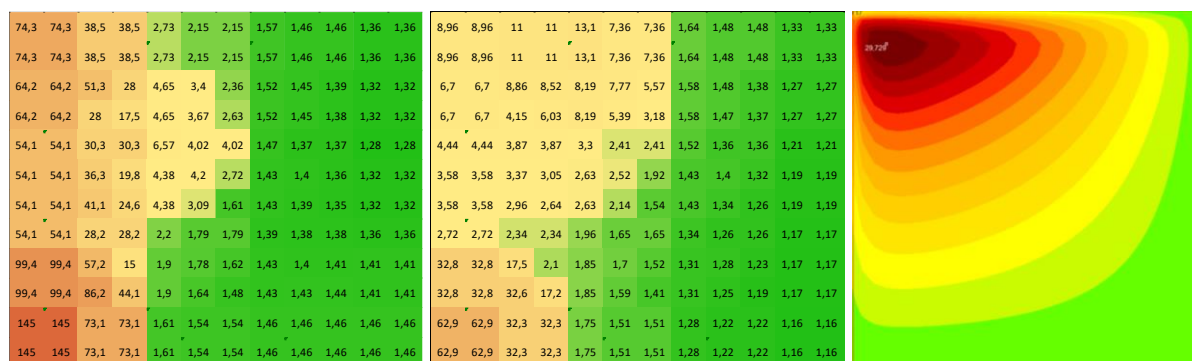
Ha az övrudakat vizsgáljuk, akkor azt kapjuk, hogy azok az övrudak melyek a fő teherhordási irányba mutatnak (ebben az esetben x irányú hajlító nyomaték irány) a módszer túlbecsüli az értéküket, a nem fő teherhordási irányba mutató övrudakat alábecsüli a módszer.

Összességében a statikai határozatlanságból származó eltérések 10-20% körüli eltéréseket okoznak az igénybevételekben, ami hatására peremek mentén általában kisebb, támasz közelében nagyobb igénybevételeket okoz, mint a valós rácsban létrejövők.



## 7. Övek helyzete egymáshoz képest

Térrácsok kialakíthatóak sok féle módon: különböző övszámokkal, övrácsozással és az övek egymáshoz viszonyított helyzete is változhat. Az övek lehetnek egymás fölött, illetve lehetnek eltolva egymáshoz képest (általában fél egységcellát mindkét irányban). Az eltolt esetben olyan „csövek” jönnek létre az öveket összekötő rácsozásból, ami mértékadó csavarási merevséget ad a térrácsnak, ezzel szemben az egymás fölötti övek esetén sík rácsozásból áll a térrács, és csavarási merevsége töredéke az előbbinek. A mi kontinuum modellünk követi a Hooke törvényt, így a csavarási merevséget egyértelműen meghatározza a hajlítási merevség. Így az öveltolásból származó további csavarási merevséget nem tudjuk figyelembe venni. A kérdés, hogy a kontinuumból meghatározott csavarási merevség az eltolt vagy a nem eltolt övű rács csavarási merevségéhez áll közelebb. Az **10. ábrán** a 3. pontban ismertetett példa térrácsának analíziséből kapott eredmények láthatóak (a rács bal felső negyede). A kontinuum modellünkben jól látható, hogy a lemezsarok közelében nagy csavaró nyomatékok lépnek fel, viszont a kontinuum többi részén jóval kisebbek, illetve lassabban változik a csavaró nyomaték. A eltolt övű rácsnál rosszabb eredményeket kapunk, mint a nem eltolt övűnél. Ez annak tudható be, hogy a kontinuum csavarási merevsége közelebb áll a nem eltolt övű esetéhez, mint az eltolt övűéhez. A használt kontinuum modellnek izotróp anyagmodell feltételeztünk, azaz a rugalmassági modulus és a Poisson tényező egyértelműen meghatározta a csavarási merevséget szabályozó nyírási rugalmassági modulus. Az eredményekből az látható, hogy az izotróp anyagmodellből kapott értékek a csavarási merevségre kisebbek, mint az eltolt övű rács tényleges csavarási merevsége. Míg a sarok közelében nagy különbségeket kapunk a két fajta rács igénybevétel eloszlása között, addig a belső mezőben az eltérés minimális.



