

Súrlódó közegben növekvő, rugalmas rúd alakjának kísérleti vizsgálata

TDK konferencia 2017

Szerző: Horváth Marcell Gergely
Konzulensek: Dr. Sipos András Árpád, Dr. Várkonyi Péter

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék



M Ú E G Y E T E M 1 7 8 2

Tartalomjegyzék

Absztrakt.....	- 3 -
Bevezetés.....	- 4 -
Kísérletek ismertetése	- 6 -
Anyagtulajdonság.....	- 9 -
Surlódás.....	- 9 -
Rugalmassági modulus.....	- 10 -
Tapasztalatok	- 11 -
A kísérleti és modell eredményeinek összevetése.....	- 12 -
Befogás és végpont közötti távolság.....	- 14 -
Végpontok távolságának deriváltja.....	- 15 -
Legnagyobb szélesség.....	- 16 -
Inflexiós pontok száma.....	- 17 -
Ívhossz az önérintkezés fellépésekor.....	- 18 -
Érintési pontok koordinátái.....	- 18 -
Alakok összehasonlítása.....	- 19 -
Összefoglalás	- 20 -
Hivatkozások	- 21 -

Absztrakt

Sipos András és Várkonyi Péter közös munkájukban egyik végén növekedő, rugalmas rúd súrlódó közegben kialakuló alakját vizsgálják. A síkbeli, kezdetben egyenes, egyik végén befogott, a másik végén szabadon elmozduló rúd a befogott vége felől egyre hosszabbá válik. Az idő előrehaladtával a rúd instabillá válik a növekvő súrlódás hatására, meggörbül, alakja gyakran fekvő 8-ashoz hasonló lesz, miközben a rúd két végpontja közötti távolság egy véges értékhez közelít. A jelenség matematikai modelljének leírása mellett számítógépes algoritmust készítettek, amellyel a rúd alakjának időbeni fejlődése vizualizálható.

Dolgozatom célja ezen munka elméleti eredményeinek összehasonlítása fizikai kísérletekkel. Két, egymástól rögzített távolságra lévő plexilap közé a végén befogott, rugalmas, körgyűrű keresztmetszetű kábeleket vezettem be. A súrlódás mértékét a plexilapok leterhelésének változtatásával befolyásoltam, ezen felül különböző anyagú és vastagságú rudakkal, kábelekkel végeztem kísérleteket. Ezek után kiválasztottam a legmegfelelőbb kábelt, annak anyagtulajdonságait (rugalmassági modulus) és a Coulomb-féle súrlódási tényezőt laborkísérletekkel határoztam meg. A kábeleket addig toltam a lapok közé, amíg a rúd alakja a fekvő 8-ashoz hasonló zárt alakot el nem érte. A létrejövő alakokat a plexi lapokra merőleges irányból lefotóztam, majd egy görbefelismerő szoftverrel meghatároztam a görbék egyes pontjainak a koordinátáit. A kísérleti eredményeket a számítógépes modellel számított alakokkal vettem össze. Az összehasonlítás azt mutatja, hogy ideális kísérleti körülmények között, valamint a modellszámítások során megfelelő paraméterek választásával, az elméleti és a kísérleti eredmények jó egyezést mutatnak.

A vizsgálataim jelentőségét az adja, hogy hasonló stabilitásvesztés játszódhat le a növények gyökereinek növekedésekor, illetve karcsú robotmanipulátorok működése során.

Bevezetés

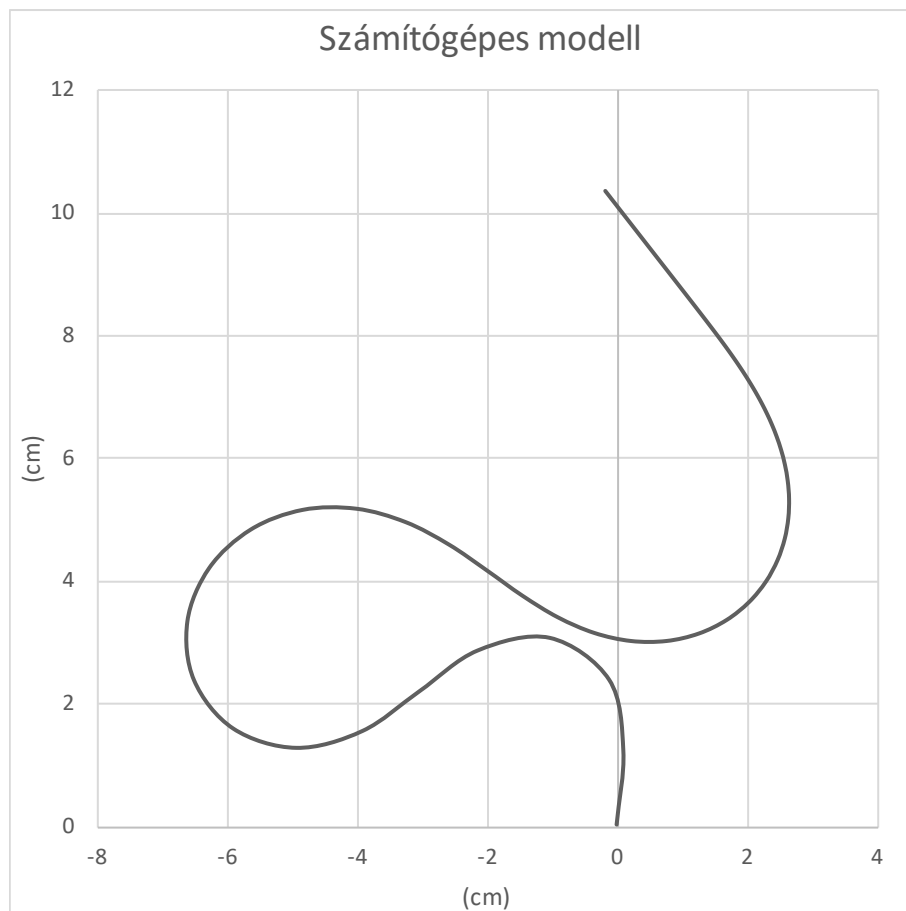
Sipos András és Várkonyi Péter közös munkájukban egyik végén növekedő, rugalmas rúd súrlódó közegben kialakuló alakját vizsgálják. A klasszikus rugalmasságtanban [1, 2] a stabilitásvesztés akkor következik be, ha egy változó paraméter (pl.: a teher intenzitása) átlép egy kritikusértéket. A vizsgált modellben a változó paraméter szerepét a rúd növekedése játssza. A növekedés okozza a rúd egyenletes mozgását, amit a súrlódás akadályoz.

A síkbeli modellben a rúd csak az előre rögzített síkban tud meggörbülni. A karcsú rúd hajlítás hatására a Bernoulli-Euler rúdmodellnek megfelelően viselkedik, az axiális és a nyírási deformációkat a modell nem veszi figyelembe. A rúd merevsége így egyetlen paraméterrel, az YI hajlítási merevséggel jellemezhető, ahol Y a Young modulus, I a keresztmetszet inerciája. A rúd minden pontja a síkon súrlódik. A modellben szerepel Coulomb és viszkózus súrlódás is, jelen dolgozatban csak a Coulomb-féle súrlódásra koncentrálnak. Feltesszük, hogy a sík és a rúd közötti nyomóerő konstans, ami μ nagyságú, fajlagos, a rúd hossza mentén egyenletesen megoszló súrlódási erőt eredményez az egyes pontok mozgásával ellentétes irányban. A modell kvázi-statisztikus módon, azaz egymást követő egyensúlyi helyzetek sorozataként állítja elő az egyensúlyi rúd alakot, dinamikus hatások és a rúd önérintkezéseinek kezelésére nem alkalmas. A rúd alakját az s paraméter írja le, az $s=0$ rúdvég befogott (itt történik a növekedés), az $s=1$ rúdvég, ami a síkon szabadon elmozdulhat. A növekedés során a rúd paraméterezése rögzített, azaz tetszőleges Δs paraméter-különbségű pontok fizikai távolsága az ívhossz mentén fokozatosan növekszik. A növekedésről feltesszük, a rúd minden pontjában és minden időpontban ismert értékű függvénnyel leírható.

