

Térbeli egyensúlyi osztályok rekonstruálása vetületekből

Mándoki Réka IV. évf.

mandokireka0@gmail.com

**Konzulens: Dr. Domokos Gábor,
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék**

domokos@iit.bme.hu

2015. október 25.

Tartalomjegyzék

1. Célkitűzés	4
2. Vizsgált geometria definíciója	4
3. A generikus egyensúlyi pontok meghatározása	5
3.1. A palást pontjainak vizsgálata	6
3.2. A síklapok pontjainak vizsgálata	8
4. Az élen lévő egyensúlyi helyzetek meghatározása	11
5. Egyensúlyi térképek vizsgálata	14
6. Gráfok	17
7. Eredmények összefoglalása	20
8. Felhasznált irodalom	21

Ábrák jegyzéke

1. Különböző hengerarányok a és b féltengelyek mellett	3
2. A vizsgált geometria szemléltetése	4
3. A palást és a lap kétváltozós távolságfüggvényeinek szemléltetése	8
4. A vizsgált felületek és az S-től ekvidisztáns pontok gömbjeinek érintési pontjai.	10
5. Az él egyensúlyainak megkeresése és osztályozása	11
6. Az ellipszislap és az ekvidisztáns pontok különböző helyzetei.	12
7. Az él egyensúlyi pontjainak és a találkozó felületek gradienseinek kapcsolata.	13
8. β - d egyensúlyi térképek különböző ellipszisztengely-arányoknál, rögzített α esetén.	14
9. A 8. ábra 2) térképének különböző egyensúlyi osztályokba tartozó hengerei.	15
10. A 2,2 osztály ritka gráfja	17
11. Példák a vizsgált egyensúlyi térkép gráfjaira	18
12. Generikus gradienshez tartozó gráfok	19
13. Degenerált gradienshez tartozó gráfok	20

Táblázatok jegyzéke

1. Az egyensúlyi osztályok szemléltetése hengervetületekkel.	16
--	----

Kivonat

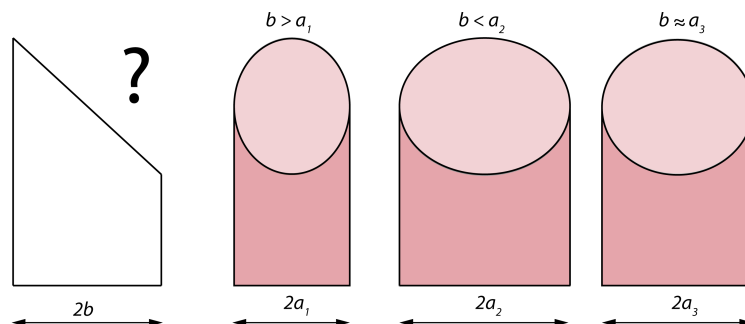
A 21. század során az információs szektor hihetetlen mértékű fejlődésével a képi adatfeldolgozás mikéntje is megváltozott. Ma már a 3D-s szkennelés sem jelent problémát, a geometriák könnyen olvashatóvá, modellezhetővé és egyszerűen megjeleníthetővé váltak. Ugyanakkor ezeknek az új technológiáknak az alkalmazására nem mindig van mód. Az űrkutatásban az információt a különböző szondák és műholdak a mai napig elsősorban adatsorok és fényképek formájában tudják szolgáltatni.

A Mars-felszín morfológiájának megértéséhez az ott megfigyelt kavicsok geometriája vihet közelebb. Nemzetközi kutatások vizsgálják a marsi kavicsok keletkezésének, forma-fejlődésének lehetséges módjait és ma már tudjuk, hogy az egyensúlyok száma lenne az egyik legfontosabb ezzel kapcsolatos információ [1]. Ugyanakkor a tudomány jelenlegi állása szerint pusztán a rendelkezésre álló vetületekből, jelen esetben a Curiosity marsjáró felvételeiből nem lehet egyértelműen megállapítani, hogy a kavics melyik egyensúlyi osztályba tartozik.

Dolgozatomban egy másik irányból közelítem meg a problémát: léteznek-e olyan speciális konvex testek, melyekről pusztán vetületük alapján eldönthető, hogy melyik egyensúlyi osztályhoz tartoznak; illetve ha léteznek, akkor miként lehetne ezeket a testeket egyszerűen konstruálni?

Jelen dolgozat egyrészt közelebb vihet az eredeti probléma megértéséhez, másrészt azt is illusztrálja majd, hogy a természeti formák jellemzésére jelenleg is hatékonyan alkalmazott egyensúlyi osztályokat hogyan lehet egyszerűen (vetületekkel) szemléltetni. Ezt a szemléltetést az egyensúlyi osztályok egyik rendkívül fontos részhalmazon fogom bemutatni: azon a részhalmazon, mely elmei az $S, U < 5$ összefüggéssel írhatóak le, vagyis mind a stabil, mind az instabil egyensúlyi helyzetek száma ötnél kevesebb. A vizsgált részhalmaz természettudományos jelentősége abban áll, hogy a parti kavicsok több, mint 98%-a ezen osztályok valamelyikébe tartozik [4].

Ezeket a példákat vizsgálva a dolgozat erősebben tud kapcsolódni a kurrens kutatásokhoz is, s bár nem tesz kísérletet a valódi, természetes kavicsformák bemutatására és dekódolására, matematikailag egyszerűen leírható geometriák segítségével szemléletesebbé teszi az osztályokat. A bemutatásra kerülő eredmények és ábrák egy saját készítésű, Wolfram Mathematicában írt programból származnak, mely program kódja ezen dolgozat mellékletét képezi.



1. ábra. Különböző hengerarányok a és b féltengelyek mellett

1. Célkitűzés

Jelen dolgozat célja kettős, egyrészt az egyensúlyi osztályok egyszerű térbeli geometriákkal történő szemléltetését választja feladatául, másrészt ezen geometriák esetében bemutatja, hogy elegendő csupán néhány jól megválasztott síkgörbén, azaz a vizsgált test néhány vetületén, egyváltozós függvényekkel keresni az egyensúlyi helyzeteket.

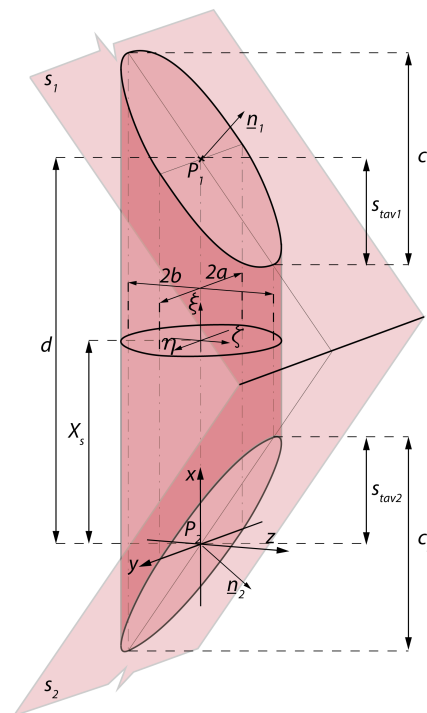
Geometriai szemlélet segítségével meghatározzuk, hogy mely síkgörbékre érdemes a távolságfüggvényt felírni az egyensúlyi helyzetek megkereséséhez, majd azt is belátjuk, hogy ez a legszűkebb görbe halmaz aminek a segítségével el lehet dönteni az egyensúlyi viszonyokat. Az egyensúlyi helyzeteket megkeressük analitikusan is, ellenőrizve ezzel a geometriai szemléletünk helyességét.

2. Vizsgált geometria definíciója

Adott egy x tengelyű,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \quad (1)$$

ellipszislap alapú henger, melyet elmetszünk két síkkal (s_i , ahol $i = 1, 2$). A síkok egy pontjukkal (P_i) és normálvektorukkal (n_i) adottak. Vizsgálat tárgyát képezik azok az esetek, melyekben $n_i \in xz$ és az s_i síkok a hengerpaláston kívül metszik egymást. A kezdeti geometriára nézve kikötés továbbá, hogy $c_1 > c_2$, és $c_1 + c_2 < 2d$.



2. ábra. A vizsgált geometria szemléltetése

Lemma 2.1 *A metszett hengerek térfogata meghatározható a*

$$V = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}}^{\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}} \int_{-\frac{C_1 z}{A_1}}^{\frac{A_2 d - C_2 z}{A_2}} 1 \, dx \, dz \, dy \quad (2)$$

integrál elvégzésével ahol a A_i, B_i, C_i rendre az adott s_i sík normálvektorának koordinátái. A súlypont koordinátái kiszámíthatóak

$$X_s = \frac{1}{V} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}}^{\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}} \int_{-\frac{C_1 z}{A_1}}^{\frac{A_2 d - C_2 z}{A_2}} x \, dx \, dz \, dy, \quad (3)$$

$$Y_s = \frac{1}{V} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}}^{\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}} \int_{-\frac{C_1 z}{A_1}}^{\frac{A_2 d - C_2 z}{A_2}} y \, dy \, dz \, dy \text{ valamint a} \quad (4)$$

$$Z_s = \frac{1}{V} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}}^{\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}} \int_{-\frac{C_1 z}{A_1}}^{\frac{A_2 d - C_2 z}{A_2}} z \, dx \, dz \, dy \quad (5)$$

integrálok kiértékelésével.

A lemma 2.1 elemi eszközökkel bizonyítható.

3. A generikus egyensúlyi pontok meghatározása

A palást és a metszeti ellipszisek határain belüli egyensúlyi pontok megkeresésére két különböző módszert közlünk, melyeket az alkalmazási lehetőségek miatt érdemes megkülönböztetnünk.

Első esetben geometriai szemlélet segítségével szűkítjük le a vizsgálatot síkgörbékre, melyeken egyváltozós analízis segítségével kereshetjük meg az egyensúlyi pontokat. Ezt vetületi módszernek nevezzük. A vetületi módszer jól modellezi a kavicsok egyensúlyvizsgálatát, amikor az egyensúlyi osztályokba sorolást fényképek, tehát kétdimenziós adatok alapján végezzük el [1].

A második módszer a súlypont és a sima felületek pontjainak távolságát kétváltozós függvényként vizsgálja. Ebben az esetben az egyensúlyi helyzeteket a távolságfüggvény kritikus pontjaiként definiálhatjuk [3].

Definíció 1 *Ha az $f(\phi, w)$ távolságfüggvény parciális deriváltjaira a (ϕ_S, w_S) pontban teljesül, hogy folytonosak és*

$$\frac{\partial f(\phi, w)}{\partial \phi} = \frac{\partial f(\phi, w)}{\partial w} = 0 \quad (6)$$

akkor, ha

$$\frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial w^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial \phi \partial w} \right)^2 > 0, \text{ és } \frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial w^2} > 0 \quad (7)$$

a függvénynek lokális minimuma van, és a (ϕ_S, w_S) pontot stabil egyensúlyi pontnak nevezzük.

Definíció 2 Ha az $f(\phi, w)$ távolsággfüggvény parciális deriváltjaira a (ϕ_S, w_S) pontban teljesül, hogy folytonosak és

$$\frac{\partial f(\phi, w)}{\partial \phi} = \frac{\partial f(\phi, w)}{\partial w} = 0 \quad (8)$$

akkor, ha

$$\frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial w^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial \phi \partial w} \right)^2 > 0, \text{ és } \frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial w^2} < 0 \quad (9)$$

a függvénynek lokális maximuma van, és a (ϕ_S, w_S) pontot instabil egyensúlyi pontnak nevezzük.

Definíció 3 Ha az $f(\phi, w)$ távolsággfüggvény parciális deriváltjaira a (ϕ_S, w_S) pontban teljesül, hogy folytonosak és

$$\frac{\partial f(\phi, w)}{\partial \phi} = \frac{\partial f(\phi, w)}{\partial w} = 0 \quad (10)$$

akkor, ha

$$\frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial w^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\phi, w)}{\partial \phi \partial w} \right)^2 < 0 \quad (11)$$

akkor (ϕ, w) -ben a $f(\phi, w)$ függvénynek nyeregpontja van.

Ezeket a definíciókat a folytonossági kritériumot kielégítő ellipszislapokon és a hengerpaláston használhatjuk az egyensúlyi helyzetek megkeresésére és osztályozására.

A stabil, instabil és nyeregpontok számát jelölje rendre S, U és H . A Poincaré–Hopf tétel szerint gömbbel izomorf testek esetén az egyensúlyi helyzetek kielégítik az

$$S + U - H = 2 \quad (12)$$

egyenletet [2].

3.1. A palást pontjainak vizsgálata

Vetületi módszer

Értelmezzünk egy ξ, η, ζ lokális koordinátarendszert a súlypontban (2), melyet az eredeti koordinátarendszer x tengellyel párhuzamos eltolásával kaphatunk. A $\eta\zeta$ sík és a palást metszéspontját jelölje γ_s , melyet a lokális koordinátarendszerben a

$$\gamma_s(\phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cos(\phi) \\ b \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (13)$$

egyenlet segítségével adhatjuk meg, a vizsgált pont és a ζ tengely közbezárt ϕ szögének függvényében.

Geometriai szemlélet segítségével látható, hogy a paláston csak ezen az ellipszisen jöhet létre egyensúlyi helyzet, hiszen a palástalkotók párhuzamosak az ξ tengellyel, így az alkotók mentén távolodva γ_s ellipszistől a távolság η és ζ komponensei állandóak

maradnak. A távolság növekedését csak az ξ komponens növekedése okozza. Egyensúlyi helyzet csak a γ_s ellipszisen lehetséges, ahol ξ abszolút értéke minimális, tehát $\xi = 0$.

Mivel a γ_s ellipszisen az ξ koordinátatengelytől való távolság minimális, azokban a pontokban ahol a súlyponttól mért $l(\phi)$ távolságnak maximuma van, nyeregpont jön létre; ahol minimuma, ott stabil egyensúlyi helyzet. A paláston lévő egyensúlyi pontok tehát egy jól meghatározott görbén helyezkednek el és megkereshetőek a

$$l(\phi) = \sqrt{(\cos(\phi)a - Y_s)^2 + (\sin(\phi)b - Z_s)^2}, \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (14)$$

egyváltozós távolságfüggvény segítségével.

Instabil helyzetet csak a legszélső ellipsziseken, a metszett henger élein kell keresnünk, ha a palástot, mint γ_s ellipszis eltolásával létrejövő translációs felület metszősíkok közé eső részét értelmezzük. Ebben az esetben a távolság η és ζ komponensei az eltolás során továbbra is állandóak maradnak, a távolság növekedését csak az ξ komponens növekedése okozza. Szélsőérték tehát az egyes palástalkotókon csak ott lehetséges, ahol ξ komponens abszolútértéke maximális, vagyis az élen.

Ezzel a vizsgálattal egy külön fejezetben foglalkozunk.