Balra: Eltolt övű      Középen: Nem eltoló övű      Jobbra: Kontinuum csavaró nyom. ( $m_{xy}$ )

**10. ábra:** Különböző helyzetű térrácsok analízisében kapott eltérések a térrács bal felső negyedében

A nem eltolt övű rács esetén elmondható, hogy a kontinuum egész jól modellezi az igénybevétel eloszlást, mind a szabad peremen mentén mind belső mezőkön erre kaptuk a jobb értékeket. Eltolt övű térrács esetén ki kell küszöbölni a csavarási merevség problémáját. Ha áttérünk általános hajlító merevségű lemezmodellre és a csavarási merevséget összehangoljuk a ráccsával, akkor az eltérések csökkenthetők (**11. ábra**).

3,47	3,47	3,09	3,09	2,72	2,14	2,14	1,57	1,46	1,46	1,36
3,47	3,47	3,09	3,09	2,72	2,14	2,14	1,57	1,46	1,46	1,36
3,48	3,48	3,29	3,97	4,65	3,4	2,35	1,52	1,45	1,39	1,32
3,48	3,48	3,34	4,84	4,65	3,67	2,63	1,52	1,44	1,38	1,32
3,5	3,5	5,04	5,04	6,58	4,02	4,02	1,47	1,37	1,37	1,27
3,47	3,47	3,99	4,29	4,38	4,2	2,72	1,43	1,4	1,36	1,31
3,47	3,47	3,14	3,45	4,38	3,09	1,61	1,43	1,39	1,35	1,31
3,44	3,44	2,81	2,81	2,19	1,79	1,79	1,39	1,37	1,37	1,35
8,73	8,73	5,54	2,35	1,89	1,77	1,61	1,42	1,39	1,4	1,4
8,73	8,73	8,26	5,08	1,89	1,63	1,47	1,42	1,42	1,43	1,4
14	14	7,8	7,8	1,6	1,52	1,52	1,45	1,45	1,45	1,45
14	14	7,8	7,8	1,6	1,52	1,52	1,45	1,45	1,45	1,45

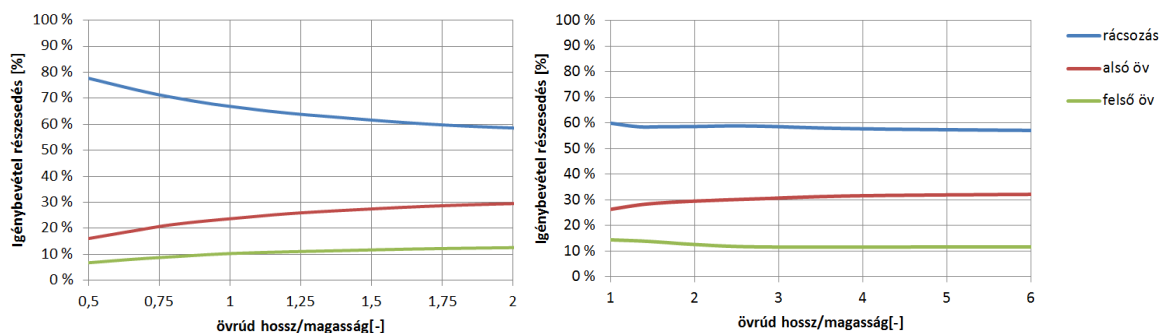
**11. ábra:** Eltérések eloszlása a nyírási rugalmassági modulus növelésével a rács bal felső negyedében