A levezetett, negyedrendű parciális differenciálegyenlet rendszer triviális, azaz egyenes rúd alaknak megfelelő megoldásainak stabilitásával kapcsolatban kimutatták, hogy azok véges időintervallumon stabilak, utána instabillá válnak. Ez a fajta viselkedés matematikailag nehezen definiálható, hiszen a stabilitás klasszikus fogalmai nem alkalmazhatóak véges időintervallumokra. Ezért definiálták a véges idejű exponenciális stabilitást, amellyel ilyen jellegű rendszerek jellemezhetőek. Ezen felül ismertetik a különbséget ezen jelenség és a kihajlás között. Szemben a klasszikus rugalmasságtani esetekkel, amikor hirtelen következik be a stabilitásvesztés, itt a kihajlott alak lassan, hosszú ideig tartó növekedés hatására válik láthatóvá

A matematikai modell leírása mellett, számítógépes algoritmust készítettek a jelenség modellezésére. Az algoritmus az egyenletből származtatható egyensúlyi egyenletek ún. gyenge alakját oldja meg véges elem módszer segítségével. A modell implementálását a FEniCS keretrendszerben [3] hajtották végre, az időfejlődést megfelelően kis Δt időlépésekkel modellezve.

Kétféle esetet vizsgáltak. Az elsőben a rúd minden pontjában egyenletesen növekszik, a másodikban a befogott vég felől válik egyre hosszabbá. Jelen dolgozat célja az imént vázolt modell összevetése kísérleti eredményekkel olyan módon, hogy a modell numerikus szimulációjával kapott rúdalakokat a kísérletekben megfigyelt alakokkal hasonlítom össze. Mivel az egy végen bekövetkező növekedés kísérleti megvalósítása lényegesen egyszerűbb, mint a teljes hossz mentén bekövetkező növekedésé, csak ezzel az esettel foglalkozom. A síkbeli, kezdetben egyenes, egyik végén befogott, a másik végén szabadon elmozduló rúd a súrlódás gátolta növekedés hatására előbb kihajlik, majd kanyargó mozgást végez. Az idő előrehaladtával egy 8-ashoz hasonló formát vesz fel, továbbá a rúd két végpontja közötti távolság egy véges értékhez közelít. (1. ábra)

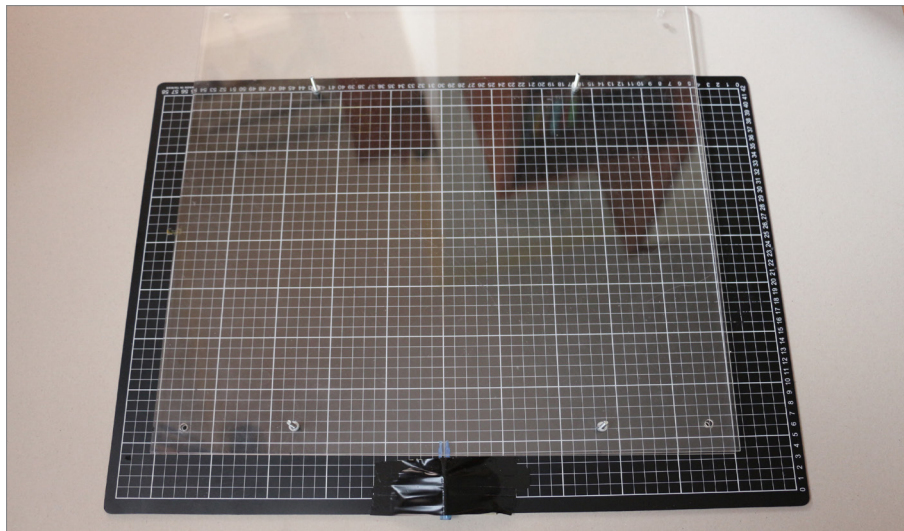


1.ábra: A számítógépes algoritmus által számított alak.

Ilyen jellegű stabilitásvesztés játszódhat le a növények gyökereinek növekedésekor[4], illetve karcsú robotmanipulátorok működése során [5]. Hasonló jelenségek következhetnek be erekbe vezetett katétereknél, illetve a védőcsőbe húzott kábeleknél is.

Kísérletek ismertetése

A kísérletek megkezdéséhez a súrlódó közeget kellett modelleznem. Olyan anyagból kellett elkészítenem a berendezést, amely súrlódása elég nagy, hogy hatékonyan el lehessen végezni a kísérletet és átlátszó, hogy mindezt látni és dokumentálni is lehessen. Választásom végül két egymástól rögzített távolságra lévő plexilapra esett, melyek közé be tudom vezetni a rugalmas rudakat. A plexilapok 50*50 cm nagyságúak; 3 mm vastagok voltak, egymáshoz 4 db átmenő csavarral rögzítettem azokat (2. ábra). Kezdetben a csavarok a lapok négy sarkán voltak elhelyezve, de a lehajlás a táblák közepénél túl nagy volt, ami egyenetlen súrlódást okozott. Előfordult a bedugott cső megugrása a hirtelen súrlódáscsökkenés miatt. Később a csavarokat 10-10 cm-rel beljebb mozdítottam, így jóval kisebb lett a lehajlás. A plexilapok közötti távolságot csavaralátétek behelyezésével tudtam szabályozni, a kísérletek folyamán a plexilapok távolsága mindig közel azonos volt az épp vizsgált rúd vastagságával.

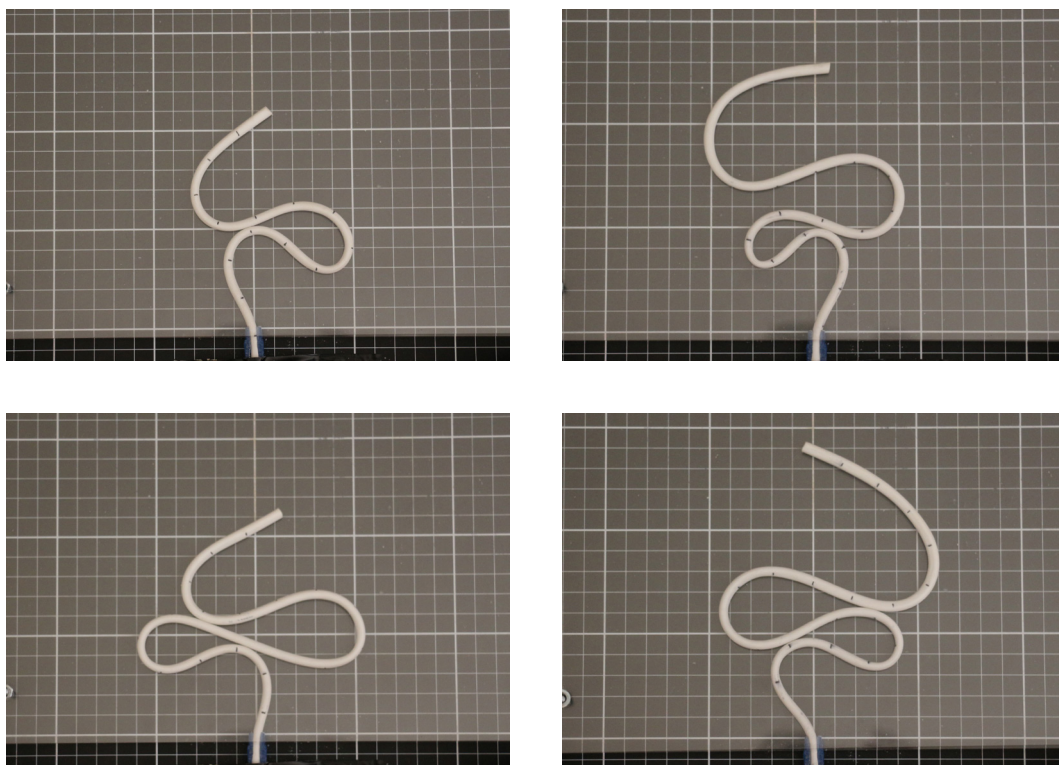


2. ábra: Az elkészített kísérleti berendezés.