Analitikus módszer

A palástot ebben az esetben, mint $\gamma_1(\varphi)$ ellipszis x tengellyel párhuzamos eltolásával létrejövő translációs felület metszősíkok közé eső részét vizsgáljuk, ahol

$$\gamma_1(\varphi) = \begin{bmatrix} s_{\text{tav1}} \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \text{és } 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (15)$$

ahol φ a vizsgált pont és z tengely közbezárt szögét jelöli.

A létrejövő translációs felületet paraméterezhetjük a

$$v(\varphi, w) = \begin{bmatrix} w + s_{\text{tav1}} \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ és } K_x \leq w \leq d \quad (16)$$

összefüggés segítségével, ahol w a vizsgált ferde ellipszislapp középpontjának és az origó távolságának felel meg. s_{tav1} távolságot a 2. ábrán szemléltetjük.

Az S súlypont vektora és a palást $v(\varphi, w)$ pontjába mutató vektorok különbsége a

$$\mathbf{f}(\varphi, w) = \begin{bmatrix} w_0 + s_{\text{tav1}} \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \quad (17)$$

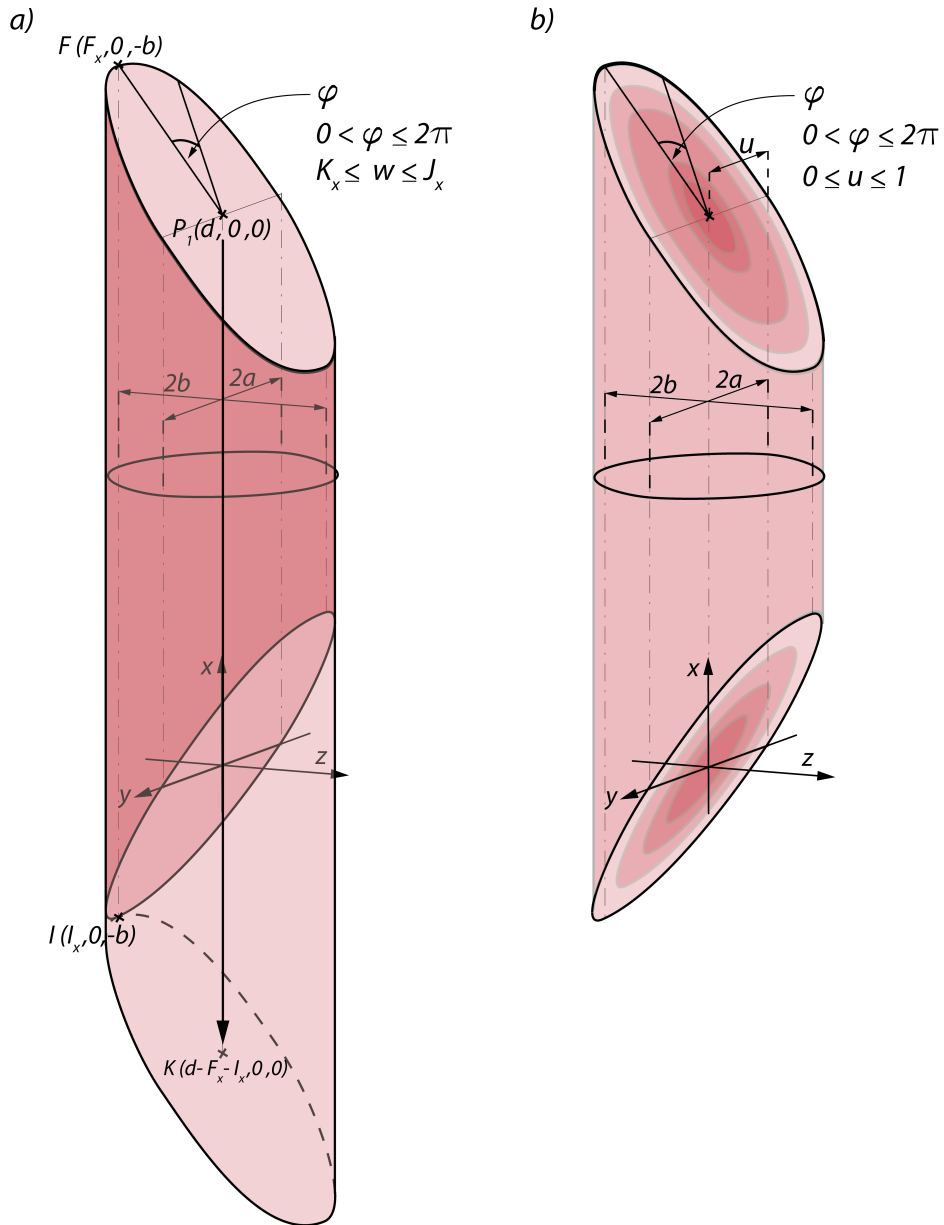
vektorfüggvény.

A $v(\varphi, w)$ pont távolsága a súlyponttól ennek a vektornak a hossza

$$f_v(\varphi, w) = |\mathbf{f}(\varphi, w)| \quad (18)$$

vagyis

$$f_v(\varphi, w) = \sqrt{(a \cos(\varphi) - Y_s)^2 + (b \sin(\varphi) - Z_s)^2 + (w + s_{\text{tav1}} \sin(\varphi) - X_s)^2}. \quad (19)$$



3. ábra. A palást és a lap kétváltozós távolsággfüggvényeinek szemléltetése

3.2. A síklapok pontjainak vizsgálata

Analitikus vizsgálat

A lap vizsgálatakor tekintsük a

$$\gamma_1(\varphi) = \begin{bmatrix} s_{\text{tav1}} \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

valamint a

$$\gamma_2(\varphi) = \begin{bmatrix} -s_{\text{tav2}} \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ b \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ellipszis által határolt két ellipszislap tartományt, ahol $0 \leq \varphi < 2\pi$ és $0 \leq u \leq 1$. Ezeket a tartományokat jelölje $\Gamma_1(\varphi, u)$ és $\Gamma_2(\varphi, u)$, melyeket a

$$\Gamma_1(\varphi, u) = \begin{bmatrix} d + us_{\text{tav1}} \sin(\varphi) \\ ua \cos(\varphi) \\ ub \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\Gamma_2(\varphi, u) = \begin{bmatrix} -us_{\text{tav2}} \sin(\varphi) \\ ua \cos(\varphi) \\ ub \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (23)$$

módon paramétrezhetünk, ahol φ a vizsgált pont és a z koordinátatengely szöge, u pedig annak az arányát adja meg, hogy a vizsgált koncentrikus helyzetű ellipszislapok tengelyei hogyan aránylanak a lapot határoló legszélső éllipszis tengelyének hosszához. Ez alapján az $u = 0$ a határoló ellipszis középpontját, az $u = 1$ pedig magát a határoló ellipszist, az élt jelöli ki. (3).

Az S súlypont vektora és a lap $\Gamma_1(\varphi, u)$ pontjába mutató vektorok különbsége a

$$\mathbf{g}_1(\varphi, u) = \begin{bmatrix} -us_{\text{tav2}} \sin(\varphi) \\ ua \cos(\varphi) \\ ub \sin(\varphi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}, \quad (24)$$

valamint a

$$\mathbf{g}_2(\varphi, u) = \begin{bmatrix} d + us_{\text{tav1}} \sin(\varphi) \\ ua \cos(\varphi) \\ ub \sin(\varphi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \quad (25)$$

vektorfüggvény.

A vizsgált függvény meghatározható a különbségvektor hosszaként, a

$$g_1(\varphi, u) = |\mathbf{g}_1(\varphi, u)| \quad (26)$$

$$g_2(\varphi, u) = |\mathbf{g}_2(\varphi, u)| \quad (27)$$

összefüggések alapján. Tehát a két távolságfüggvény

$$g_1(\varphi, u) = \sqrt{(ua \cos(\varphi) - Y_s)^2 + (ub \sin(\varphi) - Z_s)^2 + (d + us_{\text{tav1}} \sin(\varphi) - X_s)^2}, \quad (28)$$

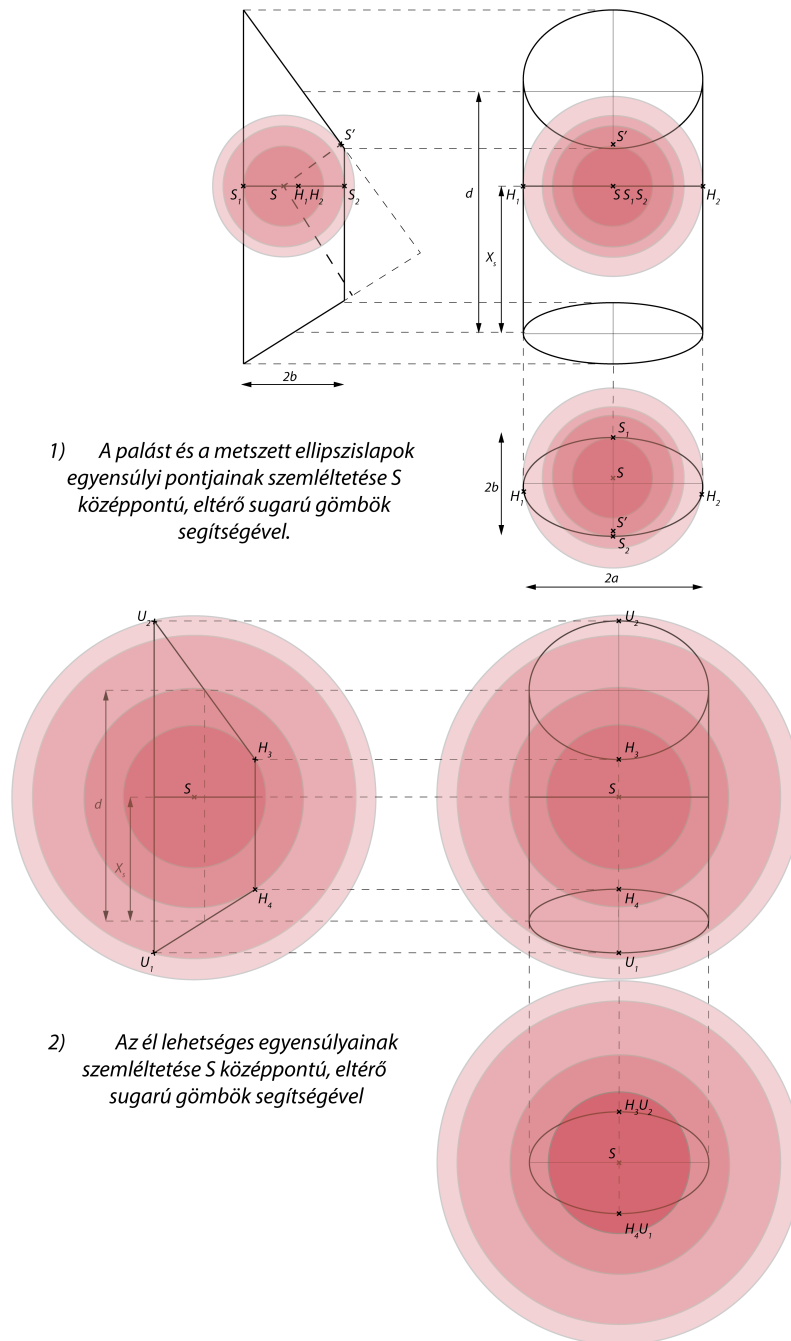
$$g_2(\varphi, u) = \sqrt{(ua \cos(\varphi) - Y_s)^2 + (ub \sin(\varphi) - Z_s)^2 + (-us_{\text{tav2}} \sin(\varphi) - X_s)^2}. \quad (29)$$

Vetületi módszer

A geometriai szemléletet segítségül hívva, könnyen belátható, hogy amennyiben a távolságfüggvényt, mint a súlypontból kiinduló egyre nagyobbra fűjt gömböt képzeljük el, a függvénynek csak azokban a pontokban lehet szélsőértéke, ahol a gömb először vagy utoljára érinti az adott felületet. Mivel a két metszősíkunk metszésvonala párhuzamos y tengellyel, a metszett henger súlypontja y irányban nem tolódik el, vagyis a metszett ellipszishenger az ép hengerhez hasonlóan szimmetrikus marad. Ez azt eredményezi, hogy az

egyre nagyobbra fűjt gömb a metszett ellipszislapot a szimmetriatengelyen fogja először érinteni.

A síklapok pontjainak vizsgálatát így redukálhatjuk a síklapok szimmetriatengelyeinek, illetve a teljes ellipszishenger szimmetriasíkba eső pontjainak vizsgálatára.



4. ábra. A vizsgált felületek és az S -től ekvidisztáns pontok gömbjeinek érintési pontjai.

A minimális távolság egy S pont és egy s síklap esetén ez S és a S'_s síkbeli merőleges vetület közötti távolság lesz. A vizsgálatunk tárgyát tehát az képezi, hogy S'_s része $g(\varphi, u)$ értelmezési tartományának, ami az ellipszislap belső pontjait tartalmazza a $0 \leq \varphi < 2\pi$ és $0 \leq u < 1$ összefüggéseknek megfelelően.

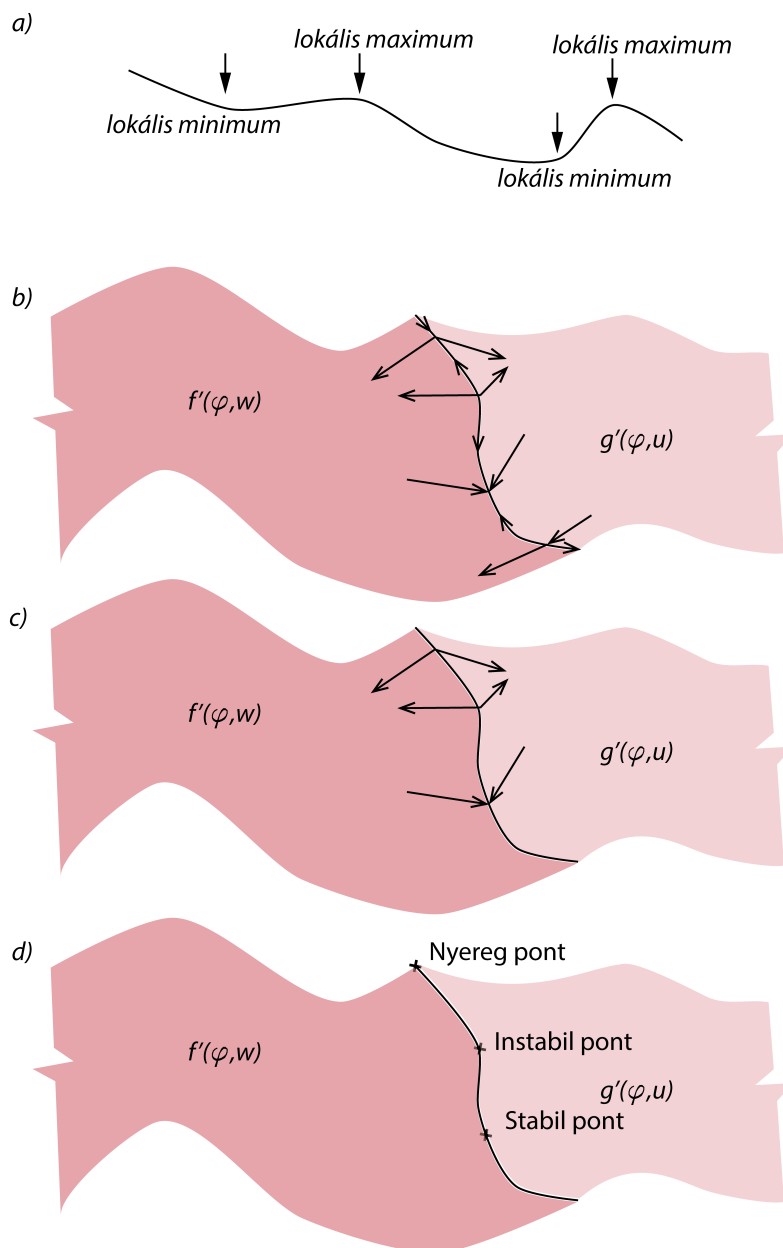
A további egyensúlyok vizsgálata elhagyható az értelmezési tartomány miatt, a geo-

metriai megközelítés alapján egyértelmű, hogy a többi egyensúly csak az élek mentén helyezkedhet el. Ekkor az $u = 1$.