## 8. Rácsozás hatása

A kontinuum módszerben azzal a feltételezéssel élünk, hogy a nyíróerőket az öveket összekötő rácsozás veszi fel, míg a hajlító/ csavaró nyomatékokat az övek. Ha a rácsra tiszta hajlítás hat, akkor ez a feltételezés analitikusan és numerikusan is igazolható, és az igénybevétel eloszlás a következő:

Rúd:	Alsó öv	Felső öv	Rácsozás
Eloszlás	50%	50%	0%

Ezzel szemben, ha a rács nyírásra van igénybe véve, akkor az igénybevétel eloszlás már nem tükrözi teljesen a feltételezésünket, mivel nyírás hatására az övekben is létrejön igénybevétel. Az övek és rácsrudak részesedésének aránya függ a merevségeiknek arányától, de a hatás minimális, és reális szelvény felvétel mellett elhanyagolható. A rács magasságának változtatásától ugyancsak változik az igénybevétel eloszlás. Ez a hatás az összekötő rácsrudak vízszintessel bezárt szögétől, azaz az övrudak hosszának és a rács magasságának arányától. Ha a rács magassága kisebb, mint az övrudak hossza, akkor az igénybevétel részesedés konstansnak feltételezhető. Ezzel szemben, magas rácsoknál, ahol a magasság meghaladja az övrudak hosszát, az igénybevétel eloszlás tart a feltételezett esethez, ahol minden nyíróerőt az összekötő rácsozás vesz fel (**12. ábra**).



**12. ábra:** Igénybevétel részesedés a magasság függvényében

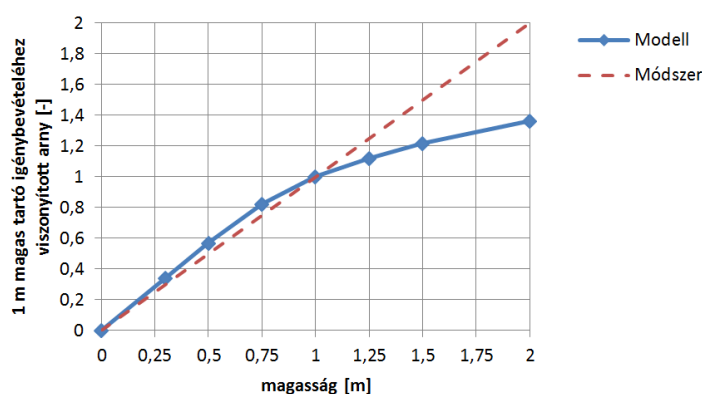
Ezen két közelítést figyelembe véve, 2×2 méteres 2 diagonálisú 1 méter magas rács igénybevétel eloszlása nyírásra a következőre adódik:

Rúd:	Alsó öv	Felső öv	Rácsozás
Eloszlás	30%	11%	59%

Ez az arány megfigyelhető a rács globális modelljén is. Az övrúd erők különbsége arányosan nő a nyíróerő növekedésével, és az alsó övben van mindig nagyobb erő.

Mivel a térrács egy diszkrét, lineáris rendszert alkot, így a két igénybevétel eloszlás lineárisan összegezhető.

Habár az igénybevétel eloszlás nem változik a magasság változtatásával, de az igénybevételek értéke igen. A kontinuum módszer algoritmusában az övekben ébredő membránereket a nyomatékokból a  $n = \frac{m}{h}$  lineáris egyenletből kapjuk, ezzel szemben a numerikus számítások szerint a változás nem lineáris (**13. ábra**). Azért nem lineáris a görbe, mert ez figyelembe veszi a nyíróerők alakulását is, és mivel magas rácsoknál alig alakul ki erő az övekben nyíróerő hatására, így ezen a szakaszon nem nő lineárisan az övek igénybevétele a magasság függvényében. Laposabb rácsoknál jól közelíti a görbe az egyenest.