A rudak kiválasztásánál szintén fontos volt, hogy a súrlódása kellőképpen nagy legyen, és anyaga rugalmas legyen, vagyis ne szenvedjen a kísérletek során jelentős maradandó alakváltozást. Kezdetben többféle vastagságú elektromos kábellel kísérleteztem, de azok a bennük lévő fém vezetősálak miatt kismértékű maradékalakváltozás következtében sorozatosan nagyon hasonló alakokat kezdtek felvenni a kísérletek során (mindig ugyanott és ugyanarra kezdtek meggyömbülni). Tömör gumi, vagy lágy műanyag rúd, kábel lett volna ideális, ezért felmerült a „gumipók” használata is. Ez viszont a több vékony gimiszál összefonásával készül, így nem alkalmas a kísérlet végrehajtására. Következő anyag az ún. hajlítóbetétek voltak. Ez egy kb. 11 mm átmérőjű 40 cm hosszú tömör gumi rúd, azonban ez ilyen vastagság mellett túl rövid volt a kísérlethez. Végül egy viszonylag vékony, ~5 mm átmérőjű vezeték lett az ideális, melyből kihúztam a fém vezetősálakat, így egy körgyűrű keresztmetszetű kellően rugalmas gumi rudat kaptam.

A kísérletek során a kábelnek befogottnak kellett lennie. A befogást a kábel átmérőjével közel azonos belső átmérőjű műanyag csőből készítettem, melynek a végeit bevágtam, így becsúszathatóvá vált a plexilapok közé. A csövet ragasztószalaggal rögzítettem az alaphoz.

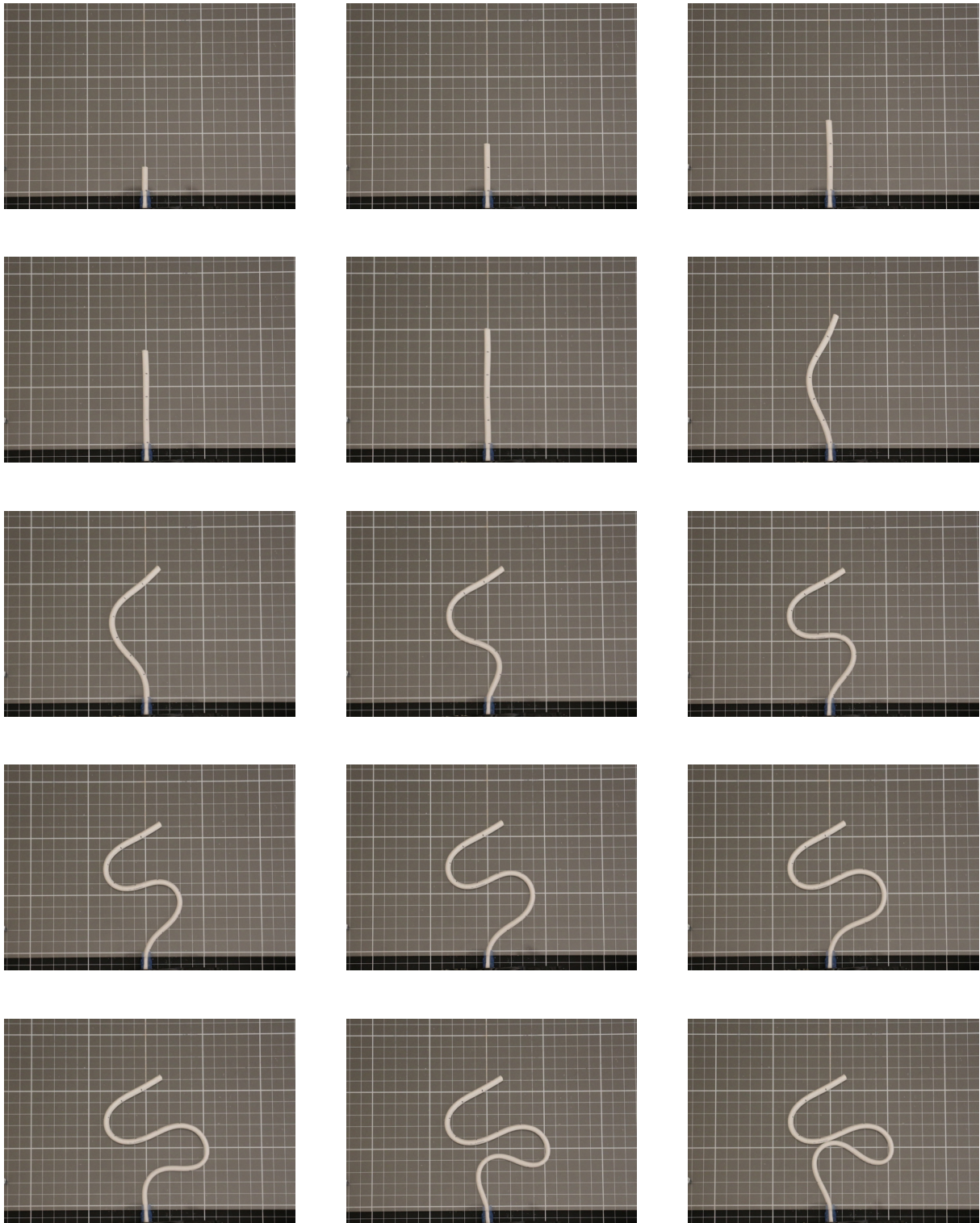
A kísérletek során a rudakat addig vezettem a plexilapok közé, amíg a folyamatos alakváltozás következtében a kábel saját magához nem ér, majd fel nem veszi a fekvő 8-ashoz közelítő alakot. Az első kísérleteknél csak a végállapotot fényképeztem le (3. ábra).



3. ábra: Néhány tipikus végállapot, jól látszódnak az "S" és a fektetett 8-ashoz hasonló alakok.

Későbbiekben jelölésekkel 2 cm-es egységekre osztottam a kábelt és minden egység bevezetése után lefotóztam, így egy összefüggő sorozatot kapva. Ezek minden alkalommal azt mutatták, hogy a rúd eleinte közel egyenes marad majd amikor elkezd meggörbülni a szabad vége „letapad”. A letapadt vég a továbbiakban a helyén marad, ez alatt kezd el a rúd előbb az S alakot majd később a fektetett 8-ashoz hasonló alakot felvenni. (4. ábra)

Az egyes fázisokat, ill. a végállapotokat minden esetben lefotóztam, a fotókat a plexilapok síkjára merőlegesen készítettem. A mérések elősegítése érdekében a kísérleteket egy 1 cm-es raszterű négyzetháló fölött végeztem. A képekből egy görbefelismerő szoftverrel [6] meghatároztam a görbék egyes pontjainak koordinátáit, így digitálisan felrajzolhatóvá vált a görbe. A görbék digitalizálását csak az első érintésig végeztem, mert a számítógépes modell is csak az első érintésig tudja modellezni a jelenséget, az érintés helyén erőátadás történik, melyet a modell nem tud figyelembe venni. A szoftver a görbe mentén közel egyenletes sűrűséggel határozta meg a görbe pontjait, majd a koordinátákat cm-ben adta meg az általam a képen kijelölt origóhoz képest.



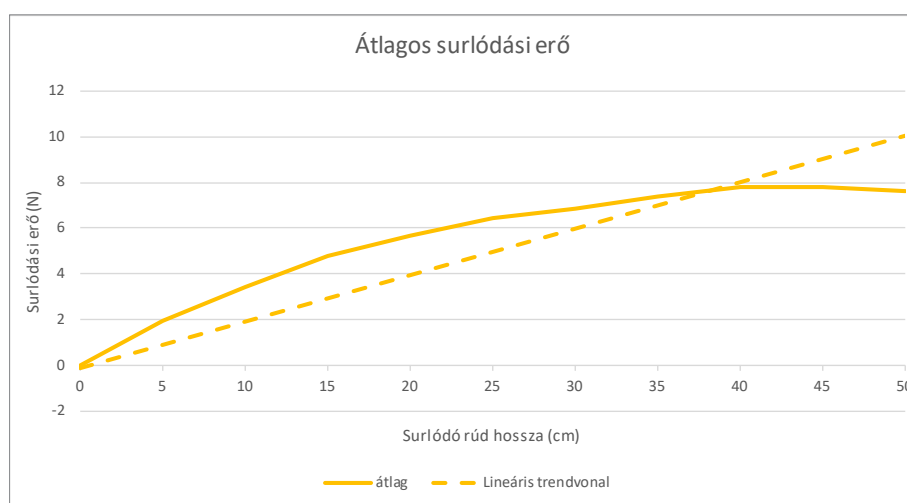
4. ábra: Egy sorozat fényképei.

Anyagtulajdonságok

A kísérletek és a számítógépes modell összehasonlításához szükség volt a modell paraméterek (μ és YI) meghatározására, azaz a kábel kihúzása közben fellépő súrlódási erőre, a kábel rugalmassági modulusára és keresztmetszeti inerciájára.