4. Az élen lévő egyensúlyi helyzetek meghatározása

Az él pontjainak vizsgálatához általánosítanunk kell az eddig használt definícióinkat.

Definíció 4 *Egyensúlyi helyzetnek tekintjük a továbbiakban az él azon pontjait is, ahol a távolságfüggvénynek ív menti extrémuma van és a két csatlakozó felület gradiensvektorai vagy egyszerre az él irányába, vagy attól elfelé mutatnak.*

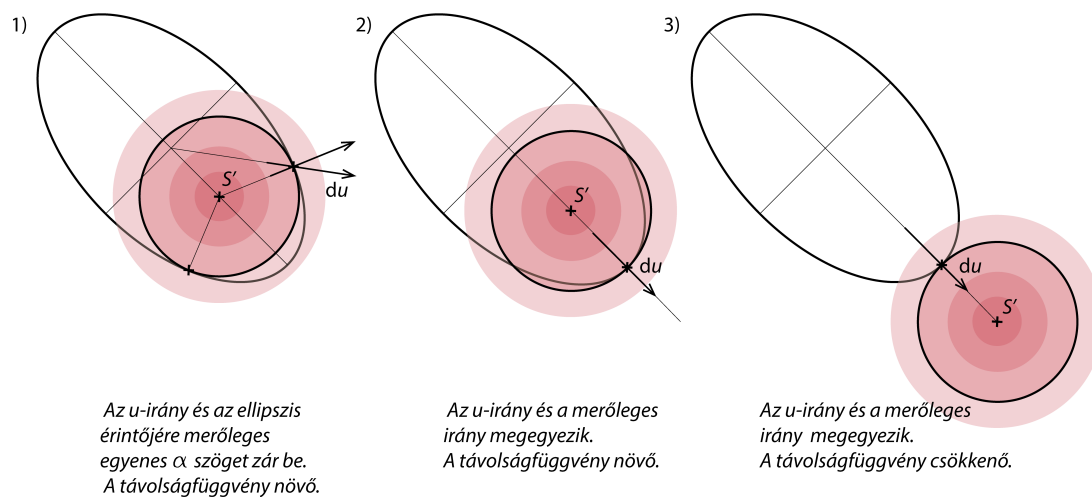


5. ábra. Az él egyensúlyainak megkeresése és osztályozása

Lemma 4.1 *A két sima $f(\varphi, w)$ és $g(\varphi, u)$ távolságfüggvény értelmezési tartományának közös határpontjában vett két gradiensvektor irányának meghatározása (az, hogy az él felé, vagy attól elfelé mutat) megfeleltethető annak a vizsgálatnak, hogy a kiterjesztett kétváltozós távolságfüggvények pontbéli w illetve u szerinti parciális deriváltja pozitív vagy negatív előjelű-e.*

Bizonyítás: Ennek a sejtésnek a bizonyítását elemi geometriai úton végezzük el. Azt már beláttuk, hogy a súlypont metszősíkra eső vetülete a paraméterek függvényében az ellipszis egyik féltengelye által meghatározott egyenesen található. Az ellipszislap esetében a metszősík súlyponttól ekvidisztáns pontjai olyan koncentrikus körökön helyezkednek el, melyek középpontja a súlypont metszősíkra eső merőleges vetülete.

A gradiensvektorokat azokban a pontokban vizsgáljuk, ahol a távolságfüggvénynek szélsőértéke van. Ez a már bemutatott analógia (4) szerint azt is jelenti, hogy létezik egy olyan gömb melynek középpontja a súlypont és az adott pontban érinti az ellipszist. Ennek a gömbnek a metszősíkra eső vetülete egy olyan kör, melynek középpontja a súlypont vetülete, és ami érinti a vizsgált pontban az ellipszist.



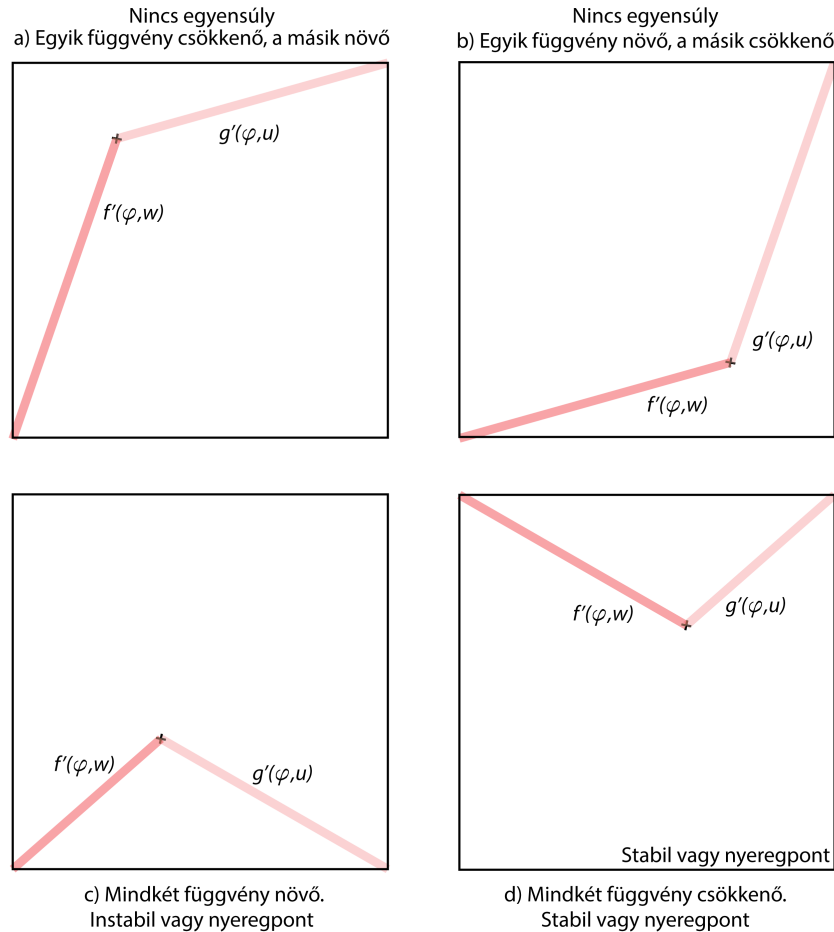
6. ábra. Az ellipszislap és az ekvidisztáns pontok különböző helyzetei.

Amennyiben a kör érinti az ellipszist a ponton keresztül felvett összes egyenes - az érintő egyenes kivételével - a 6. ábra szerinti módon "átlép" a köríven. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben mindegy, hogy a (29) távolságfüggvény u szerinti parciális deriváltjának az előjelét, vagy valóban az adott pontban az ellipszis érintőjére merőleges iránymenti deriváltat vizsgálom. Ez a 6. ábra 1) esetében válik fontossá.

Az értékek eltérőek lesznek, az előjel azonban nem: vagy minden esetben közelebb kerülünk a súlyponthoz, vagy minden esetben távolodunk tőle, a körív átlépésével ugyanarra a másik ekvidisztáns körre kerülünk.

Kivételt képez az az eset, amikor a vizsgált irány megegyezik a kör és az ellipszis adott pontbéli közös érintőjének irányával. Azonban ez az eset nem állhat elő, hiszen u sugár, tartóegyenese pedig ennek megfelelően tartalmazza az ellipszis középpontját, tehát az egyenes nem lehet érintő helyzetű. \square

Az élek vizsgálatához a már bevezetett $f(\varphi, w)$ és $g(\varphi, u)$ kétváltozós függvényeket használjuk, ahol φ a két függvény közös változója. Az élek esetében $u_1 = 1$ és $w_1 = d$, vagy $u_2 = 1$ és $w_2 = 0$. Megkeressük $g(\varphi, u)$ szélsőértékeit, majd megvizsgáljuk, hogy a gradiens-vektor merre mutat. Ez megfeleltethető annak a vizsgálatnak, hogy a függvény pontbéli v szerinti első parciális deriváltja pozitív vagy negatív előjelű. Hasonlóképp vizsgáljuk a $f(\varphi, w)$ függvényt is (5).



7. ábra. Az él egyensúlyi pontjainak és a találkozó felületek gradienseinek kapcsolata.

Ha a derivált pozitív, akkor a gradiens vektor "kifelé" mutat, vagyis a függvény növe. Ha derivált negatív, akkor a függvény csökkenő. Az élen akkor lehet egyensúlyi helyzet, ha a két találkozó felület gradiensvektora hasonlóképp viselkedik: vagy mindkét felület emelkedő, vagy mindkettő lejtő. Amennyiben az egyik távolságfüggvény növe, a másik pedig csökkenő a kétváltozós függvénynek nincsen szélsőértéke (7).

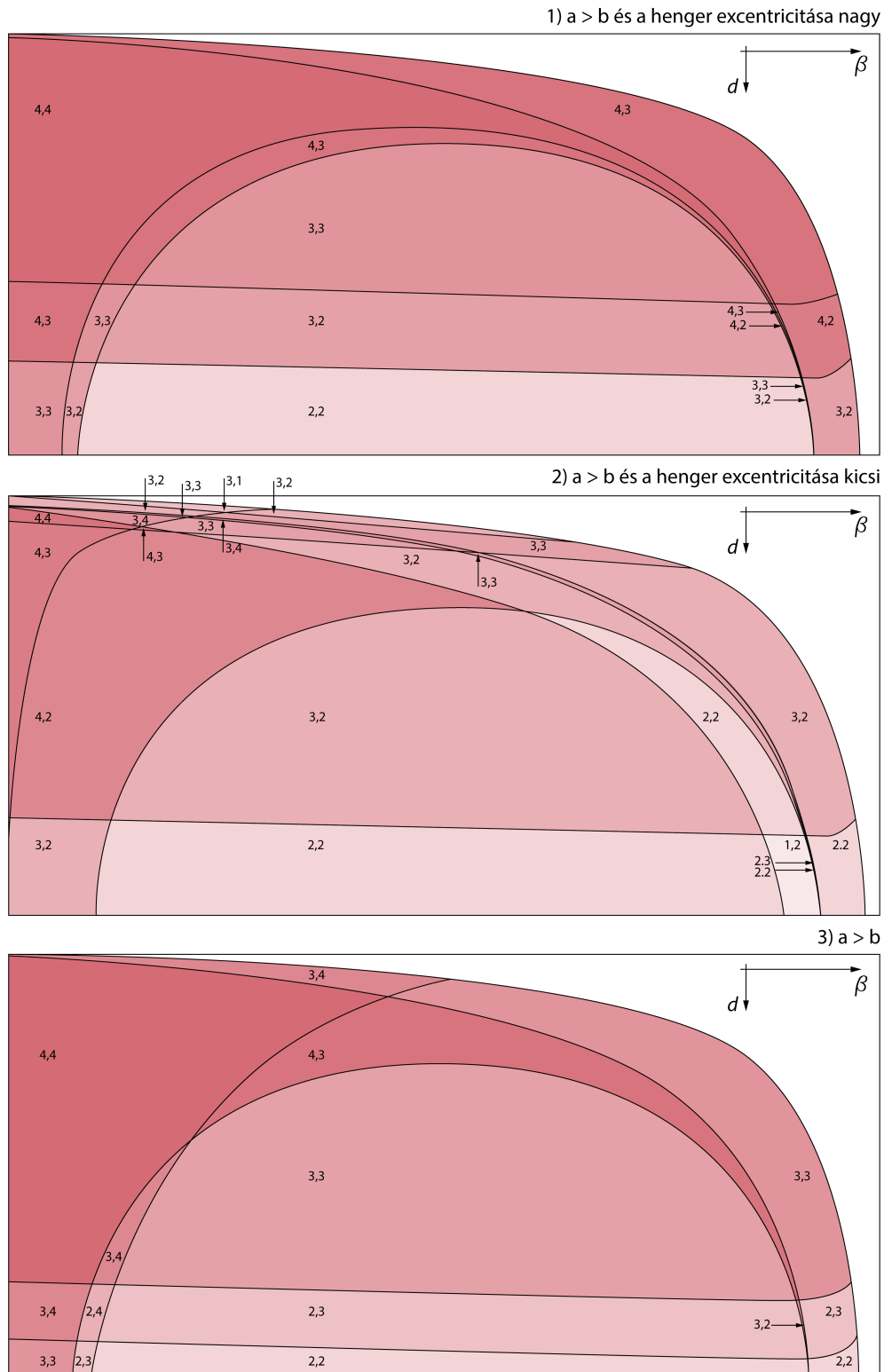
Geometriai okok miatt nem jöhet létre olyan eset, amikor mindkét derivált negatív: egyszerre nem állhat elő az az eset, amikor a S'_m súlypont síklapra eső merőleges vetülete kívül esik γ_m élű ellipszislapon és a γ_s is metszi ugyanezt a γ_m ellipszist.

Ha mindkét függvény növe, akkor a vizsgált metszék lokális minimum helyein nyereg-pont, lokális maximum helyein pedig instabil egyensúlyi pont jön létre.

Ezzel a henger összes pontját megvizsgáltuk, a kapott eredmények alapján elkezdődhet a testek osztályozása az egyensúlyi térképek és gráfok vizsgálata.