**13. ábra:** Igénybevételek változása a magasság függvényében

Az **13. ábrán** látható függvény meghatározza, hogy a különböző magasságú rácsokban képződő igénybevételek hogy aránylanak egymáshoz. Mivel elhanyagoljuk a haránt irányú hatásokat, így érdemes megnézni, hogy milyen vastagságú kontinuum viselkedik leginkább hasonlóan a rácséhoz, majd a diagramból meghatározott szorzóval megszorozva megkaphatók a rúd erők.

A számításokból azt kaptuk, hogy minél inkább megegyezik a rács magasságának és az övrudak hosszának értéke, annál pontosabb értékeket kapunk kisebb magasságú rácsokra a diagrammból kapott igénybevétel szorzóval a kapott értékeket beszorozva. Az ilyen arányú rács viselkedik leginkább hasonlóan a kontinuumhoz, és a számításokból kapott nem lineáris görbével való korrekciós taggal jobb közelítést lehet elérni, mintha rögtön a laposabb rács igénybevételeit akarnánk meghatározni a módszerrel.

## 9. Haránt kontrakció

---

A térrácsok általában sokkal magasabbak, mint a mérnöki gyakorlatban használt tömör lemezek, így a lemezeknél elhanyagolható haránt irányú alakváltozások a rácsoknál nem hanyagolható el. Tovább bonyolítja a problémát, hogy a tömör lemezekkel ellentétben, ahol húzásra a lemez vékonyodik, nyomásra meg vastagodik, azaz a szerkezet térfogattartó, addig a térrácsoknál a rácshálózat kialakításától függően nyomásra akár vastagodhat is, illetve periodikus vastagodás-vékonyodások is kialakulhatnak benne.

Véges-elem programból numerikusan kiszámíthatjuk a rács merevségeit, és ezúton a haránt kontrakciós tényezőit. Ezzel részletesebben a 10. fejezet foglalkozik.

A lemezzel párhuzamos síkban numerikusan  $\nu=0,338$  jön ki. A modellünkben az  $\nu=0,333$  Poisson tényezőt vettünk figyelembe, mely értéket analitikusan határoztuk meg. A két érték közötti eltérés csekély, így azt mondhatjuk, hogy a két nyomaték egymásra hatásának szempontjából a kontinuum modellünk jól közelíti a rácsot.

A térrács síkjára merőleges haránt kontrahálás esetére azt kapjuk, hogy a Poisson tényező 1-nél nagyobbra adódik. Az övek saját síkjukban sokkal merevebbek, mint a rácsozás az övek síkjára merőlegesen, így nagy alakváltozások jönnek létre ebben az irányban. A térrács síkjára merőleges alakváltozásokat a modellünkben elhanyagoltuk és csak sokkal bonyolultabb kontinuum modell segítségével lehetne figyelembe venni őket, amely annyira megbonyolítaná a algoritmust, hogy figyelembe vételével elvesztenénk a kontinuum módszer előnyeit. Így ezt a hatást elhanyagoljuk.

## 10. Rácsmerevségek

Érdeemes megvizsgálni a kontinuum modell és a rácsmodell közötti merevség különbségeket. Ez legkönnyebben véges-elem módszerrel lehetséges, úgy hogy megvizsgáljuk a térrács egy egységcellájának különböző igénybevételekre adott elmozdulásait, és ebből számoljuk a merevségeit. Így meghatározhatóak a „majdnem” pontos merevségi tulajdonságai a rácsnak. A végelem program által használt Mindlin-Reisner lemez hajlítási merevségi mátrixa a következő<sup>[3]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & -\nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Gh^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Gh}{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Gh}{1,2} \end{bmatrix}$$

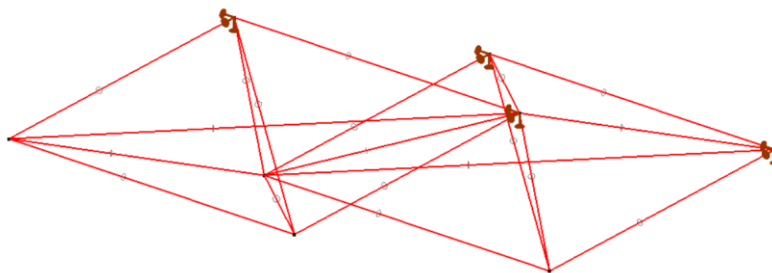
Ebből kiszámítva, ha a 3. fejezetben bemutatott térrács normál és hajlítási merevségét is megfeleltetjük a kontinuuméval, akkor a következő értékeket kapjuk:

Rács tulajdonságok:  $h=300 \text{ mm}$ ,  $E=210 \text{ N/mm}^2$

$h=t'=520 \text{ mm}$ ,  $E=707,47 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu=0,333$ ,  $G=265,35 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} 9,3 \cdot 10^3 \text{ kNm} & -3,1 \cdot 10^3 \text{ kNm} & 0 & 0 & 0 \\ -3,1 \cdot 10^3 \text{ kNm} & 9,3 \cdot 10^3 \text{ kNm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,1 \cdot 10^3 \text{ kNm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,15 \cdot 10^5 \text{ kN/m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,15 \cdot 10^5 \text{ kN/m} \end{bmatrix}$$

Véges-elem módszerben felvett egységcella elmozdulásait mérve adott terhelésre megkapjuk a numerikusan számított merevségeket (**14. ábra**). Egységcella méretei:  $h=300 \text{ mm}$ ,  $a=b=3,00 \text{ m}$



**14. ábra:** Numerikus merevségek számításához használt egységcella

Húzás: Erő irányú elmozdulás 100kN hatására.

$$\Delta l = 0,445 \text{ mm} \rightarrow \epsilon = \frac{0,445}{3000} = 0,0001483 \rightarrow E = \frac{100}{0,0001483 * 10^3} = 674,31 \text{ N/mm}^2$$

Azaz a rács húzásra valójában kicsit puhábban viselkedik, mint azt a modellben mi figyelembe vettük. Ez annak is betudható, hogy az egységcellát nem merevíti a körülötte lévő rácsozás. Ahogy a 6. fejezetben láttuk peremeken gyengébben viselkedik a rácsmodell, mint ahogy mi figyelembe vettük.

Hajlítás: Elfordulás 50kNm hajlítás hatására:

$$\Delta\varphi = \tan\left(\frac{0,036}{3}\right) = 0,012 \rightarrow \kappa = \frac{\Delta\varphi}{dx} = \frac{0,012}{3} = 4 * 10^{-3} \rightarrow G_{11} = \frac{50}{4 * 10^{-3}} = 1,25 * 10^4$$

Haránt kontrakció:

$$e_{\text{erő irányú}} = 0,018 \text{ mm} \quad e_{\text{erőre merőleges}} = 0,007 \text{ mm}$$

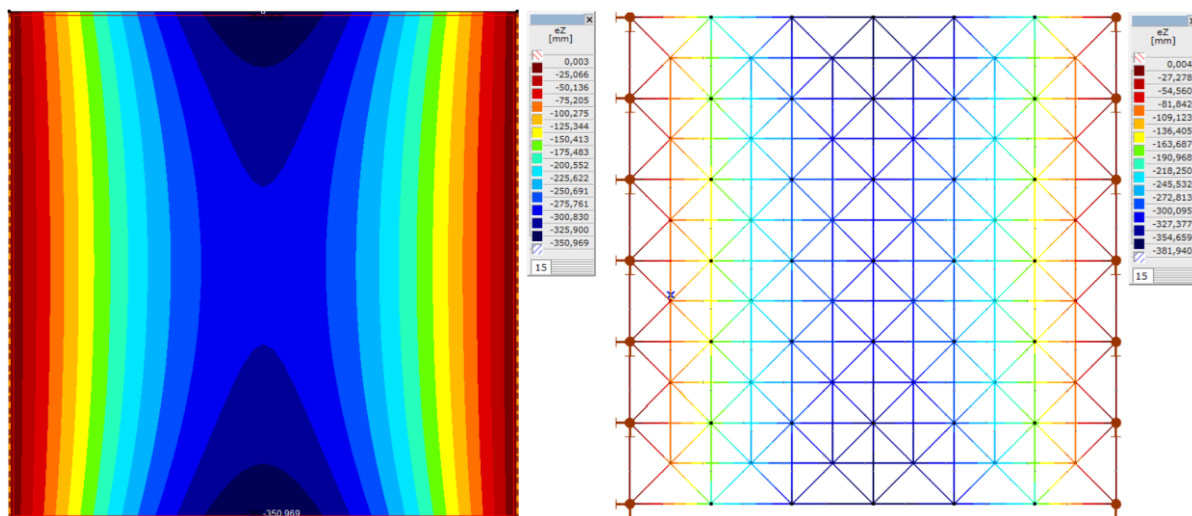
$$\nu = \frac{e_{\text{erőre merőleges}}}{e_{\text{erő irányú}}} = \frac{0,007}{0,018} = 0,388$$