Súrlódás

A súrlódás meghatározásához 5 cm-ként bejelöltem a kábelt, és 50 cm hosszan beraktam a két plexilap közé. A kábelt egyenletes, körülbelül 1 cm/s-os sebességgel húztam ki a két plexilap közül, erőmérő segítségével megállapítottam a húzóerőt. Összesen 20 kihúzást végeztem, 10-et a kísérleteknek megfelelő irányban, 10-et (a négyzet alakú táblán) rá merőlegesen. Ideális esetben az értékeknek lineárisan csökkenőknek kellett volna lenniük, azonban egyre nagyobb ütemben csökkenő értékeket kaptam. Feltételezésem szerint a magyarázat a jelenségre, hogy a kábel sem tökéletesen egyenletes átmérőjű - 5,06 mm, 20 mérésre számított relatív szórása 0,027 – illetve a plexitábla is néhány tized millimétert behajlik a közepénél - annak ellenére, hogy korábban emiatt közelebb raktam a közepéhez a megtámasztó csavarokat ennek elkerülése érdekében - így amikor a kábel vastagabb része a tábla közepéhez ér, a lineárisan csökkenő értékekhez képest valamivel nagyobb értékeket kapok. Kétféle módszerrel számoltam ki a súrlódási erőt: átlagoltam a kihúzások során kapott értékeket, így 23,23 N/m-es fajlagos súrlódási erő adódott, 20 mérésre számított szórása 6,51 N/m; az ebből számított relatív szórás 0,280. Második módszer, hogy az átlagértékekre lineáris trendvonalat illesztettem, majd ebből kiszámoltam a fajlagos súrlódási erő értékét, ami így 20,03 N/m lett (5. ábra), a modellben ezt az értéket használtuk



5. ábra: Súrlódási erő átlagos értékei, és a rá illesztett trendvonal.

Rugalmassági modulus

A rugalmassági modulus meghatározásához szükséges húzási kísérleteket a Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék Czakó Adolf laboratóriumának ZWICK Z150 törőgépével végeztem. A húzás elmozdulás-vezérelt módon történt. 3-szor 3 kísérletet végeztem, Első sorozat 10 mm/perces, a második sorozat 20 mm/perces a harmadik sorozat 40 mm/perces sebességgel. A kísérletek során nem mentem el a szakadásig, 30 mm-es megnyúlásnál megállítottam a húzást.

A gumi általában nemlineáris tulajdonságokat mutat, azaz nem követi a Hooke törvényt. Esetünkben azonban a kezdeti értékek - abban a tartományban amilyen megnyúlást a hajlítás miatt a szélső szálban a súrlódási kísérletek közben feltételezünk - közel lineárisak, így alkalmazható rá a Hooke törvény. A húzókérdések során a mért értékekből feszültség-relatív megnyúlás diagramot készítettem. Az YI hajlítómerevség meghatározásához szükség volt továbbá a keresztmetszeti inercia meghatározására. Mivel a gumicső egyes keresztmetszetei némileg eltérnek, ezért 10 metszet átlagából határoztam meg az átmérőt, falvastagságot és ebből a keresztmetszeti területet. A méreteket tolómérővel határoztam meg, így az átmérő 5,06 mm; a falvastagság 0,53 mm; a keresztmetszeti terület 7,53 mm²-nek adódott 0,088-as relatív szórás mellett. Az ebből számított keresztmetszeti inercia: 19,61 mm⁴.

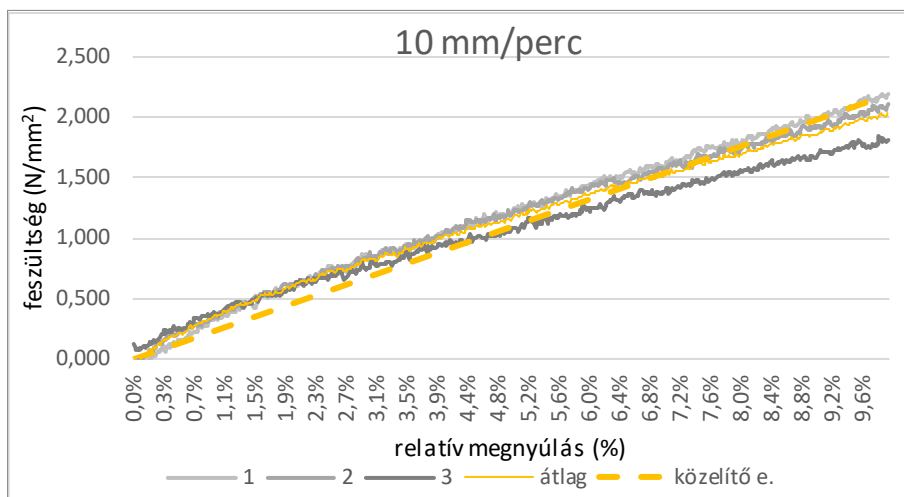
A rugalmassági modulus meghatározásához húzási kísérletek eredményeit a 0-10 %-os relatív megnyúlási tartományban vizsgáltam, hiszen a kísérletek során ennél nagyobb megnyúlás valószínűsége csekély. Mindhárom mérési sorozat eredményét átlagoltam, majd az átlagértékeket egyenessel közelítettem. A sigma–epsilon diagramok az első 2 %-os relatív megnyúlási tartományban csökkenő meredekségűek, azon túl közel lineárisak, így a Hooke törvény alkalmazása jó közelítést ad a rugalmassági modulus értékéről (6. ábra). A közelítő egyenesekből számított rugalmassági modulus értékek:

10 mm/perc: 21,49 N/mm²

20 mm/perc: 21,72 N/mm²

40 mm/perc: 25,49 N/mm²

Ezek átlaga: 22,90 N/mm²



6. ábra: Sigma-epsilon diagram, és a közelítő egyenes (hasonló készült 20 ill. 40 mm/perces sebességgel is).

Tapasztalatok

A kísérletek során körülbelül 100 végalakot fotóztam le. A keletkező alakok változatosak voltak, de megállapíthatunk néhány közös jellemzőt is. Kezdetben mindig közel egyenes maradt a cső, nagyjából 11-14 cm-es betolt hosszig, majd elkezdett kihajolni. A kihajlás a lassan, csak a cső továbbvezetése után következett be, hasonlóan a számítógépes szimulációhoz. Az oldalirányú kitérése a csőnek elért egy bizonyos határértéket, ekkor a cső felső harmada a helyén maradt, a további betolás hatására az alsó harmad kezdett el kitérni az ellenkező irányba (inflexió pontja lesz), így felvéve az S alakot. Az S alak felvétele után az imént ismertetthez hasonló módon kialakult egy újabb ív, mely az esetek túlnyomó többségében további betolás hatására hozzáért az első görbülethez (4. ábra). Innentől az érintkező felületek között már erőátadás van, így a további bevezetés már a többi görbét el tudja tolni. A fektetett 8-as alakot a következő görbület létrejötte után érte el, néha előfordult, hogy csak ilyenkor történt meg az első érintés. Általában a cső vége ~4 cm hosszon egyenes maradt, továbbá legtöbbször az első ív volt a legnagyobb, a továbbiak sorban egyre kisebbek voltak.