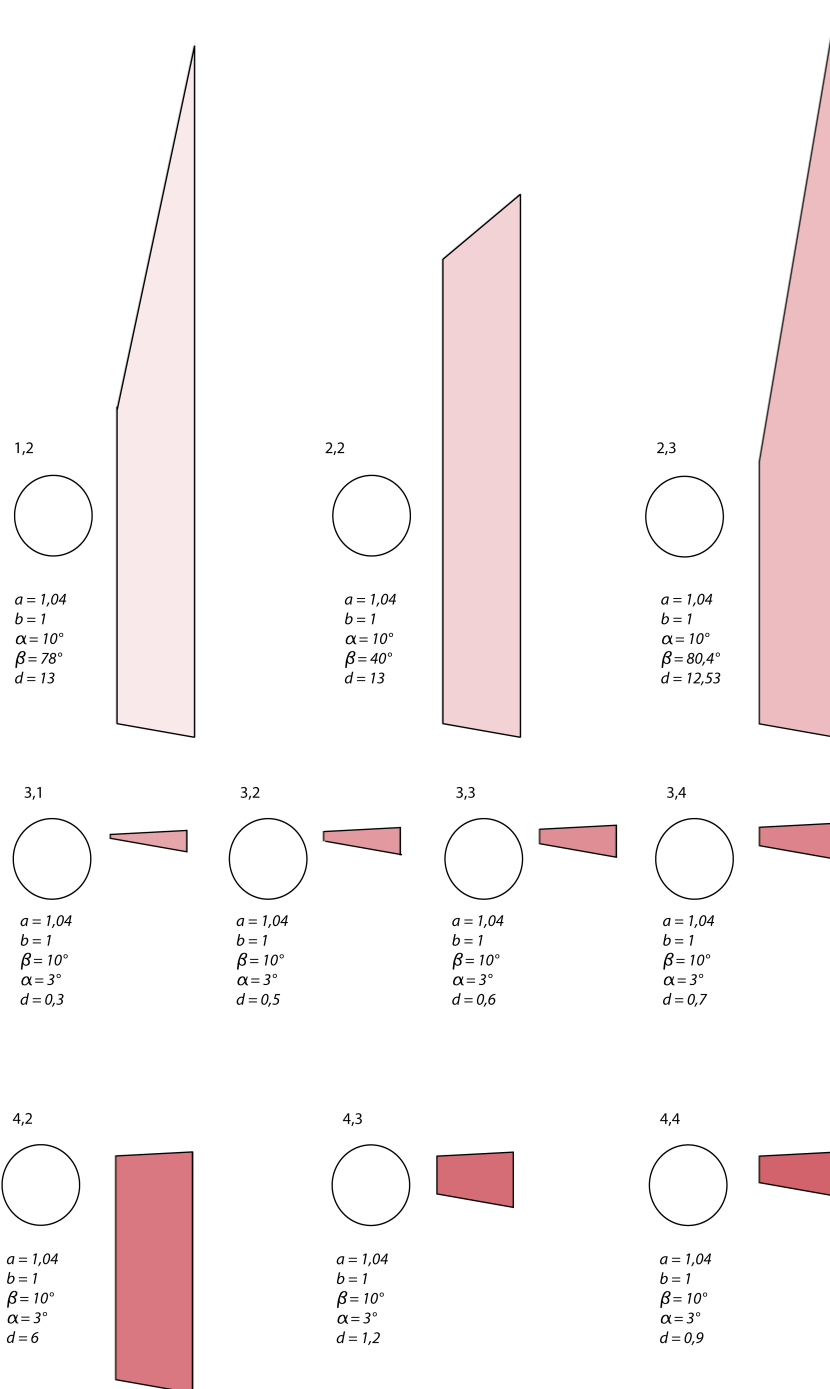
5. Egyensúlyi térképek vizsgálata

A két paraméterrel megadható, sík lapokkal a fentiek szerint metszett ellipszishengerek családjában a várt egyensúlyi osztályok többsége a numerikus számítások során valóban megjelenik. A hengerek viselkedését három különböző esetre bontva vizsgáljuk:



8. ábra. β - d egyensúlyi térképek különböző ellipszisztengely-arányoknál, rögzített α esetén.

A 8. ábrán bemutatott térképek szemléltetik a két változóval (d -vel és az egyik metszősík β szögével adott) hengercsaládok egyensúlyi osztályait. Ezek a térképek egy, a hengerek egyensúlyi pontjait meghatározó Wolphram Mathematica szkript numerikus vizsgálatának eredményei alapján készültek, és az egyensúlyi osztályok kapcsolatait és egymáshoz képesti elhelyezkedését szemléltetik. Bár a tartományokat határoló görbék nem analitikusan számítottak, csupán a numerikus eredményekre lettek illesztve, a térképek alapján megfigyelhető az is, hogy a geometria több pontban rendkívül érzékenyé válik és bifurkáció jön létre [7]



9. ábra. A 8. ábra 2) térképének különböző egyensúlyi osztályokba tartozó hengerei.

A kapott eredmények alapján látható, hogy pusztán a vetületek megadásával, könnyen értelmezhető térbeli geometriai formákkal az egyensúlyi osztályok többsége egyszerűen szemléltethetővé válik. Ezt szintén a 8. ábra 2) térképének hengereivel demonstráljuk. A hengerek vetületeit az összevethetőség kedvéért arányosan növeltük, ennek mértékét a jobb sarokban jelöljük.

		<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block;"> $a = 1,04$ $b = 1$ $\alpha = 10^\circ$ </div>			
		1	2	3	4
1	1			 $\beta = 3^\circ$ $d = 0,3$ 8x	
	2	$\beta = 78^\circ$ $d = 13$ 1x	$\beta = 40^\circ$ $d = 13$ 1x	$\beta = 3^\circ$ $d = 0,5$ 8x	$\beta = 3^\circ$ $d = 6$ 2x
	3		$\beta = 80,4^\circ$ $d = 12,53$ 1x	$\beta = 3^\circ$ $d = 0,6$ 8x	$\beta = 3^\circ$ $d = 1,2$ 8x
	4			$\beta = 3^\circ$ $d = 0,7$ 8x	$\beta = 3^\circ$ $d = 0,9$ 8x

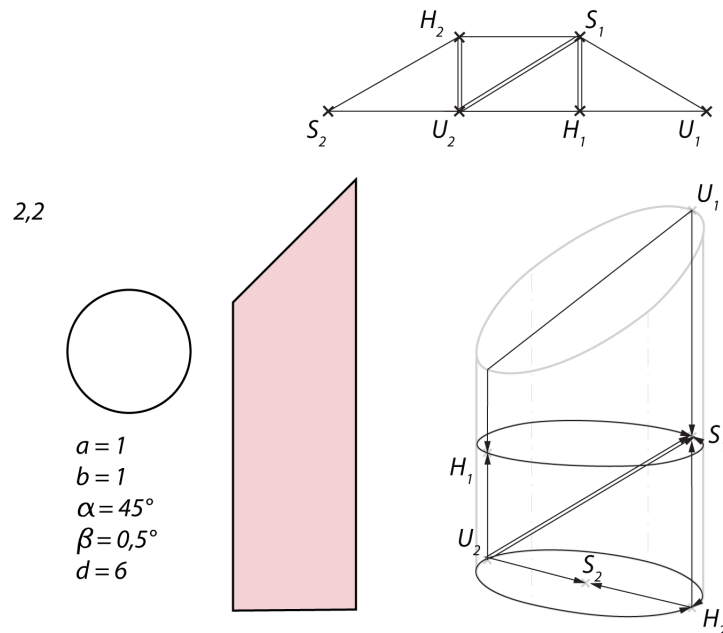
1. táblázat. Az egyensúlyi osztályok szemléltetése hengervetületekkel.

6. Gráfok

Az egyensúlyi osztályokat a testek egyensúlyi helyzeteit összekötő gráf alakja alapján tovább bonthatjuk, így összetettebb képet kapva a hengerek viselkedéséről.

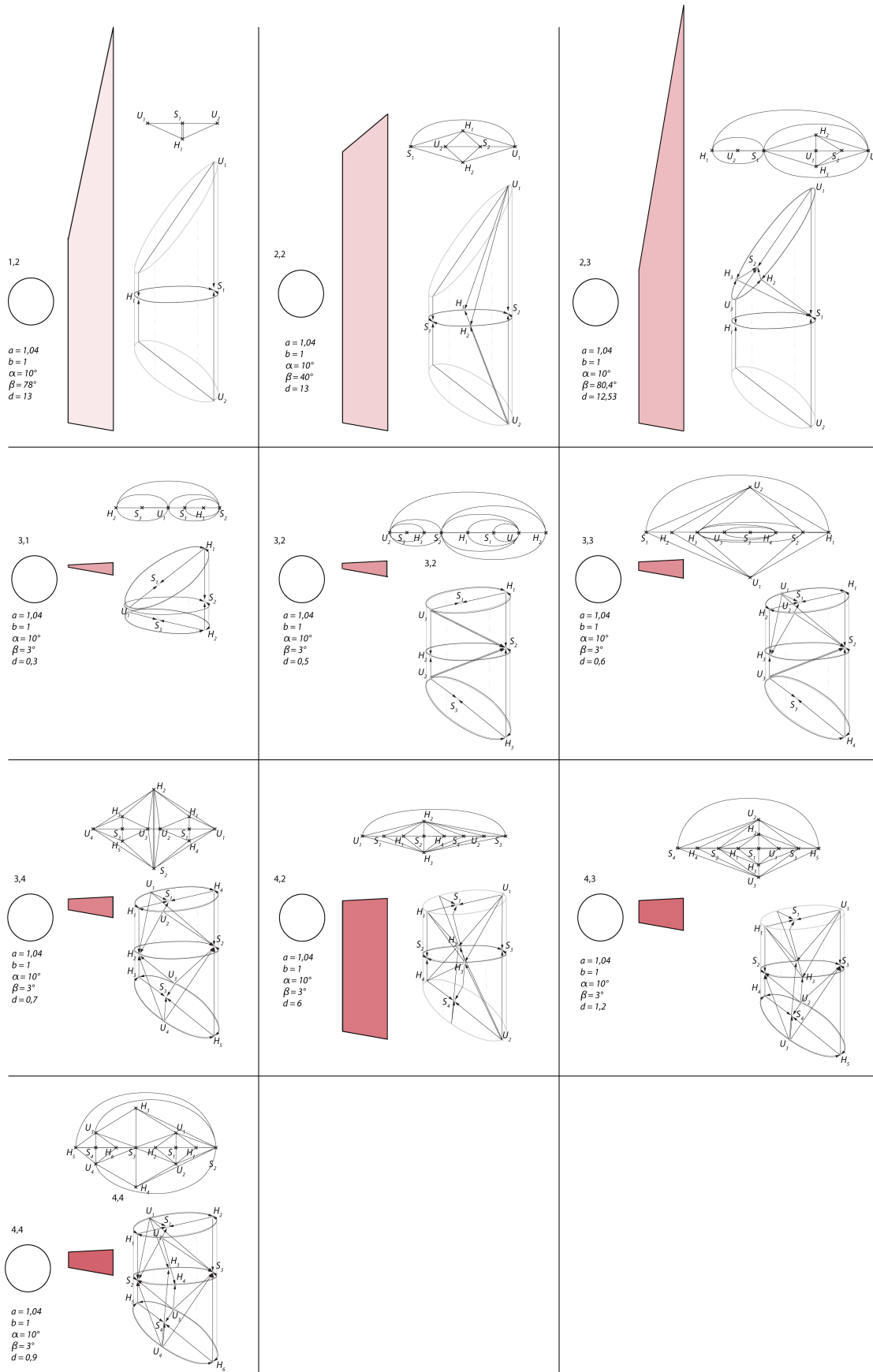
A 8. ábra térképein látható egyensúlyi tartományok egy-egy hengerén megvizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek kapcsolatát szemléltető gráfot is. Meglepve tapasztaljuk, hogy a létrejövő gráfok túlnyomó többsége degenerált (12)(13), s bár a várt egyensúlyi osztályok létrejönnek az ellipszis hengerek metszése során, gráfjaik többsége nem figyelhető meg a természetben. A természetes kopási folyamatok során olyan generikus gráfok jönnek létre, melyek S, U, H háromszögekből állnak, illetve a nyeregpontok (H) mindegyikénél két-két él fut be, illetve ki [4].

A vizsgált speciális geometriáink esetében azonban előfordul nyeregponti egyensúlyi helyzet hat befutó éllel is. Elemi geometriai megfontolások alapján belátható, hogy a kiterjesztett egyensúlyi pont definíciónak megfelelően mindössze annyi kötött, hogy egy nyeregpontba ugyanannyi él fusson be, mint amennyi belőle ki.