$$G_{12} = 1,25 * 10^4 * 0,388 = 4,85 * 10^3 \text{ kNm}$$

Visszaszámítva a rugalmassági moduluszt:

$$E = \frac{1,25 * 10^4 * 12(1 - 0,388^2)}{520^3} = 906,2 \text{ N/mm}^2$$

A numerikusan számolt hajlítási merevség kicsit nagyobb, mint a kontinuumnál figyelembe vett érték. A Poisson tényező jó közelítéssel 1/3. Végeredményben a rugalmassági modulus nagyobbra adódik, mint a kontinuumnál használt. Ez megmutatkozik a lehajlási értékeken is, a kontinuum kevésbé hajlik le, mint a rács (**15. ábra**).



Balra: Kontinuum      Jobbra: Rácsmodell  
**15. ábra:** Kontinuum és rácsmodell lehajlásai

Nyírás: Szögtorzulás 300kN hatására:

$$e_z = 85,67\text{mm} \rightarrow \gamma = \frac{85,67}{3000} = 0,0285 \rightarrow G_{44} = \frac{300}{0,0285} = 1,05 * 10^5 \text{kN/m}$$

A nyírási merevség közelítőleg ugyanannyi, mint a számításokban figyelembe vett érték, így az is kimondható, hogy nyírásra a nyírási rugalmassági modulus megegyezik a módszerből számolt értékkel.

Megemlítendő, hogy a kapott érték csak akkor igaz, ha az összekötő rácsozás merevsége megegyezik az övrudak merevségével. Kisebb szelvényű rácsozás esetén kisebb, nagyobb esetén nagyobb lesz (**3. táblázat**).

	2	1	0,5
Nyírási merevség	$7 * 10^4$	$1,05 * 10^5$	$1,25 * 10^5$
Nyírási rugalmassági modulus	164,7 N/mm <sup>2</sup>	242 N/mm <sup>2</sup>	288,46N/mm <sup>2</sup>

**3. táblázat:** Nyírási merevség az övrudak/rácsrudak merevségének függvényében

Csavarás: Elfordulás 100kNm csavarónyomaték hatására:

$$\varphi = 0,0485 \rightarrow \theta = \frac{0,0485}{300} = 0,00016 \rightarrow G_{33} = \frac{100}{0,00016} = 6,185 * 10^3 \text{kNm}$$

A csavarási merevség értéke csaknem kétszeres a modellben számításba vett értéknek. Ekkora csavarási merevséggel visszszámolva a nyírási rugalmassági modulusra  $G=527,85 \text{ N/mm}^2$  értéket kapjuk. Az a furcsa helyzet állt fel, hogy míg nyírásra a G értéke megegyezett a modellel addig csavarásra ennek a kétszeresét kaptuk. Ez az ellentmondás megfigyelhető más rácstípusoknál is. A jelenség analitikusan is meghatározható<sup>[4]</sup>. Erre a merevségkülönbségre a 7. fejezetben is láthattunk példát. Továbbá csavarásnál is függ a kapott merevség a rácsrudak merevségétől, így ez az érték is csak az övrudakkal megegyező merevségű rácsrúdú térrácsra igaz.