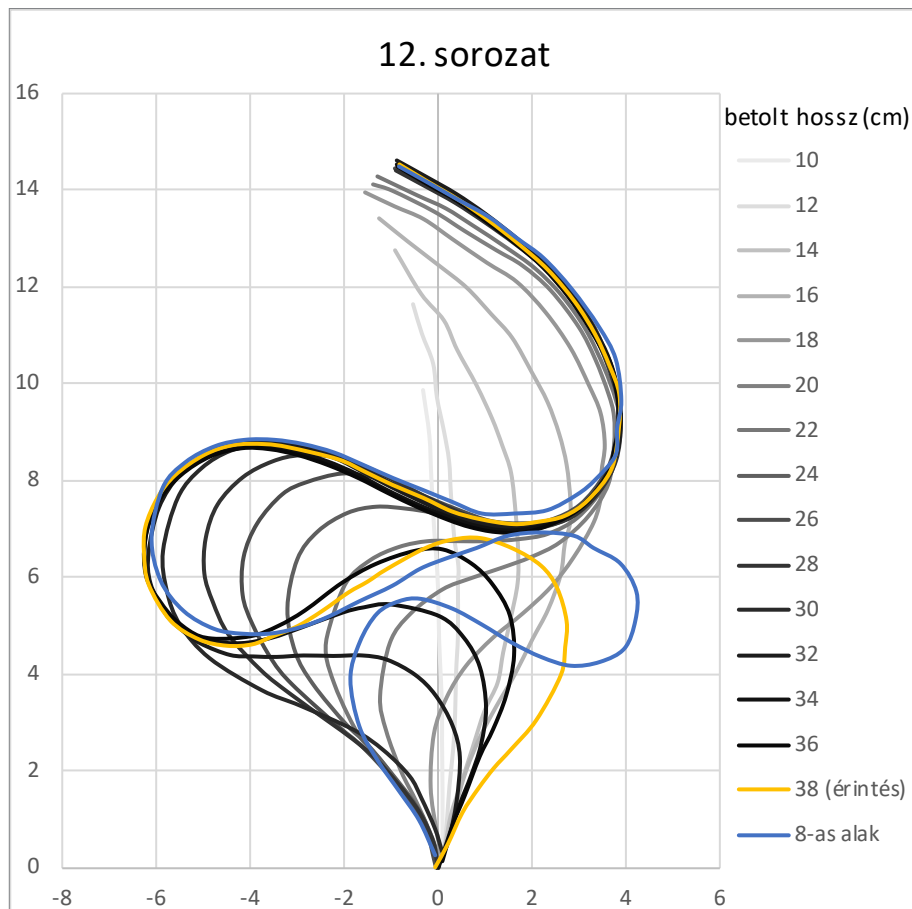
A fent leírtakból következik, hogy az első érintésig a görbe mindkét irányú kitérése limitált, a kísérletek során egy jól körülhatárolt téglalapról nem léptek ki. Fontos, még hogy az első érintés helye közel azonos volt minden kísérletnél.

A kísérleti és a számítás eredményeinek összevetése

A kísérletek során 12 fényképsorozat készült, egyenként körülbelül 20 fényképpel, melyek közül 8-at digitalizáltam. A görbefelismerő szoftver által meghatározott koordinátákat minden egyes lépésről Excel-táblába másoltam, majd felrajzoltam a görbéket (7. ábra). A görbéket úgy transzformáltam, hogy a végállapotban jobbra „induljon el” így megkönnyítve az összehasonlítást a számítógépes modellel. A tapasztalatok alapján az alábbi paramétereket határoztam meg:

- befogás és a végpont közötti távolság az ívhossz függvényében
- ezen távolság az ívhossz szerint deriválva
- legnagyobb szélesség az ívhossz függvényében
- inflexiós pontok száma az ívhossz függvényében
- ív hossz (a betolt cső hossza) az önérintkezés fellépésekor
- érintési pont koordinátái

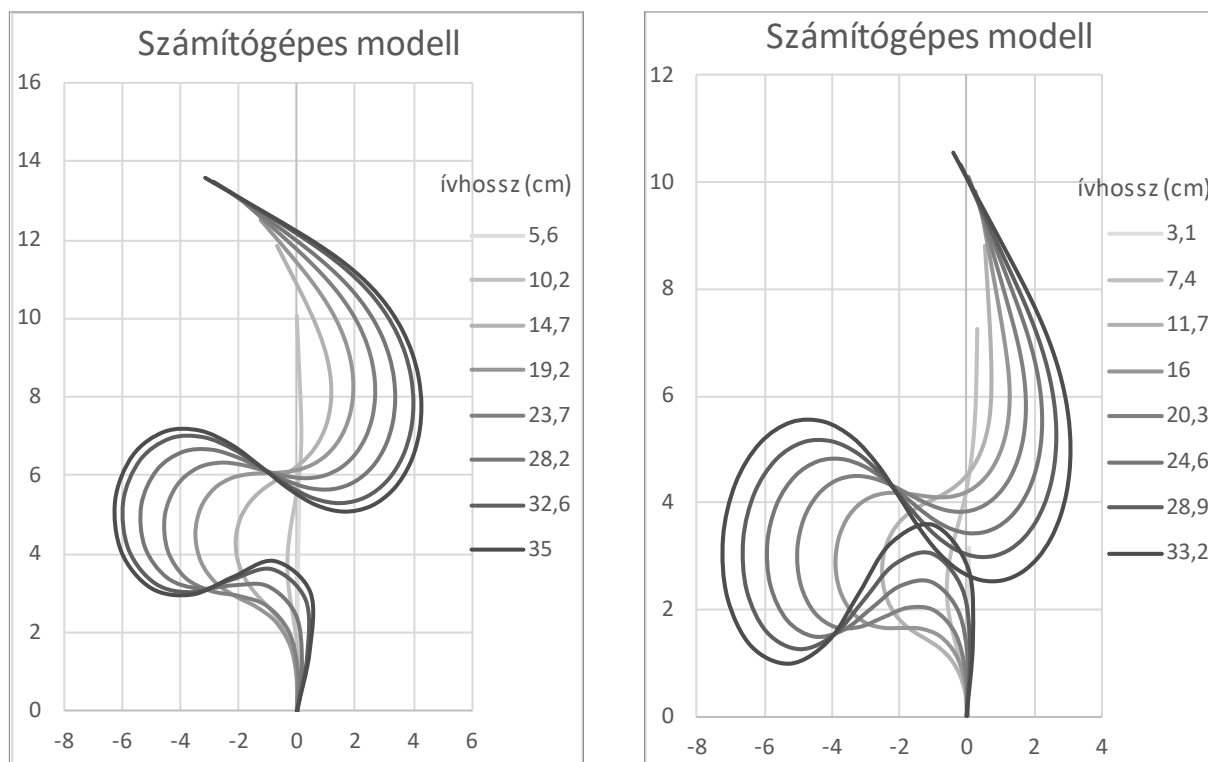
A görbe függvényének ismerete nélkül ezen paraméterek könnyen meghatározhatóak voltak, ezeket hasonlítottam össze a számítógépes modell által generált görbék hasonló paramétereivel. A számítógépes algoritmus segítségével két görbesorozat készült. Erre azért volt szükség, mert



7. ábra: Egy kísérleti sorozatból készült grafikon, látható az alak változása az ívhossz növekedésével, az érintés bekövetkezésekor (sárga) és a 8-as alak elérésekor (kék).

az algoritmus a rúd elején teljes befogással számol, ezzel szemben a kísérleteknél szemmel megállapítható, hogy a befogás nem tökéletes, ezért szükség volt egy részleges befogással számolt görbesorozatra is. A befogást egy $k=10000$ Ncm, a részleges befogást egy $k=10$ Ncm merevségű, az $s=0$ ponthoz rögzített csavarrúgóval modelleztük.

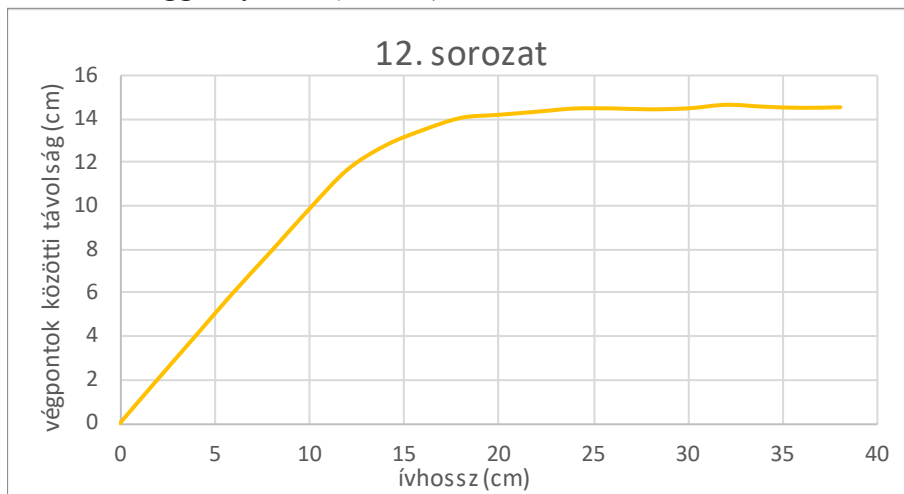
Az algoritmus által számolt görbék pontjainak ábrázolásakor megállapítható volt néhány különbség. A kézi kísérletek során, egy bizonyos betölt hossz fölött a csőnek csak a befogástól számított 12-14 cm-es darabja volt mozgásban, az azon túli rész a végponthoz hasonlóan nem vagy csak alig mozdult, "letapadt". Kivételt képez ez alól, ha az egész görbe megcsúszott. Ezzel szemben a számítógépes algoritmus eredményeinél a cső egész hossza mentén volt alakváltozás. Ennek az az oka, hogy a numerikus algoritmus technikai okok miatt a Coulomb súrlódás nemfolytonos erő-csúszási sebesség függvényét folytonos függvénnyel közelíti, így abban letapadás helyett lassú csúszás figyelhető meg. Más szavakkal: a numerikus modell a tapadó súrlódás modellezésére jelen formájában nem alkalmas. További szembetűnő különbség, hogy míg az algoritmus által generált ívek kialakulása nem egymás után történt (mint ahogy azt a tapasztalatok fejezetben ismertette van) hanem egyszerre alakultak ki, és az idő előrehaladtával mindkét ív egyszerre növekedett (8. ábra).