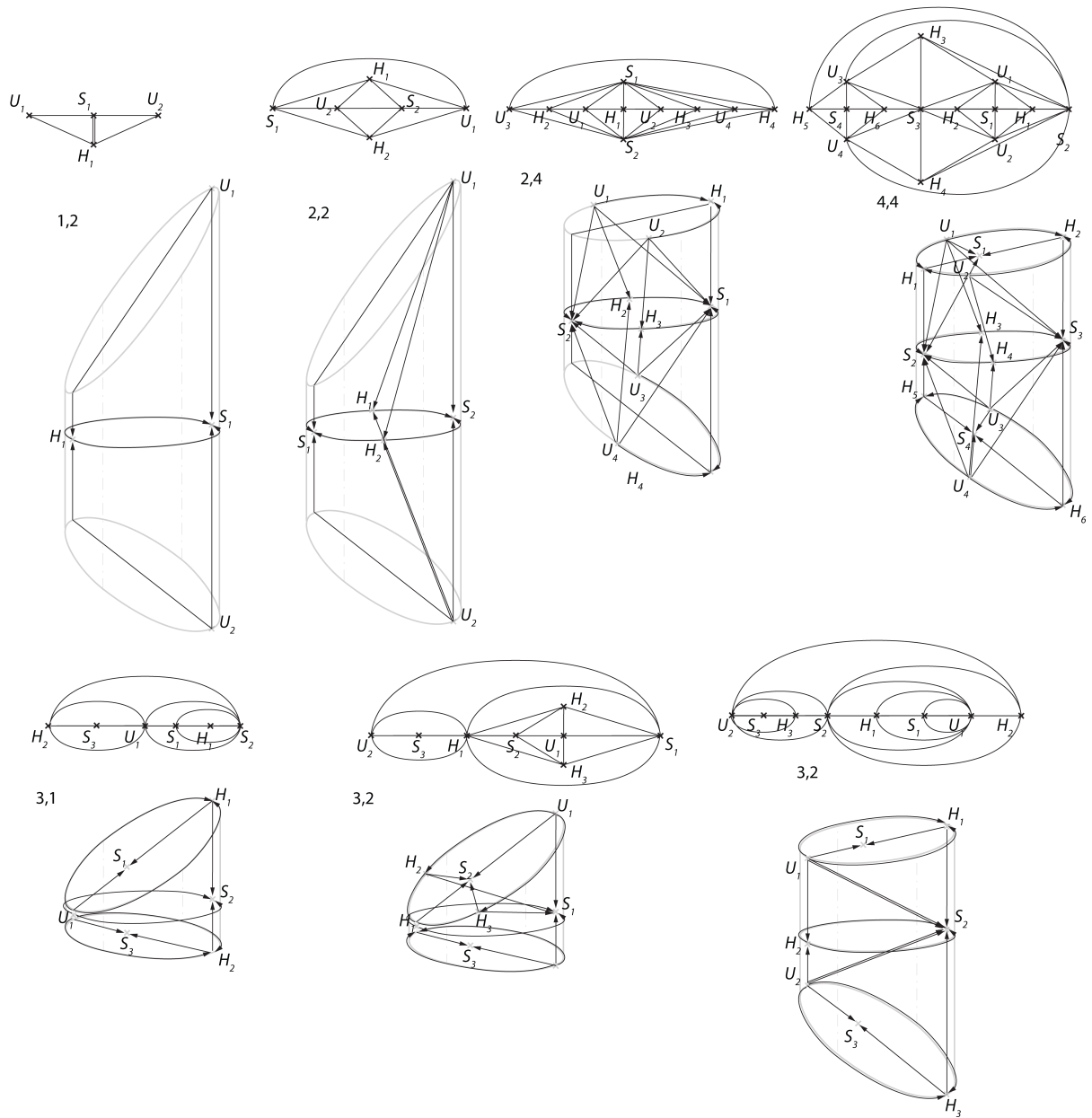


10. ábra. A 2,2 osztály ritka gráfja

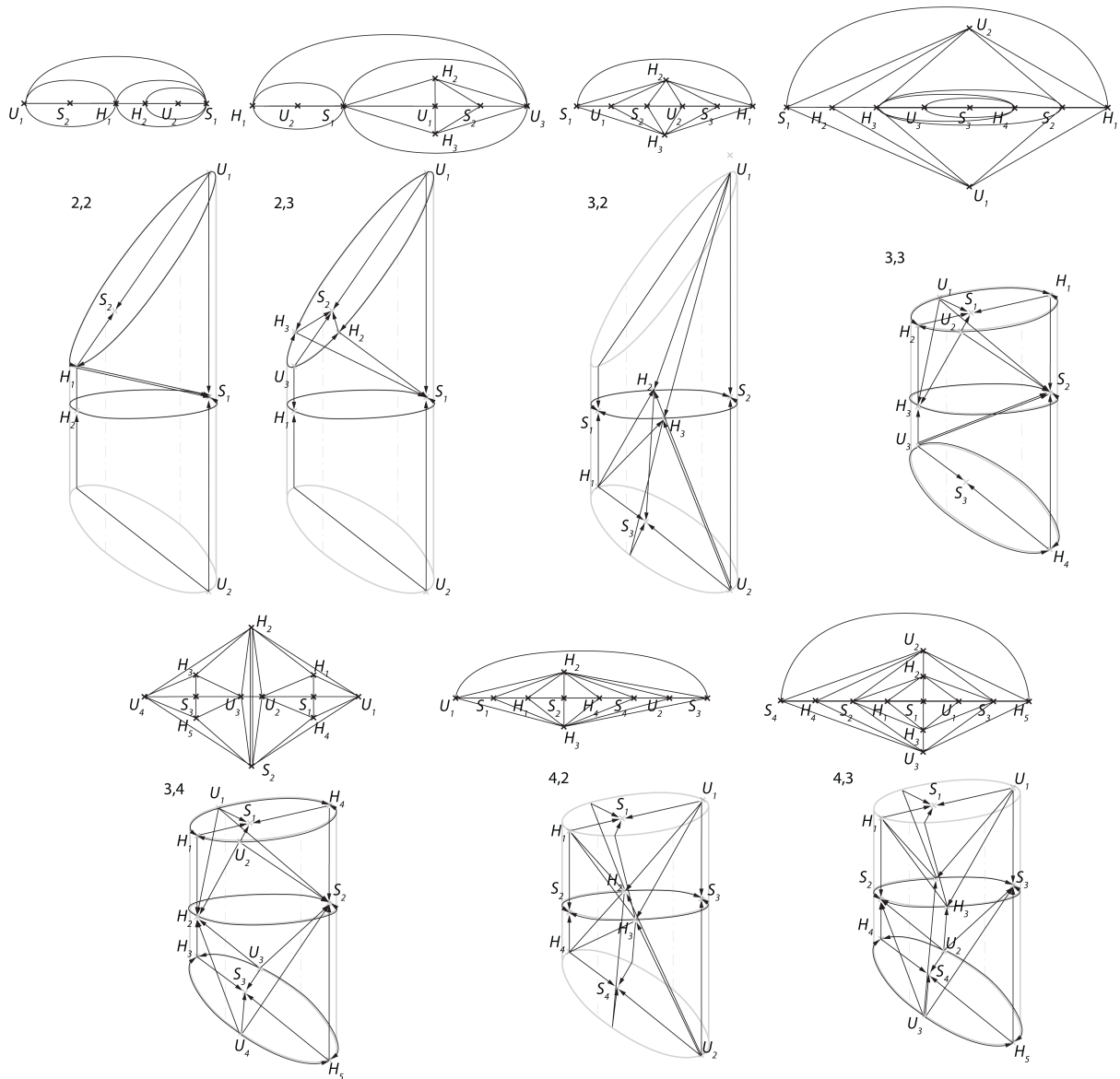
A gráfok vizsgálata során az 10. ábrán bemutatott esetben egy olyan generikus gráfot kapunk, melyik a 2,2 osztályba tartozik, ugyanakkor a természetben eddig nem sikerült a parti kavicsok elemzése során megtalálni. Ennek a gráfnak a jelentősége, hogy bár a matematikai megközelítés szerint mindegyik gráf előfordulhat a természetes kopási folyamatok eredményeképp [5] [6], úgy tűnik, hogy az adott osztályokban az előfordulási gyakoriság merőben eltérő.



11. ábra. Példák a vizsgált egyensúlyi térkép gráfjaira



12. ábra. Generikus gradienshez tartozó gráfok



13. ábra. Degenerált gradiensthez tartozó gráfok

7. Eredmények összefoglalása

Dolgozatunkban bemutattuk, hogy geometriai szemlélet segítségével a bonyolult, számításgényes három dimenziós feladatokat is vissza lehet vezetni jól ismert, egyszerűen megoldható, két dimenziós, vetületi problémákra.

Ennek egyrészt jelentősége van a számítási erőforrások spórolásában, másrészt azt is jelenti, hogy speciális geometriák esetén, amennyiben a súlypont helyzete ismert, az egyensúlyi helyzetek meghatározásához elegendőek a geometria bizonyos vetületei. A probléma aktualitását mutatja, hogy a vetületekből történő információszerzés az úrkutatás kurrens, jelenleg is megoldandó feladatai közé tartozik.

A választott test, a két (s_1 és s_2) síkkal metszett henger egyensúlyi helyzetét vizsgálva a várt egyensúlyi helyzetek többsége valóban megtalálható a különböző paraméterek változtatásával. Külön figyelemre méltó a kis excentricitású, de $a > b$ hengerek csoportja,

ahol kellően alacsony β szög mellett a 13 lehetséges egyensúlyi osztályból 10 megjelenik. Ez a hengercsalád önmagában alkalmas lehet az egyensúlyi osztályok egyszerű szemléltetésére, ahogy a táblázatban be is mutattuk.

A gráfok vizsgálata során ezen hengercsalád tagjait vettük sorra és az egyensúlyi térkép tartományaihoz hozzárendeltünk egy-egy a tartományban általánosnak mondható generikus vagy degenerált gráfot. Az előforduló degenerált gráfok száma meglepően nagy volt, amit az élek vizsgálatához általánosított egyensúlyi pont definíció indokol.

A dolgozat eredménye mindemellett egy olyan test megtalálása, mely a 2,2 egyensúlyi osztályba tartozik, de eltér a természetben megtalálható, a parti kavicsok vizsgálatokor gyakorta előforduló, szintén ezen osztályba tartozó gráftól. Ezzel az eredménnyel együtt most már az osztály összes grádját lehet testekkel szemléltetni.

Összegezve megállapítható, hogy geometriai szemléletünk fontossága a problémamegoldás során az egyszerűsítő, vizsgálandó pontok számát csökkentő eljárások kidolgozásában rendkívül nagy szerepet játszik, illetve innovatív utat mutathat összetett geometriai problémák megoldásához.

8. Felhasznált irodalom

- [1] Tímea Szabó, Gábor Domokos, John P. Grotzinger and Douglas J. Jerolmack (2015), "Reconstructing the transport history of pebbles on Mars", Nature Communications 6, Article number: 8366 doi:10.1038/ncomms9366
- [2] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), "Poincaré–Hopf theorem", Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4
- [3] Farkas, Miklós, ed. (1979), "Szélsőértékszámítás", Matematika V. kötet, Tankönyvkiadó, J-4-800
- [4] Kápolnai R., Szabó T., Domokos G.: Generating spherical multiquadrangulations by restricted vertex splittings and the reducibility of equilibrium classes. Periodica Polytechnica Electrical Engineering, Vol 56, No 1 (2012), pp. 11-20
- [5] G. Domokos, P. Holmes and Z. Lángi, A genealogy of convex solids via local and global bifurcations of gradient vector fields, arXiv:1508.04796 [math.MG], [math.ph], [math.DS], August 19, 2015.
- [6] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, The Genealogy of convex solids, arXiv:1204.5494v2 [math.DG] 8 Jul 2014
- [7] R. Mándoki, P. Tomasovszky, P. P. Ther: Csonkolások, csillagok (2014), Tudományos Diákköri Konferencia, Budapest

Csonkolások, hengerek

Adatok, henger és síkok egyenlete

```
In[1]= p1 = {0, 0, 0};  
normvec1 = {A1, B1, C1};  
B1 = 0;  
p2 = {d, 0, 0};  
normvec2 = {A2, B2, C2};  
B2 = 0;  
ellip =  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ ;  
ineq1 =  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1$ ;  
sik1 = A1 (x - p1[[1]]) + B1 (y - p1[[2]]) + C1 (z - p1[[3]]);  
eq2 = A1 (x - p1[[1]]) + B1 (y - p1[[2]]) + C1 (z - p1[[3]]) == 0;  
sik2 = A2 (x - p2[[1]]) + B2 (y - p2[[2]]) + C2 (z - p2[[3]]);  
eq3 = A2 (x - p2[[1]]) + B2 (y - p2[[2]]) + C2 (z - p2[[3]]) == 0;  
Solve[eq2, x]  
Solve[eq3, x]
```

```
Out[13]=  $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{C1 z}{A1} \right\} \right\}$ 
```

```
Out[14]=  $\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{A2 d - C2 z}{A2} \right\} \right\}$ 
```

```
In[15]= ineq2 = x >= - $\frac{C1 z}{A1}$ ;  
ineq3 = x <= (A2 d - C2 z) / A2;  
ineq = {ineq1, ineq2, ineq3};
```

Paraméterek megadása, súlypontszámítás

In[18]=

```

a = 1;
b = 1;
A1 = -1;
alsoszog = 0.5
A2 = 1;
felsoszog = 45
d = 6;
C1 = -1 / N[-Cot [alsoszog Degree] ] ;
C2 = 1 / N[Cot [felsoszog Degree] ] ;

```

$$V = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} 1 \, dx \, dz \, dy$$

$$S_x = \frac{1}{V} \left(\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} x \, dx \, dz \, dy \right) ;$$

$$S_y = \frac{1}{V} \left(\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} y \, dx \, dz \, dy \right) ;$$

$$S_z = \frac{1}{V} \left(\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} z \, dx \, dz \, dy \right) ;$$

```
rS = {Sx, Sy, Sz}
```

```
rS2D = {Sy, Sz}
```

Out[21]= 0.5

Out[23]= 45

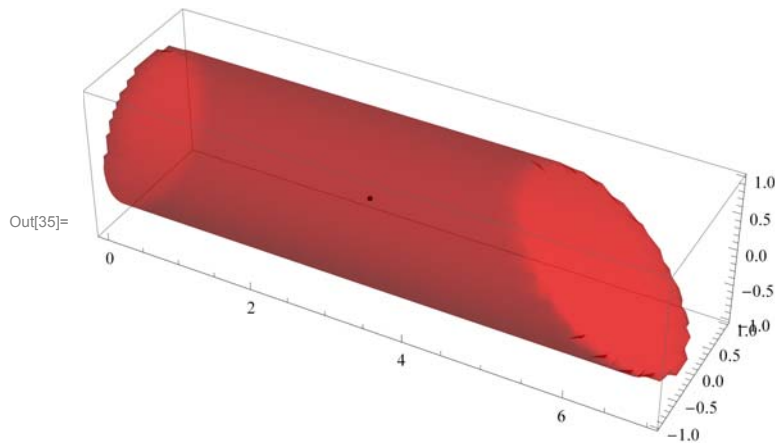
Out[27]= 6 π

Out[31]= {3.02083, 0, -0.0420303}

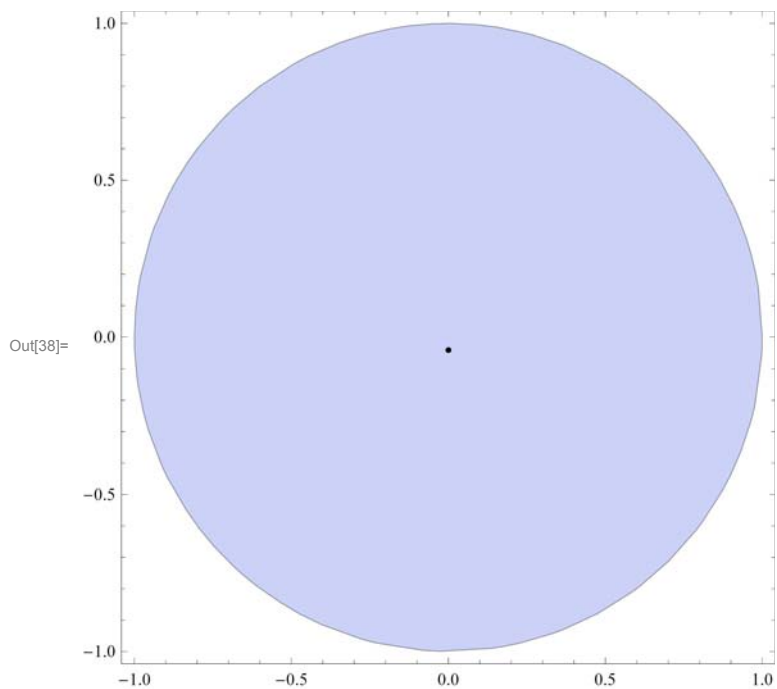
Out[32]= {0, -0.0420303}

Kirajzoltatás

```
In[33]= plot1 = RegionPlot3D[ineq1 && ineq2 && ineq3, {x, -10, 2 d}, {y, -3, 5},
      {z, -3, 5}, PlotPoints -> 100, PlotStyle -> Directive[Red, Opacity[0.5]],
      Mesh -> None, BoxRatios -> Automatic, PlotRange -> All];
plot2 = Graphics3D[Point[rS]];
Show[plot1, plot2]
```