Végezetül a numerikusan számított merevségi mátrix a következőre adódik:

$$\begin{bmatrix} 1,25 * 10^4 \text{kNm} & 4,85 * 10^3 \text{kNm} & 0 & 0 & 0 \\ 4,85 * 10^3 \text{kNm} & 1,25 * 10^4 \text{kNm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,18 * 10^3 \text{kNm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,05 * 10^5 \text{kN/m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,05 * 10^5 \text{kN/m} \end{bmatrix}$$



## 11. Konklúzió

A dolgozat során végesem-módszer segítségével vizsgáltam a kontinuum módszer során felmerülő problémákat, pontatlanságokat. Egy olyan algoritmust akartam létrehozni, mely megőrzi a módszer előnyeit: egyszerű modell felvétele, átláthatóság, a kontinuumok elméletek használhatósága, de a mérnöki számításokhoz pontos eredményeket tud adni a térrács rúderőire. A dolgozat során a következő következtetésekre jutottam:

### 1. Kontinuum megtámasztása, terhei

A helyettesítő kontinuum megtámasztásainak helyes megválasztása nagyban befolyásolja a kapott eredményeket. A térrácsra ható koncentrált terheket szét kell kennünk a kontinuum felületén. A térrács koncentrált támaszait pedig vonalmentiekkel kell helyettesítenünk, úgy hogy figyelembe vesszük a rácsnak a támaszra merőleges hajlítási merevségét is a peremfeltételekben.

### 2. Felvételi pont kérdése

Nem elég a rúd erők meghatározásához a pontbeli fajlagos igénybevételek felvétele, hanem olyan átlagolt értékkel kell számolni, mely információt ad az igénybevételek egységcellán belüli változásáról is.

### 3. Statikai határozottság

A kontinuum modell nem tudja figyelembe venni a térrács statikai határozottságát/határozatlanságát, így ez a hatás a peremek közelében kisebb rúderőt eredményez, mint a valós, a támaszok közelében pedig nagyobb.

### 4. Övek helyzete

A térrács öveinek helyzetét is figyelembe kell venni az analízis során. Nem eltolt övű térrács esetén a kontinuum anyagmodelljében a csavarási merevség megfelel a Hooke- törvénynek, eltolt övű rács esetén a csavarási merevség ennél nagyobb értékű, és a rugalmassági modulus nem tudja meghatározni.

### 5. Rácsozás hatása

A összekötő rácsozás merevsége megváltoztatja a kapott igénybevételeket, de reális szelvényválasztásnál ez a változtatás konstans érték, ami a rácsozás fajtájától függ. Továbbá a nyírás többlet igénybevételt okoz a rácson, amit figyelembe lehet venni.

Összefoglalva remélem, a felvázolt iránypontok szerint végzett analízis nem vesz sokkal több időt igénybe, mint az 1. fejezetben vázolt, viszont a kapott eredményeink sokkal pontosabbak lesznek.

A dolgozatban alkalmazott számításokhoz az AxisVM véges-elem programot, illetve a mátrix egyenletek megoldásához Matlab-ot használtam.

### **Köszönetnyilvánítás**

---

A dolgozat megírásában nyújtott segítségét ezúton szeretném megköszönni konzulensemnek Dr. Sajtos Istvánnak.

### **Irodalomjegyzék**

---

- [1] Kollár Lajos, Hegedűs István: Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method, Akadémiai kiadó, Budapest, 1985
- [2] Manfred Bischo, Ekkehard Ramm: On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation, 1999
- [3] Bojtár Imre, Gáspár Zsolt: Végeselem módszer építőmérnököknek, Terc kiadó, Budapest, 2003
- [4] Wright, D.T.: Continuum analysis for double layer space frame shells, IABSE publications, 1966,