8. ábra: A számítógépes algoritmus által számított alakok. Balra a részleges befogással, jobbra a teljes befogással számított alakok.

Befogás és végpont közötti távolság

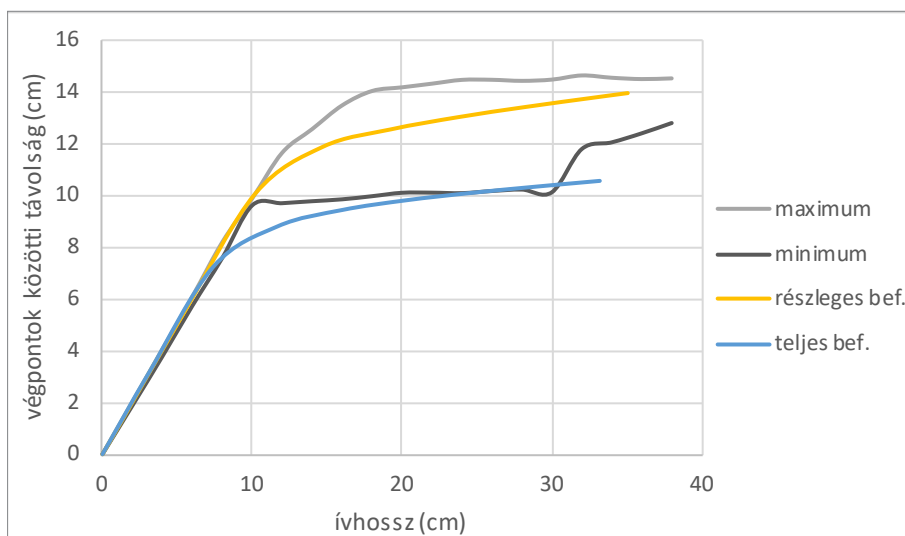
A számítógépes modell szerint a befogás és a végpont távolsága közelít egy véges értékhez, és a kézi kísérletek során is megfigyelhető volt ez a jelenség. Diagramokon ábrázoltam, a távolságot az ívhossz függvényében. (9. ábra)



9. ábra: Végpontok közötti távolság (hasonló készült a többi sorozatnál is).

Jól látható, hogy kezdetben közel egyenletesen nő a távolság, majd ellaposodik a diagram, a határérték elérésekor, mikor a rúd szabad vége letapad, közel vízszintessé válik. A végállapotban a 8 mérés közül a legkisebb távolság 10,12 cm; a legnagyobb 14,53 cm volt.

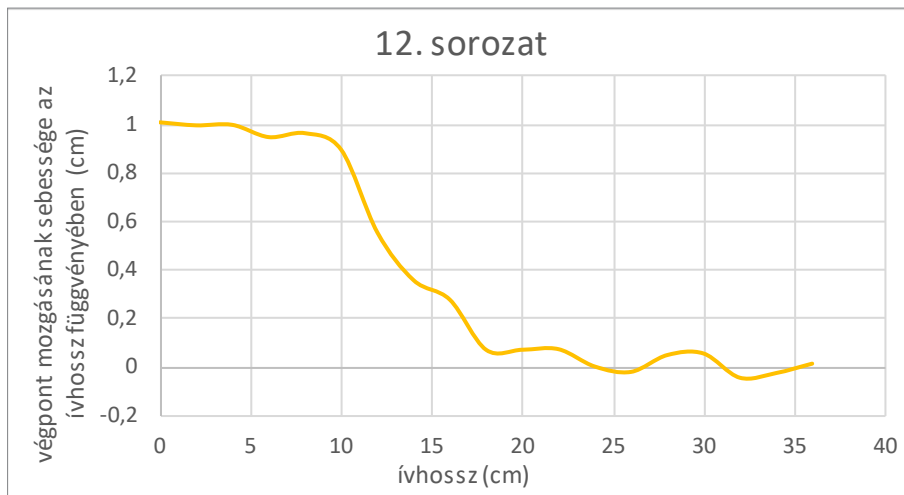
Az összehasonlíthatóság miatt a nyolc kézi kísérlet eredményeiből meghatároztam az egyes betölt csőhosszokhoz tartozó minimális, illetve maximális távolságot a végpont és a befogás között. Ezeket és az az algoritmus által kiszámolt koordinátákat szintén diagramon ábrázoltam (10. ábra). Jól látható, hogy a részleges befogással számolt görbe értékei nagyjából a tartomány közepén vannak, ugyanakkor a teljes befogással számolt görbe értékei is hasonló tulajdonságokat mutat, de a tartomány alján, azon kívül, kevéssel alatta helyezkedik el.



10. ábra: Végpontok közötti távolság: a kísérletek (szürk, fekete) és a számítógépes modell eredményeinek (sárga, kék) összehasonlítása.

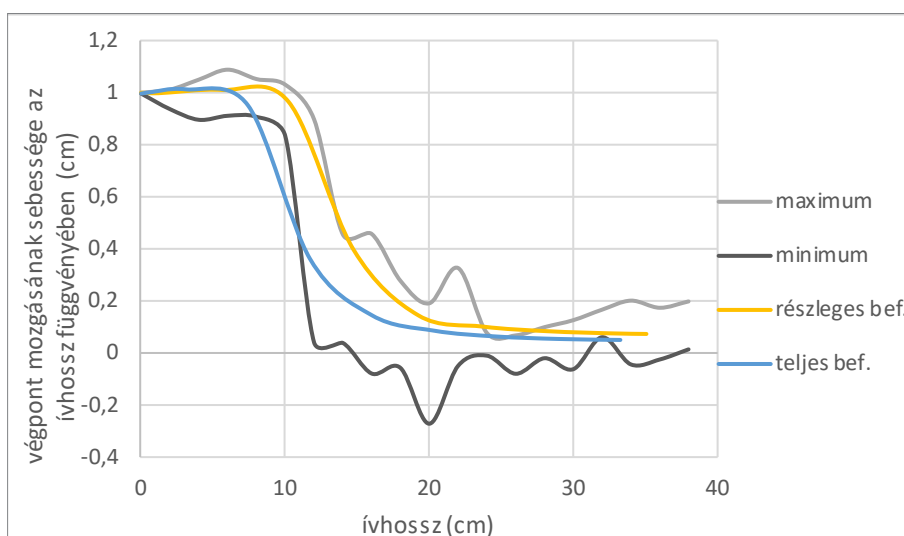
Végpontok távolságának deriváltja

A befogás és a végpont közötti távolság deriváltja a végpont mozgásának sebességét mutatja meg az ívhossz függvényében. Véges differenciahányadossal, közelítve határoztam meg. Megfigyelhető, hogy a végpont egyenletes sebességgel mozog addig, amíg a cső egyenes marad. Ahogy a cső kihajlik, lassulni kezd a rúdvég mozgása majd a határérték elérésével megáll, esetleg nagyon lassan mozog tovább (11. ábra).



11. ábra: Végpontok közötti távolság deriváltja az ívhossz szerint (hasonló készült a többi sorozatnál is).