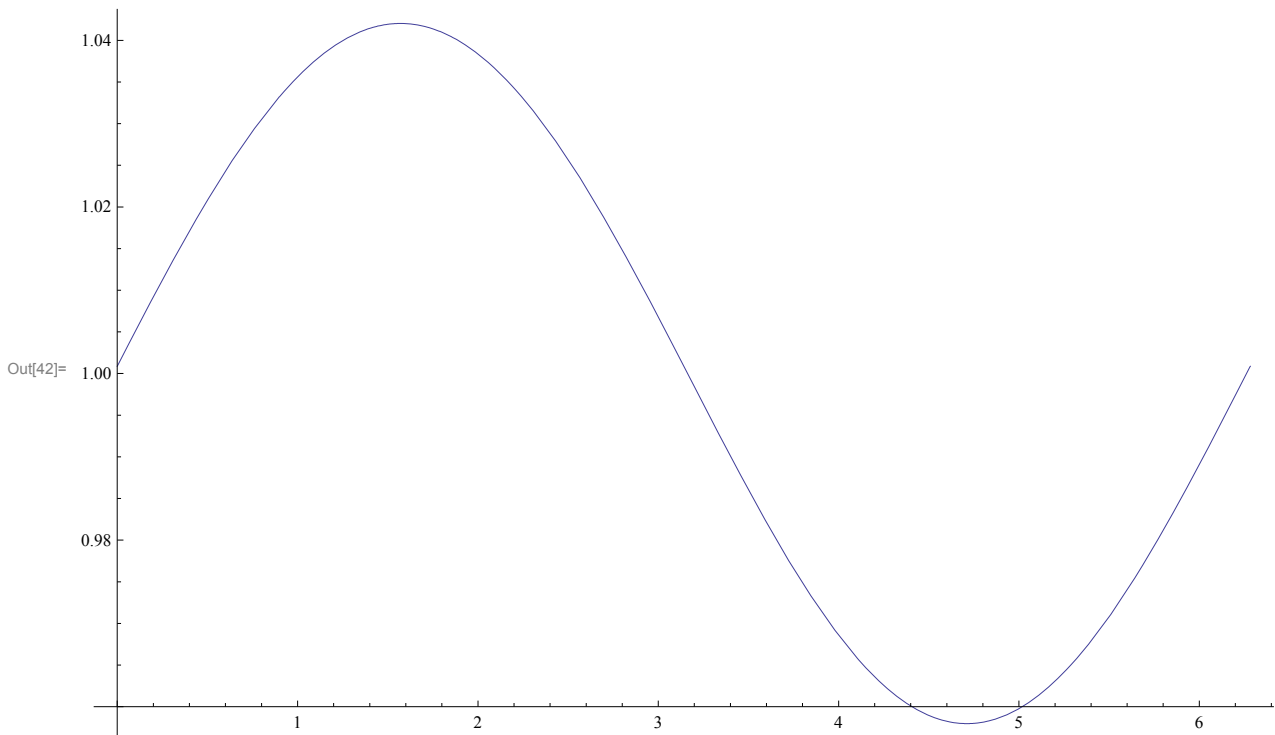
```
In[36]= plot3 = RegionPlot[ineq1, {y, -3, 5},
      {z, -3, 4}, PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic];
plot4 = Graphics[Point[rS2D]];
Show[plot3, plot4]
```



```

In[39]:= tavolsag[φ_] =  $\sqrt{(\text{Cos}[\varphi] a - S_y)^2 + (\text{Sin}[\varphi] b - S_z)^2}$ ;
dtavolsag[φ_] = D[tavolsag[φ], φ];
ddtavolsag[φ_] = D[dtavolsag[φ], φ];
Plot[tavolsag[φ], {φ, 0, 2 π}]
Stabil = Solve[dtavolsag[φ] == 0 && φ ≤ 2 π && φ ≥ 0 && ddtavolsag[φ] > 0, φ];
Nyereg = Solve[dtavolsag[φ] == 0 && φ ≤ 2 π && φ ≥ 0 && ddtavolsag[φ] < 0, φ];
φStabil = φ /. Stabil;
φNyereg = φ /. Nyereg;

```



Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

```

In[47]:= Stav1 = -1 * b * C2 / A2;
Fx = d - Stav1
Gx = d + Stav1
Stav2 = b * C1 / A1;
Hx = 0 - Stav2
Ix = 0 + Stav2

```

(*Stav1, Stav2 negatív!*)

```

Plot3D[Sqrt[(j + Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (a * Cos[v] - Sy)^2 + (b * Sin[v] - Sz)^2],
{v, 0, 2 Pi}, {j, d - Fx - Ix, d}, BoxRatios -> Automatic, PlotRange -> All]
palast[v_, j_] =
Sqrt[(j + Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (a * Cos[v] - Sy)^2 + (b * Sin[v] - Sz)^2];
palastj[v_, j_] = D[palast[v, j], {j, 1}];
palastv[v_, j_] = D[palast[v, j], {v, 1}];
palastjj[v_, j_] = D[palast[v, j], {j, 2}];

```

```

palastvv[v_, j_] = D[palast[v, j], {v, 2}];
palastvj[v_, j_] = D[palast[v, j], v, j];

hesse[v, j] = palastvv[v, j] * palastjj[v, j] - palastvj[v, j]^2;

behlista0 = Solve[palastj[v, j] == 0 &&
  palastv[v, j] == 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];
behlista01 = Solve[palastj[v, j] == 0 && palastv[v, j] == 0 && hesse[v, j] > 0 &&
  palastjj[v, j] > 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];
behlista02 = Solve[palastj[v, j] == 0 && palastv[v, j] == 0 && hesse[v, j] > 0 &&
  palastjj[v, j] < 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];
behlista03 = Solve[palastj[v, j] == 0 && palastv[v, j] == 0 &&
  hesse[v, j] < 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];

stabilpontokszöge = v /. behlista01;
instabilpontokszöge = v /. behlista02;
nyeregponokszöge = v /. behlista03;
stabilpontoktávolsága = j /. behlista01;
instabilpontoktávolsága = j /. behlista02;
nyeregponoktávolsága = j /. behlista03;

stabil = Range[Length[stabilpontokszöge]];
stabilx = Range[Length[stabilpontokszöge]];
stabil y = Range[Length[stabilpontokszöge]];
stabilz = Range[Length[stabilpontokszöge]];

For[m = 1, m - 1 < Length[stabilpontokszöge], m++,
stabilx[m] =
  stabilpontoktávolsága[m] + Stav1 * Sin[stabilpontokszöge[m]];
stabil y[m] = a * Cos[stabilpontokszöge[m]];
stabilz[m] = b * Sin[stabilpontokszöge[m]];
stabil[m] = {stabilx[m], stabil y[m], stabilz[m]}];

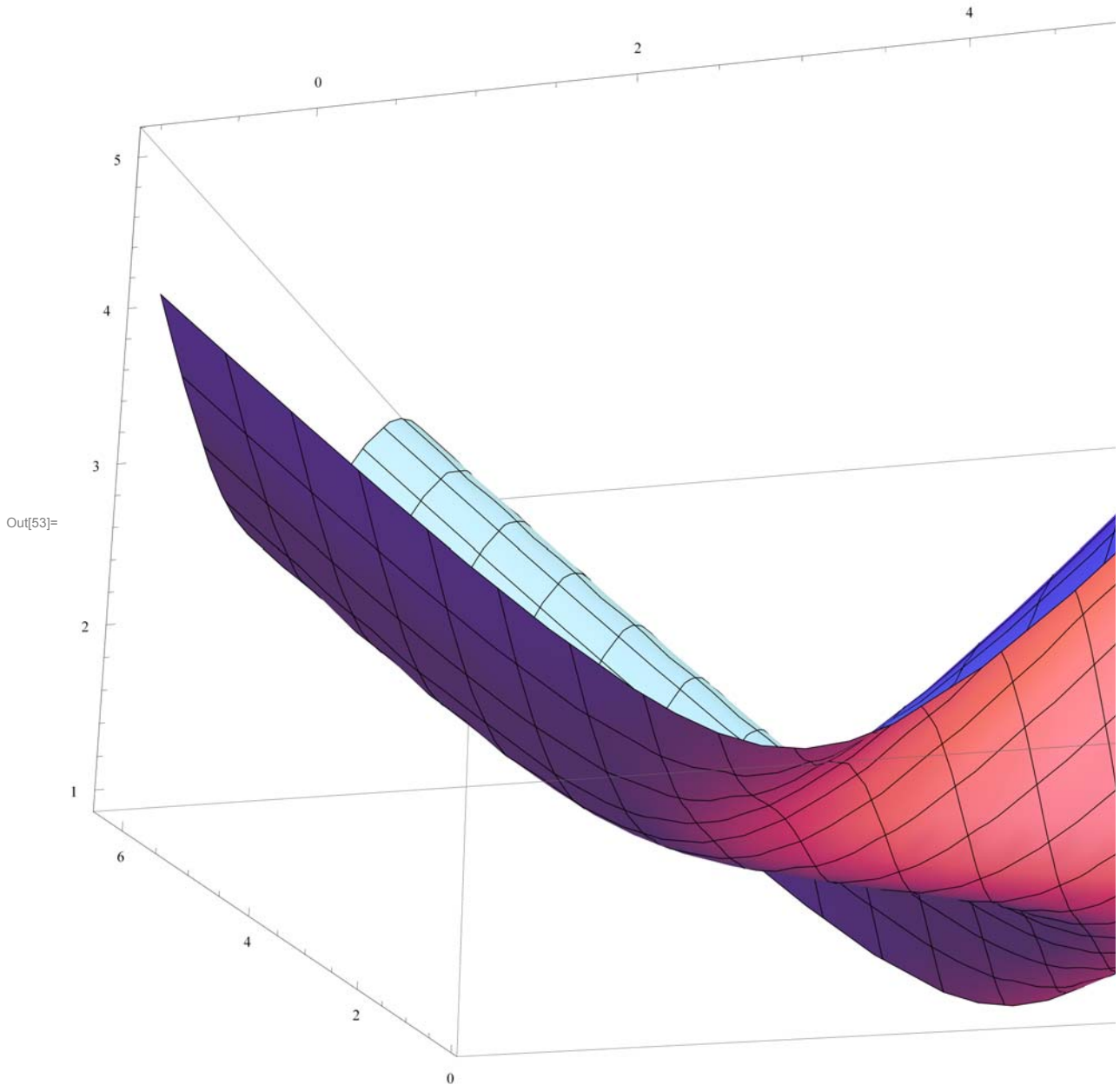
instabil = Range[Length[instabilpontokszöge]];
instabilx = Range[Length[instabilpontokszöge]];
instabil y = Range[Length[instabilpontokszöge]];
instabilz = Range[Length[instabilpontokszöge]];

For[m = 1, m - 1 < Length[instabilpontokszöge], m++,
instabilx[m] =
  instabilpontoktávolsága[m] + Stav1 * Sin[instabilpontokszöge[m]];
instabil y[m] = a * Cos[instabilpontokszöge[m]];
instabilz[m] = b * Sin[instabilpontokszöge[m]];
instabil[m] = {instabilx[m], instabil y[m], instabilz[m]}];

nyereg = Range[Length[nyeregponokszöge]];
nyereg x = Range[Length[nyeregponokszöge]];
nyereg y = Range[Length[nyeregponokszöge]];
nyereg z = Range[Length[nyeregponokszöge]];

```

```
For[m = 1, m - 1 < Length[nyeregpointokszöge], m++,  
nyeregx[m] =  
  nyeregpointoktávolsága[m] + Stav1 * Sin[nyeregpointokszöge[m]];  
nyeregy[m] = a * Cos[nyeregpointokszöge[m]];  
nyeregzm] = b * Sin[nyeregpointokszöge[m]];  
nyereg[m] = {nyeregx[m], nyeregy[m], nyeregzm];]  
  
stabil  
instabil  
nyereg
```



Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Out[86]= $\left\{\left\{3.02083, -1.83697 \times 10^{-16}, -1.\right\}\right\}$

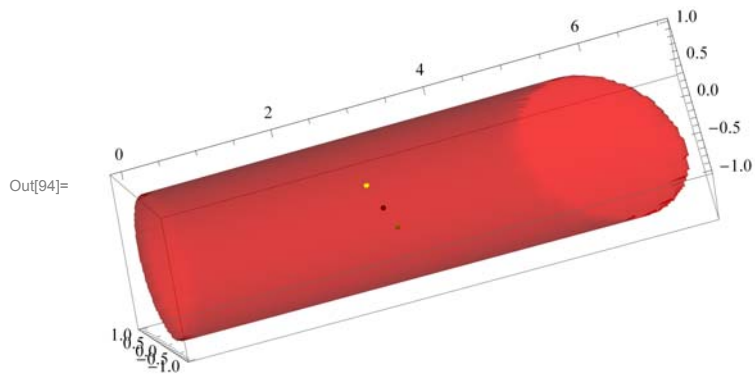
Out[87]= $\{\}$

Out[88]= $\left\{\left\{3.02083, 6.12323 \times 10^{-17}, 1.\right\}\right\}$

```
In[89]:= plot9 = RegionPlot3D[ineq1 && ineq2 && ineq3, {x, -10, 6 d}, {y, -3, 5},
      {z, -3, 5}, PlotPoints -> 200, PlotStyle -> Directive[Red, Opacity[0.5]],
      Mesh -> None, BoxRatios -> Automatic, PlotRange -> All];
plot10 = Graphics3D[Point[rS]];
```

```
In[91]:= If[Length[behlista01] > 0,
      plot11 = ListPointPlot3D[stabil, PlotStyle -> {Green}], plot11 = {}];
If[Length[behlista02] > 0, plot112 =
      ListPointPlot3D[instabil, PlotStyle -> {Blue}], plot112 = {}];
If[Length[behlista03] > 0, plot12 = ListPointPlot3D[nyereg, PlotStyle -> {Yellow}],
      plot12 = {}];
```