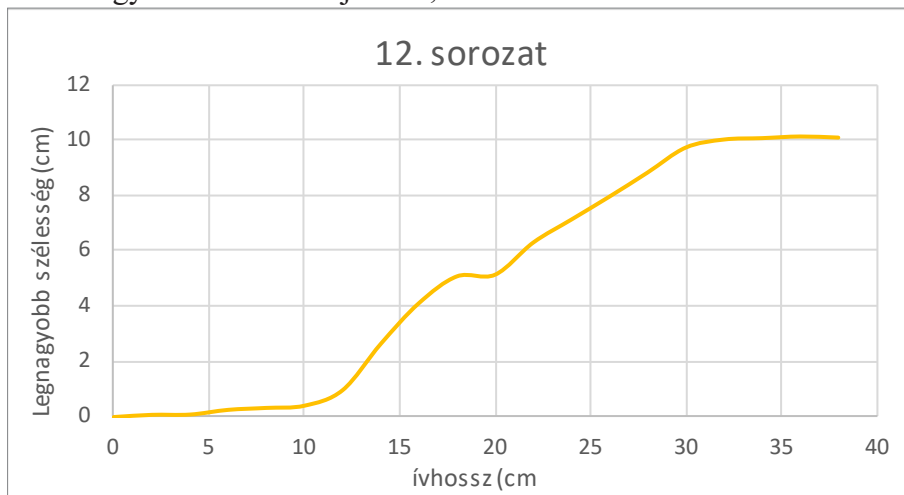
Az előző paraméterhez hasonlóan itt is ábrázoltam azt a tartományt, amelyben az értékek mozogtak az ívhossz függvényében, és összehasonlítottam az algoritmus által generált értékekkel (12. ábra). Mind a részleges, mind a teljes befogással számított görbék értékei a tartományon belül mozognak, a teljes befogásnál találunk csak egy kis eltérést, hamarabb kezd el csökkenni a sebeség értéke.



12. ábra: Végpontok közötti távolság deriváltja az ívhossz szerint: a kísérletek (szürk, fekete) és a számítógépes modell eredményeinek (sárga, kék) összehasonlítása.

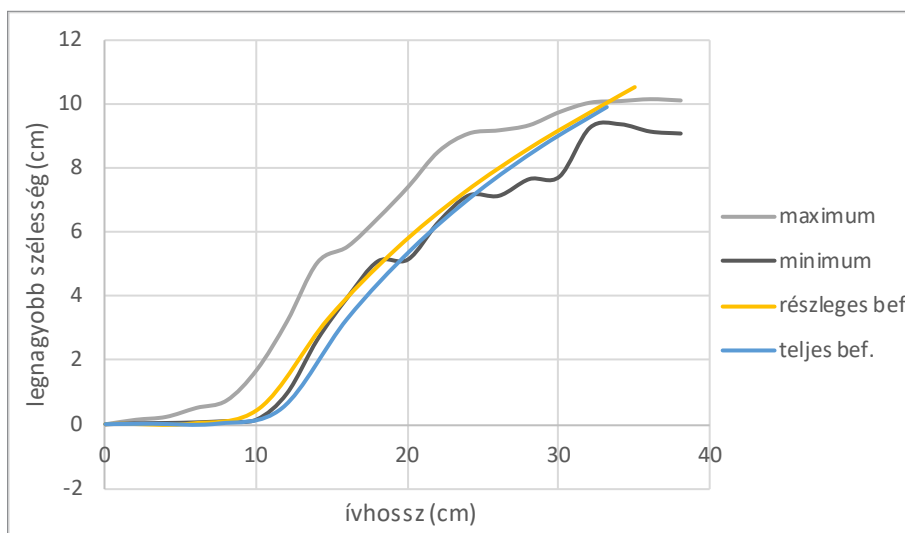
Legnagyobb szélesség

Ez a paraméter az egyes fázisokban a cső alakjának az x tengelyen mért legkisebb és legnagyobb értékének a különbségét mutatja meg. Az értékeket szintén grafikonon ábrázoltam, ismét az ívhossz függvényében, hasonlóan az előző paraméterekhez (13. ábra). Látható, hogy lépcsőzetes a függvény, amíg a cső egyenes, addig a szélesség is közel nulla. Amikor kihajlik, az oldalirányú kitérés egyenletesen nőni kezd, majd megáll, a szélesség értéke addig konstans, míg a második ív elkezd formálódni. Maximumát a második ív kialakulása után éri el, a harmadik ív csak nagyon ritkán tér ki jobban, mint az első.



13. ábra: legnagyobb szélesség (hasonló készült a többi sorozatnál is)

Az összehasonlítás szintén hasonló módon történt, mint az előző paramétereknél. Nagy különbség, hogy az algoritmus által számolt görbék szélességeinek értékei a kezdeti konstans 0 után közel lineárisan növekednek, nem mutatnak lépcsőzetes képet. Ez azzal magyarázható, hogy szimuláció során a két görbe egyszerre növekedik, nem egymás után, először jobbra, majd a második ív balra, mint a kísérleti eredményeknél (14. ábra). Mindkét számított görbe értékei először a tartomány alatt vannak, majd az első lépcsőnél belépnek a tartományba.



14. ábra: Legnagyobb távolság az ívhossz függvényében: a kísérletek (szürke, fekete) és a számítógépes modell eredményeinek (sárga, kék) összehasonlítása

Inflexiós pontok száma

Az inflexiós pontok számát táblázatban ábrázoltam. Egy mérés kivételével (megcsúszott az egész így ki tudott alakulni még egy ív) mindegyik görbének 3 inflexiós pontja volt az érintés pillanatában. A táblázatból is kiolvasható azon különbség, hogy a kísérlet ívei egymás után alakulnak ki, míg a számítógépes algoritmus ívei egyszerre kezdenek növekedni, tehát hamar és hirtelen 2 inflexiós ponttal rendelkeznek. Mindazonáltal a részleges befogással számolt görbe az ívhossz növekedésével egyre inkább hasonló számú inflexiós ponttal rendelkezik, mint a kísérleti görbék. A teljes befogást szimuláló számításoknál viszonylag hamar 3 inflexiós ponttal rendelkezik a görbe, ennek az az oka, hogy a befogásnál csak merőlegesen indulhat a görbe, míg a részleges befogást szimuláló számításoknál megengedett a szögelfordulás csakúgy, mint ahogy az a kísérleteknél történik.

ív hossz	2	3	5	6	7	8	11	12	részleges bef.	teljes bef.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
12	1	1	1	0	1	0	1	0	2	2
14	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3
16	2	1	2	1	1	1	1	1	2	3
18	2	2	2	1	2	1	2	2	2	3
20	2	2	2	1	2	2	2	2	2	3
22	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
24	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
26	2	3	3	2	2	2	3	2	2	3
28	3	3	3	2	2	2	3	2	3	3
30	3		3	3	3	3	3	2	3	3
32				3	3	3		3	3	3
34				3	3	3		3	3	
36					4			3	3	
38					4			3		

Ívhossz az önérintkezés fellépésekor

Minden kísérlet végén meghatároztam a bevezetett cső hosszát. Mivel a cső 2 cm-ként be volt jelölve, ezért szemre fél cm-es pontossággal tudtam meghatározni a hosszt. Az alábbi táblázat mutatja az értékeket:

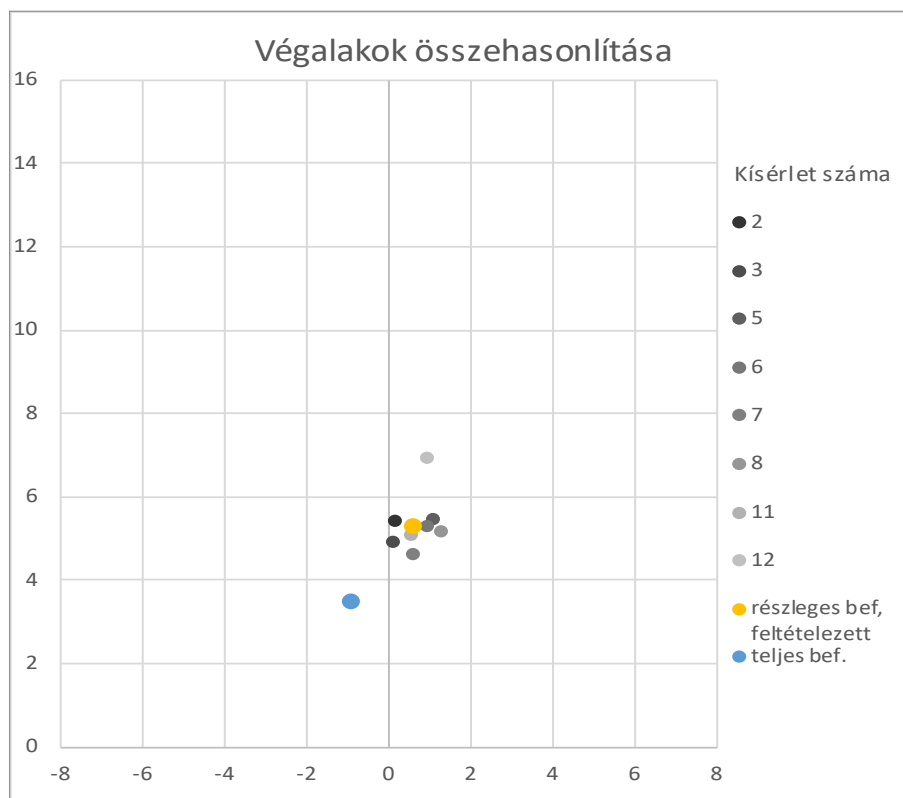
kísérlet száma	2	3	5	6	7	8	11	12	részleges befogás	teljes befogás
ív hossz (cm)	30	27,5	30	33,5	38,5	34	29,5	38	-	33

Sajnos az algoritmus által számolt második görbénél nem volt még érintés a számolt tartományon belül, feltételezni lehet, hogy kb. 40 cm-es ívhossz esetén bekövetkezik az érintés.