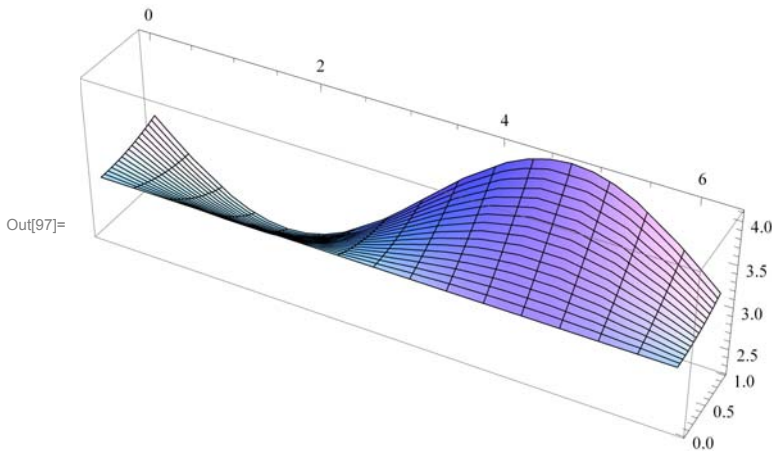
```
Show[plot9, plot10, plot11, plot112, plot12]
```



In[95]=

In[96]=

```
In[97]= Plot3D[
  Sqrt[(d + u * Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (u * a * Cos[v] - Sy)^2 + (u * b * Sin[v] - Sz)^2],
  {v, 0, 2 Pi}, {u, 0, 1}, BoxRatios -> Automatic, PlotRange -> All]
```



In[98]=

```
In[99]= f[u_, v_] =
  Sqrt[(d + u * Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (u * a * Cos[v] - Sy)^2 + (u * b * Sin[v] - Sz)^2];
fu[u_, v_] = D[f[u, v], {u, 1}];
fv[u_, v_] = D[f[u, v], {v, 1}];
fuu[u_, v_] = FullSimplify[D[f[u, v], {u, 2}]];
fvv[u_, v_] = D[f[u, v], {v, 2}];
fuv[u_, v_] = D[f[u, v], u, v];
behlistal =
  Solve[fu[u, v] == 0 && fv[u, v] == 0 && u > 0 && u < 1 && v > 0 && v < 2 Pi, {u, v}]
(*Plot3D[fuu[u,v]*fvv[u,v]-fuv[u,v]^2, {v,0,2Pi},
  {u,0,1},BoxRatios->Automatic,PlotRange->All]*)
```

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Out[105]= {}

In[106]=

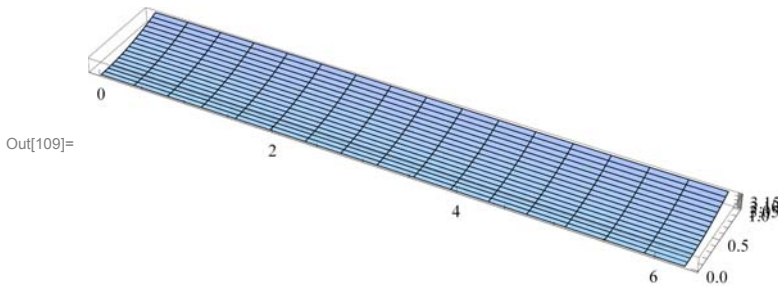
```
In[107]= If[Length[behlistal] == 1,
  Plx = d + Stav1 * Sin[v] * u;
  Ply = u * a * Cos[v];
  Plz = u * b * Sin[v];
  P1 = {Plx, Ply, Plz} /. behlistal;
  plot13 = Graphics3D[{Green, Point[P1]}];
  Show[plot9, plot10, plot11, plot12, plot13], plot13 = {}];
```

In[108]=

```

In[109]:= Plot3D[
  Sqrt[(-r * Stav2 * Sin[t] - Sx) ^ 2 + (r * a * Cos[t] - Sy) ^ 2 + (r * b * Sin[t] - Sz) ^ 2],
  {t, 0, 2 Pi}, {r, 0, 1}, BoxRatios -> Automatic, PlotRange -> All]
g[r_, t_] = Sqrt[(-r * Stav2 * Sin[t] - Sx) ^ 2 +
  (r * a * Cos[t] - Sy) ^ 2 + (r * b * Sin[t] - Sz) ^ 2];
gr[r_, t_] = D[g[r, t], {r, 1}];
gt[r_, t_] = D[g[r, t], {t, 1}];
grr[r_, t_] = D[g[r, t], {r, 2}];
gtt[r_, t_] = D[g[r, t], {t, 2}];
grt[r_, t_] = D[g[r, t], r, t];
behlista2 =
  Solve[gr[r, t] == 0 && gt[r, t] == 0 && r > 0 && r < 1 && t > 0 && t < 2 Pi, {r, t}]

```



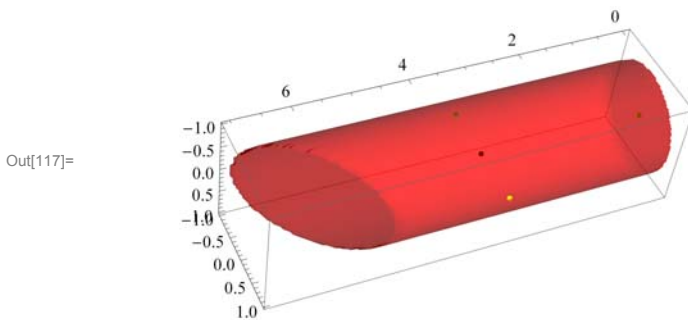
Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Out[116]= {{r -> 0.0156667, t -> 4.71239}}

```

In[117]:= If[Length[behlista2] == 1,
  P2x = -Stav2 * Sin[t] * r;
  P2y = r * a * Cos[t];
  P2z = r * b * Sin[t];
  P2 = {P2x, P2y, P2z} /. behlista2;
  plot14 = Graphics3D[{Green, Point[P2]}];
  Show[plot9, plot10, plot11, plot12, plot13, plot14], plot14 = {};]

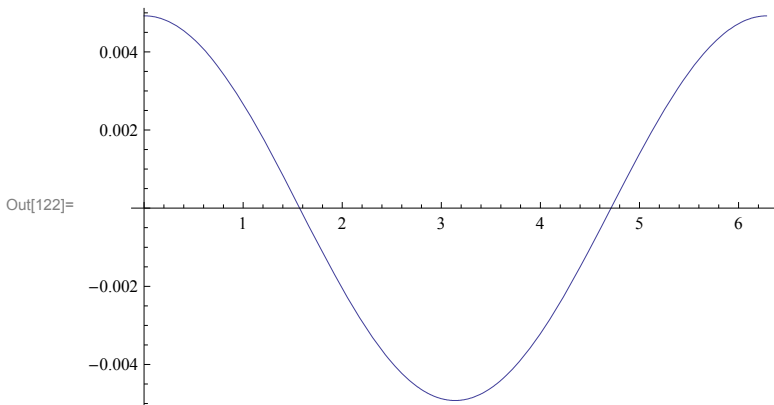
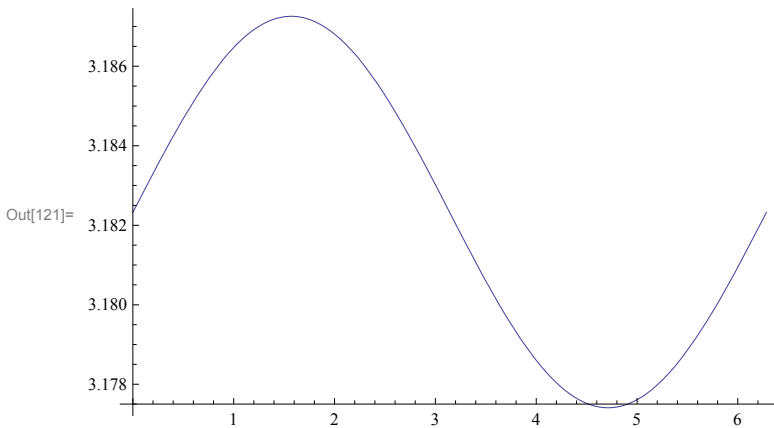
```



```

In[118]= gg[t_] = Sqrt[(-Stav2 * Sin[t] - Sx)^2 + (a * Cos[t] - Sy)^2 + (b * Sin[t] - Sz)^2];
          ggt[t_] = D[gg[t], {t, 1}];
          ggtt[t_] = D[gg[t], {t, 2}];
          Plot[gg[t], {t, 0, 2 π}]
          Plot[ggt[t], {t, 0, 2 π}]
          behlista3 = Solve[ggt[t] == 0 && t > 0 && t < 2 π];
          behlista31 = Solve[ggt[t] == 0 && t > 0 && t < 2 π && ggtt[t] > 0]
          behlista32 = Solve[ggt[t] == 0 && t > 0 && t < 2 π && ggtt[t] < 0]

```



Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Out[124]= {{t → 4.71239}}

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

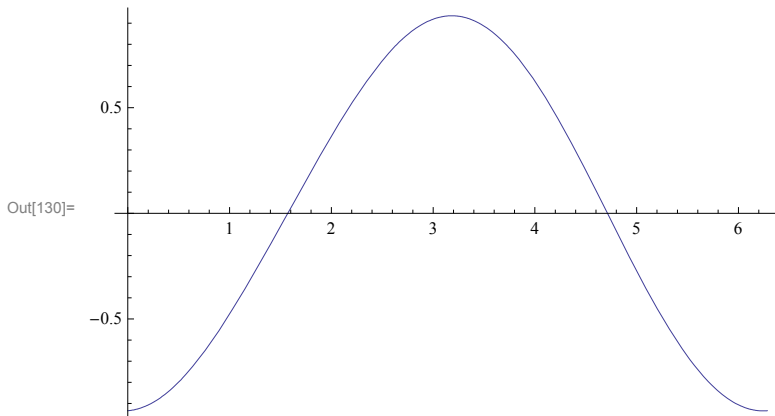
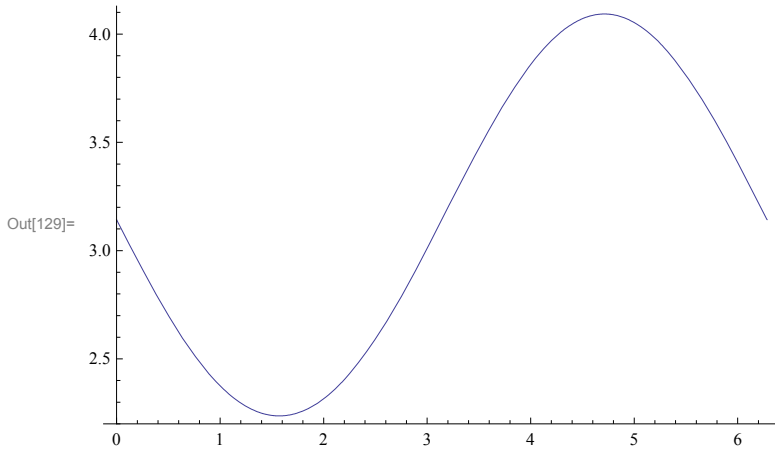
Out[125]= {{t → 1.5708}}

In[126]=

```

ff[v_] = Sqrt[(d + Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (a * Cos[v] - Sy)^2 + (b * Sin[v] - Sz)^2];
ffv[v_] = D[ff[v], {v, 1}];
ffvv[v_] = D[ff[v], {v, 2}];
Plot[ff[v], {v, 0, 2 π}]
Plot[ffv[v], {v, 0, 2 π}]
behlista4 = Solve[ffv[v] == 0 && v > 0 && v < 2 π];
behlista41 = Solve[ffv[v] == 0 && v > 0 && v < 2 π && fvv[v] > 0];
behlista42 = Solve[ffv[v] == 0 && v > 0 && v < 2 π && fvv[v] < 0];

```



Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Out[132]= {{v → 1.5708}}

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Out[133]= {{v → 4.71239}}

```

felsopalastel[v_, j_] =
  Sqrt[(j + Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (a * Cos[v] - Sy)^2 + (b * Sin[v] - Sz)^2];
felsopalastelderivalt[v_, j_] = D[felsopalastel[v, j], j];
felsolapel[v_, u_] =
  Sqrt[(d + u * Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (u * a * Cos[v] - Sy)^2 + (u * b * Sin[v] - Sz)^2];

```

```

felsolapelderivalt[v_, u_] = D[felsolapel[v, u], u];
alsopalastel[t_, k_] =
  Sqrt[(k - Stav2 * Sin[t] - Sx)^2 + (a * Cos[t] - Sy)^2 + (b * Sin[t] - Sz)^2];
alsopalastelderivalt[t_, k_] = D[alsopalastel[t, k], k];
alsolapel[t_, r_] =
  Sqrt[(-r * Stav2 * Sin[t] - Sx)^2 + (r * a * Cos[t] - Sy)^2 + (r * b * Sin[t] - Sz)^2];
alsolapelderivalt[t_, r_] = D[alsolapel[t, r], r];

felsopontokmin = v /. behlista41;
alsopontokmin = t /. behlista31;
felsopontokmax = v /. behlista42;
alsopontokmax = t /. behlista32;

For[i = Length[felsopontokmin], i > 0, i = i - 1,
  If[felsopalastelderivalt[felsopontokmin[[i]], d] > 0 &&
    felsolapelderivalt[felsopontokmin[[i]], 1] > 0, ,
    felsopontokmin = Delete[felsopontokmin, i]];
For[i = Length[alsopontokmin], i > 0, i = i - 1,
  If[-alsopalastelderivalt[alsopontokmin[[i]], 0] > 0 &&
    alsolapelderivalt[alsopontokmin[[i]], 1] > 0, ,
    alsopontokmin = Delete[alsopontokmin, i]];
For[i = Length[felsopontokmax], i > 0, i = i - 1,
  If[felsopalastelderivalt[felsopontokmax[[i]], d] > 0 &&
    felsolapelderivalt[felsopontokmax[[i]], 1] > 0, ,
    felsopontokmax = Delete[felsopontokmax, i]];
For[i = Length[alsopontokmax], i > 0, i = i - 1,
  If[-alsopalastelderivalt[alsopontokmax[[i]], 0] > 0 &&
    alsolapelderivalt[alsopontokmax[[i]], 1] > 0, ,
    alsopontokmax = Delete[alsopontokmax, i]];

P3almin = Range[Length[alsopontokmin]];
P3alminx = Range[Length[alsopontokmin]];
P3alminy = Range[Length[alsopontokmin]];
P3alminz = Range[Length[alsopontokmin]];

For[n = 1, n - 1 < Length[alsopontokmin], n++,
P3alminx[[n]] = -Stav2 * Sin[alsopontokmin[[n]]];
P3alminy[[n]] = a * Cos[alsopontokmin[[n]]];
P3alminz[[n]] = b * Sin[alsopontokmin[[n]]];
P3almin[[n]] = {P3alminx[[n]], P3alminy[[n]], P3alminz[[n]]};]

P3almax = Range[Length[alsopontokmax]];
P3almaxx = Range[Length[alsopontokmax]];
P3almaxy = Range[Length[alsopontokmax]];
P3almaxz = Range[Length[alsopontokmax]];

For[n = 1, n - 1 < Length[alsopontokmax], n++,
P3almaxx[[n]] = -Stav2 * Sin[alsopontokmax[[n]]];
P3almaxy[[n]] = a * Cos[alsopontokmax[[n]]];
P3almaxz[[n]] = b * Sin[alsopontokmax[[n]]];
P3almax[[n]] = {P3almaxx[[n]], P3almaxy[[n]], P3almaxz[[n]]};]

```

```

P4felmin = Range [Length [felsopontokmin]];
P4felminx = Range [Length [felsopontokmin]];
P4felminy = Range [Length [felsopontokmin]];
P4felminz = Range [Length [felsopontokmin]];

For [n = 1, n - 1 < Length [felsopontokmin], n++,
P4felminx [ [n]] = d + Stav1 * Sin [felsopontokmin [ [n]]];
  P4felminy [ [n]] = a * Cos [felsopontokmin [ [n]]];
  P4felminz [ [n]] = b * Sin [felsopontokmin [ [n]]];
  P4felmin [ [n]] = {P4felminx [ [n]], P4felminy [ [n]], P4felminz [ [n]]};];

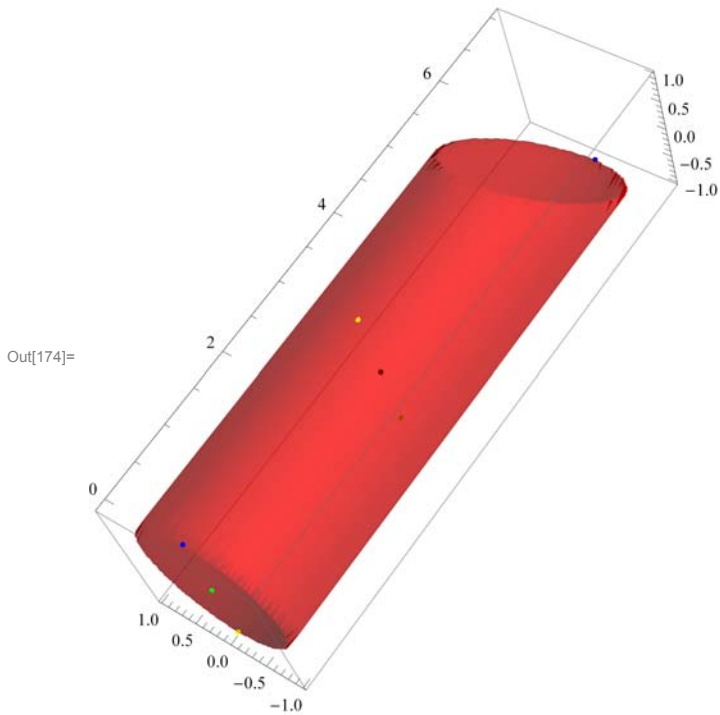
P4felmax = Range [Length [felsopontokmax]];
P4felmaxx = Range [Length [felsopontokmax]];
P4felmaxy = Range [Length [felsopontokmax]];
P4felmaxz = Range [Length [felsopontokmax]];

For [n = 1, n - 1 < Length [felsopontokmax], n++,
P4felmaxx [ [n]] = d + Stav1 * Sin [felsopontokmax [ [n]]];
  P4felmaxy [ [n]] = a * Cos [felsopontokmax [ [n]]];
  P4felmaxz [ [n]] = b * Sin [felsopontokmax [ [n]]];
  P4felmax [ [n]] = {P4felmaxx [ [n]], P4felmaxy [ [n]], P4felmaxz [ [n]]};];

If [Length [alsopontokmin] > 0,
  plot15 = ListPointPlot3D [P3almin, PlotStyle → {Yellow}], plot15 = {}];
If [Length [alsopontokmax] > 0,
  plot16 = ListPointPlot3D [P3almax, PlotStyle → {Blue}], plot16 = {}];
If [Length [felsopontokmin] > 0,
  plot17 = ListPointPlot3D [P4felmin, PlotStyle → {Yellow}], plot17 = {}];
If [Length [felsopontokmax] > 0,
  plot18 = ListPointPlot3D [P4felmax, PlotStyle → {Blue}], plot18 = {}];
Show [plot9, plot10, plot11, plot12, plot13, plot14,
  plot15, plot16, plot17, plot18]
Osszesstabilpont = Length [stabil] + Length [plot13] + Length [plot14];
Osszesinstabilpont = Length [instabil] + Length [P3almax] + Length [P4felmax];
Osszesnyeregypont = Length [nyereg] + Length [P3almin] + Length [P4felmin];

Osszesstabilpont && Osszesinstabilpont && Osszesnyeregypont
a && b && d
A1 && C1 && A2 && C2

```



Out[178]= 2 && 2 && 2

-1 && 0.00872687 && 1 && 1.

```

file = "proba.csv"
If[FileExistsQ[file],
  str = OpenAppend[file];
  Write[str, a && b && d && A1 / C1 && A2 / C2 &&
    Osszesstabilpont && Osszesinstabilpont && Osszesnyeregpoint];
  Close[str];
,
str = OpenWrite[file];
Write[str, a && b && d && A1 / C1 && A2 / C2 &&
  Osszesstabilpont && Osszesinstabilpont && Osszesnyeregpoint];
Close[str];]

```



```

p1 = {0, 0, 0};
normvec1 = {A1, B1, C1};
B1 = 0;
p2 = {d, 0, 0};
normvec2 = {A2, B2, C2};
B2 = 0;

ellip =  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ ;
ineq1 =  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1$ ;
sik1 = A1 (x - p1[[1]]) + B1 (y - p1[[2]]) + C1 (z - p1[[3]]);
eq2 = A1 (x - p1[[1]]) + B1 (y - p1[[2]]) + C1 (z - p1[[3]]) == 0;
sik2 = A2 (x - p2[[1]]) + B2 (y - p2[[2]]) + C2 (z - p2[[3]]);
eq3 = A2 (x - p2[[1]]) + B2 (y - p2[[2]]) + C2 (z - p2[[3]]) == 0;
Solve[eq2, x];
Solve[eq3, x];
ineq2 = x >= -  $\frac{C1 z}{A1}$ ;
ineq3 = x <= (A2 d - C2 z) / A2;
ineq = {ineq1, ineq2, ineq3};

file = "feles+.csv"

```

```

a = 0.5;
b = 1;
A1 = -1;
A2 = 1;
felsoszog = 10;
C1 = -1 / N[-Cot[alsoszog Degree]];
C2 = 1 / N[Cot[felsoszog Degree]];

```

```

For[alsoszog = 9, alsoszog > 0.1, alsoszog = alsoszog - 1,
  For[d = 15, d > C1 + C2, d = d - 0.1,

```

$$V = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} 1 \, dx \, dz \, dy;$$

$$Sx = \frac{1}{V} \left(\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} x \, dx \, dz \, dy \right);$$

$$Sy = \frac{1}{V} \left(\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} y \, dx \, dz \, dy \right);$$

$$Sz = \frac{1}{V} \left(\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}^{\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \int_{-\frac{C1 z}{A1}}^{\frac{A2 d - C2 z}{A2}} z \, dx \, dz \, dy \right);$$

```
Stav1 = -1 * b * C2 / A2;
```

```
Fx = d - Stav1;
```

```

Gx = d + Stav1;
Stav2 = b * C1 / A1;
Hx = 0 - Stav2;
Ix = 0 + Stav2;

palast[v_, j_] =
  Sqrt[(j + Stav1 * Sin[v] - Sx) ^ 2 + (a * Cos[v] - Sy) ^ 2 + (b * Sin[v] - Sz) ^ 2];
palastj[v_, j_] = D[palast[v, j], {j, 1}];
palastv[v_, j_] = D[palast[v, j], {v, 1}];
palastjj[v_, j_] = D[palast[v, j], {j, 2}];
palastvv[v_, j_] = D[palast[v, j], {v, 2}];
palastvj[v_, j_] = D[palast[v, j], v, j];

hesse[v, j] = palastvv[v, j] * palastjj[v, j] - palastvj[v, j] ^ 2;

behlista01 = Solve[palastj[v, j] == 0 && palastv[v, j] == 0 && hesse[v, j] > 0 &&
  palastjj[v, j] > 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];
behlista02 = Solve[palastj[v, j] == 0 && palastv[v, j] == 0 && hesse[v, j] > 0 &&
  palastjj[v, j] < 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];
behlista03 = Solve[palastj[v, j] == 0 && palastv[v, j] == 0 &&
  hesse[v, j] < 0 && j > d - Fx - Ix && j < d && v > 0 && v < 2 π, {v, j}];

stabilpontokszöge = v /. behlista01;
instabilpontokszöge = v /. behlista02;
nyeregpontokszöge = v /. behlista03;
stabilpontoktávolsága = j /. behlista01;
instabilpontoktávolsága = j /. behlista02;
nyeregpontoktávolsága = j /. behlista03;

stabil = Range[Length[stabilpontokszöge]];
instabil = Range[Length[instabilpontokszöge]];
nyereg = Range[Length[nyeregpontokszöge]];

f[u_, v_] = Sqrt[
  (d + u * Stav1 * Sin[v] - Sx) ^ 2 + (u * a * Cos[v] - Sy) ^ 2 + (u * b * Sin[v] - Sz) ^ 2];
fu[u_, v_] = D[f[u, v], {u, 1}];
fv[u_, v_] = D[f[u, v], {v, 1}];
fuu[u_, v_] = FullSimplify[D[f[u, v], {u, 2}]];
fvv[u_, v_] = D[f[u, v], {v, 2}];
fuv[u_, v_] = D[f[u, v], u, v];

g[r_, t_] = Sqrt[
  (-r * Stav2 * Sin[t] - Sx) ^ 2 + (r * a * Cos[t] - Sy) ^ 2 + (r * b * Sin[t] - Sz) ^ 2];
gr[r_, t_] = D[g[r, t], {r, 1}];
gt[r_, t_] = D[g[r, t], {t, 1}];
grr[r_, t_] = D[g[r, t], {r, 2}];
gtt[r_, t_] = D[g[r, t], {t, 2}];
grt[r_, t_] = D[g[r, t], r, t];

behlista1 =
  Solve[fu[u, v] == 0 && fv[u, v] == 0 && u > 0 && u < 1 && v > 0 && v < 2 π, {u, v}];

```

```

behlista2 =
  Solve[gr[r, t] == 0 && gt[r, t] == 0 && r > 0 && r < 1 && t > 0 && t < 2 π, {r, t}];

gg[t_] =
  Sqrt[(-Stav2 * Sin[t] - Sx)^2 + (a * Cos[t] - Sy)^2 + (b * Sin[t] - Sz)^2];
gg[t_] = D[gg[t], {t, 1}];
ggtt[t_] = D[gg[t], {t, 2}];

behlista31 = Solve[gg[t] == 0 && t > 0 && t < 2 π && ggtt[t] > 0];
behlista32 = Solve[gg[t] == 0 && t > 0 && t < 2 π && ggtt[t] < 0];

ff[v_] =
  Sqrt[(d + Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (a * Cos[v] - Sy)^2 + (b * Sin[v] - Sz)^2];
ffv[v_] = D[ff[v], {v, 1}];
ffvv[v_] = D[ff[v], {v, 2}];

behlista41 = Solve[ffv[v] == 0 && v > 0 && v < 2 π && fvv[v] > 0];
behlista42 = Solve[ffv[v] == 0 && v > 0 && v < 2 π && fvv[v] < 0];

felsopalastel[v_, j_] =
  Sqrt[(j + Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (a * Cos[v] - Sy)^2 + (b * Sin[v] - Sz)^2];
felsopalastelderivalt[v_, j_] = D[felsopalastel[v, j], j];
felsolapel[v_, u_] = Sqrt[
  (d + u * Stav1 * Sin[v] - Sx)^2 + (u * a * Cos[v] - Sy)^2 + (u * b * Sin[v] - Sz)^2];
felsolapelderivalt[v_, u_] = D[felsolapel[v, u], u];
alsopalastel[t_, k_] =
  Sqrt[(k - Stav2 * Sin[t] - Sx)^2 + (a * Cos[t] - Sy)^2 + (b * Sin[t] - Sz)^2];
alsopalastelderivalt[t_, k_] = D[alsopalastel[t, k], k];
alsolapel[t_, r_] = Sqrt[
  (-r * Stav2 * Sin[t] - Sx)^2 + (r * a * Cos[t] - Sy)^2 + (r * b * Sin[t] - Sz)^2];
alsolapelderivalt[t_, r_] = D[alsolapel[t, r], r];

felsopontokmin = v /. behlista41;
alsopontokmin = t /. behlista31;
felsopontokmax = v /. behlista42;
alsopontokmax = t /. behlista32;

For[i = Length[felsopontokmin], i > 0, i = i - 1,
  If[felsopalastelderivalt[felsopontokmin[[i]], d] > 0 &&
    felsolapelderivalt[felsopontokmin[[i]], 1] > 0, ,
    felsopontokmin = Delete[felsopontokmin, i]];
For[i = Length[alsopontokmin], i > 0, i = i - 1,
  If[-alsopalastelderivalt[alsopontokmin[[i]], 0] > 0 &&
    alsolapelderivalt[alsopontokmin[[i]], 1] > 0, ,
    alsopontokmin = Delete[alsopontokmin, i]];
For[i = Length[felsopontokmax], i > 0, i = i - 1,
  If[felsopalastelderivalt[felsopontokmax[[i]], d] > 0 &&
    felsolapelderivalt[felsopontokmax[[i]], 1] > 0, ,
    felsopontokmax = Delete[felsopontokmax, i]];
For[i = Length[alsopontokmax], i > 0, i = i - 1,
  If[-alsopalastelderivalt[alsopontokmax[[i]], 0] > 0 &&
    alsolapelderivalt[alsopontokmax[[i]], 1] > 0, ,

```

```

    alsopontokmax = Delete[alsopontokmax, i]];

alsopontokmax;
alsopontokmin;
felsopontokmax;
felsopontokmin;

Osszesstabilpont = Length[stabil] + Length[behlista1] + Length[behlista2];
Osszesinstabilpont =
  Length[instabil] + Length[alsopontokmax] + Length[felsopontokmax];
Osszesnyeregypont = Length[nyereg] + Length[alsopontokmin] +
  Length[felsopontokmin];

If[FileExistsQ[file],
  str = OpenAppend[file];
  Write[str, a && b && d && A1 / C1 && A2 / C2 &&
    Osszesstabilpont && Osszesinstabilpont && Osszesnyeregypont];
  Close[str];
,
  str = OpenWrite[file];
  Write[str, a && b && d && A1 / C1 && A2 / C2 &&
    Osszesstabilpont && Osszesinstabilpont && Osszesnyeregypont];
  Close[str];];
];
];
Close[str];

feles+.csv

```

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::ratnz : Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

General::stop : Further output of Solve::ratnz will be suppressed during this calculation. >>

General::openx : OutputStream[feles+.csv, 1422] is not open. >>