Érintési pontok koordinátái

Utolsó paraméter az érintési pont helye. A kísérleteknél az érintési pont közel azonos helyen volt minden esetben. Az X koordináták legnagyobb eltérése 1,12 cm, az Y koordinátáké pedig 2,02 cm volt. A teljes befogással számolt görbe érintési pontja eltér, ez valószínűleg a fentebb már részletezett okok miatt van. Sajnos a részleges befogással számolt görbe esetében nem volt érintési pont, de a felrajzolt görbesorozat alapján (4. ábra) megbecsülhető a pont koordinátája: $X=0,6$; $Y=5,3$. Ez pont jól illeszthető a kísérletek érintési pontjai közé (15. ábra).

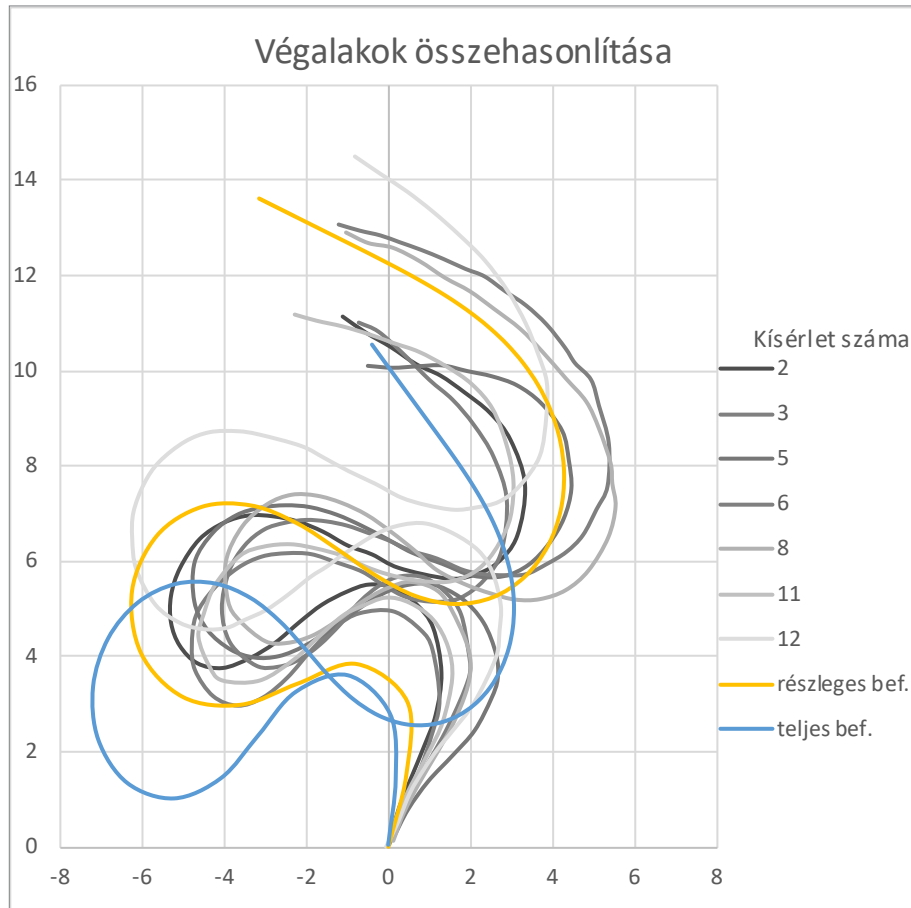
	2	3	5	6	7	8	11	12	részleges bef.	teljes bef.
X	0,14	0,11	1,05	0,91	0,58	1,26	0,53	0,91	-	-0,89
Y	5,45	4,95	5,52	5,36	4,67	5,23	5,11	6,97	-	3,51



15. ábra: Az érintési pontok helyei

Alakok összehasonlítása

A kísérleti és a számított végalakokat egy grafikonon ábrázoltam (16. ábra). A részleges befogásból számított végalak jól beleillik a görbeseregbe, feltételezhető, hogy ha az érintésig ment volna a szimuláció, szintén hasonló alakot kaptunk volna. A teljes befogásból számított görbületei az Y tengely mentén lejjebb helyezkednek el, de alakra nagyon hasonló a többi görbéhez.



16. ábra: A kísérleti (szürkék) és a számítógéppel generált végállapotok (sárga, kék) összehasonlítása

Összefoglalás

Sipos András és Várkonyi Péter vékony, egyik végén befogott, rugalmas rudak súrlódási erők esetén bekövetkező alakváltozását vizsgálták. A jelenséget matematikai modellel írták le, emellett számítógépes algoritmussal határozták meg a rúd alakokat. Az számítások során a rúd hossza a befogástól egyenletes ütemben növekszik, amit a súrlódás akadályoz. Dolgozatomban az algoritmus eredményeit hasonlítottam össze manuális kísérletekkel.

Két plexilap közé körgyűrű keresztmetszetű rugalmas kábelt vezettem be folyamatosan, egy mereven rögzített műanyag csövön keresztül, majd a változást lépésenként lefotóztam. A kapott alakot digitalizáltam, és összehasonlítottam az algoritmus által generált alakokkal. Az összehasonlításhoz szükséges anyagi paramétereket, mint a fajlagos súrlódási erő, rugalmassági modulus, laborkísérletekkel határoztam meg.

A kísérlet és a modell összehasonlítása során az alábbi paramétereket határoztam meg:

- befogás és a végpont közötti távolság az ívhossz függvényében;
- ezen távolság az ívhossz szerint deriválva;
- legnagyobb szélesség az ívhossz függvényében;
- inflexiós pontok száma az ívhossz függvényében;
- ívhossz (a betolt cső hossza);
- érintési pont koordinátái.

Az összehasonlítás végeredményként igazolta az elméleti modell érvényességét, ami lehetővé teszi annak alkalmazását a gyakorlatban is. A módszer több természeti jelenség számos műszaki és orvosi alkalmazás során előforduló probléma leírására, vizsgálatára alkalmas.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom konzulenseimnek, Dr. Sipos András Árpádnak és Dr. Várkonyi Péternek (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), akik legújabb kutatási eredményeiket megismertették velem és folyamatosan támogattak, hogy az ahhoz kapcsolódó kísérleteket elvégezhessem.

Köszönöm szépen Juhász Károlynak (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), aki lehetővé tette a szakítógép használatát és segített a mérések végrehajtásában.

A használt ZWICK Z150 törőgépet a TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 pályázat biztosította.

Hivatkozások

- [1]: S.P. Timoshenko, J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw Hill, 1961
- [2]: P. Howell, G. Kozyreff, J. Ockendon: Applied Solid Mechanics, Cambridge University Press, 2009
- [3]: A. Logg, K.A. Mardal, G.N. Wells: Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 2012.
- [4]: Evelyne, K. O. L. B., Valérie Legue, and Marie-Béatrice Bogeat-Triboulot. "Physical root-soil interactions." Physical Biology (2017).
- [5]: Benosman, Mouhacine, and G. Le Vey. "Control of flexible manipulators: A survey." Robotica 22.5 (2004): 533-545.
- [6]: <http://arohatgi.info/WebPlotDigitizer/>