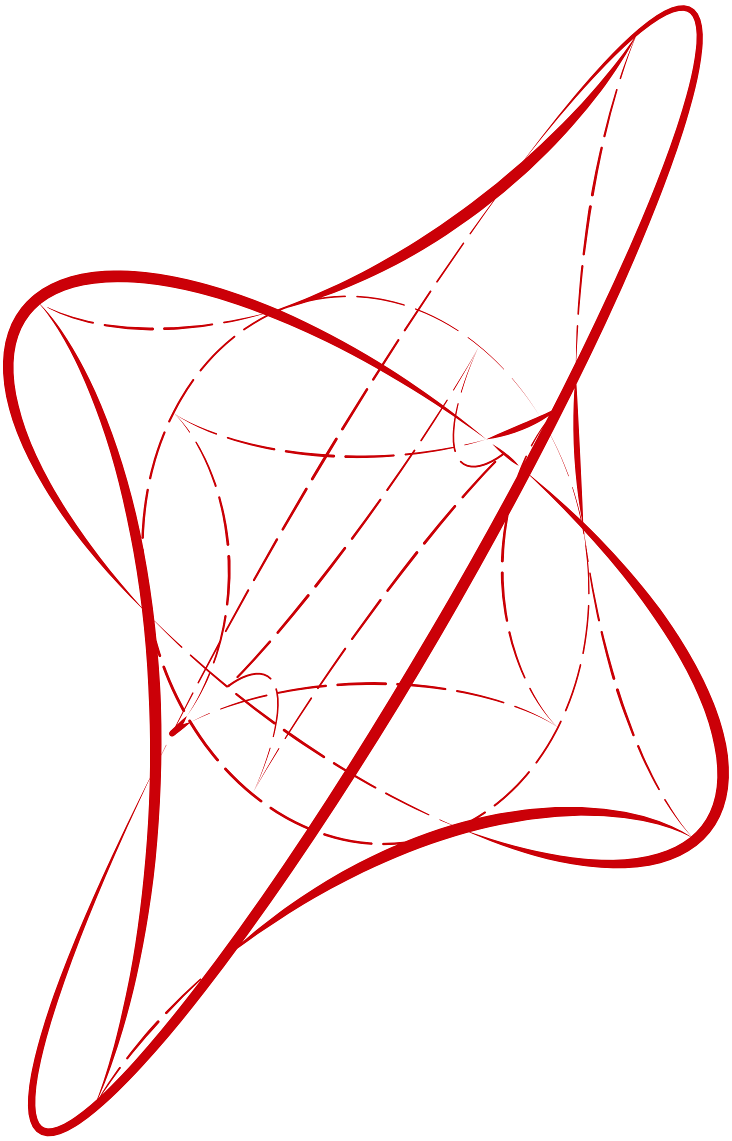
Gergye Menyhért
konzulens: Dr. Domokos Gábor

Kettős Fókusz



MŰEGYETEM 1782

"A háromtengelyű ellipszoid alak a tengerparton a hullámtörés helyén található köveken figyelhető meg gyakran. A víz csiszoló munkája következtében bármely tetszőleges alakú kő lassacskán egyre inkább ellipszoidhoz hasonló."

-David Hilbert, Stefan Cohn-Vossen: Szemléletes Geometria [1]

Tartalom

Bevezetés

Az idézet első szerzője, a XX. század első felének egyik legnagyobb matematikusa, a Göttingeni Egyetem professzora. Világhírű könyve, a "Szemléletes Geometria" [1] arról tanúskodik, hogy Hilbert szerint nem csak a differenciálgeometria alapfogalmai, hanem a természet formáinak megértéséhez is a háromtengelyű ellipszoidon keresztül vezet az út. Éppen ezért meglepő, hogy ha az ember az ellipszoidhoz kapcsolódó egyik legérdekesebb geometriai objektumot, a fokális testet (a gyújtófelületek unióját) szeretné megismerni, akkor az egyetlen hozzáférhető forrás éppen a Göttingeni Egyetem gyűjteményében található 240. számú gipsz-modell.
Dolgozatom célja a háromtengelyű ellipszoid fokális felületének előállítása volt a GeoGebra program keretében végzett szerkesztéssel. A szerkesztés során a könnyebb átláthatóság végett a Monge-féle képsíkrendszert használtam. A szerkesztéshez szükséges volt a háromtengelyű ellipszoid fonálszerkesztésre való visszavezetése, a felület négy gömbi pontjának meghatározása, az ellipszoid általános pontján átmenő két főgörbületi irány meghatározása, ehhez a ponton átmenő konfokális felületek kiszerkesztése; továbbá a fokális test szimmetriasíkjaiban fekvő görbéinek kiszerkesztése és az ellipszoid egy általános pontjához tartozó, a fokális felület két pontjának kiszerkesztése. Ezekhez alapvető ábrázoló geometriai módszereket használtam, a Monge-rendszer vetítési szabályait, leforgatásokat és affinitást, továbbá a GeoGebra program következő eszközeit: görbe adott pontjában érintő állítása, adott irányú érintő állítása a görbéhez, "locus" eszköz, kúpmetszet felvétele öt ponton keresztül.
A következőkben megnézzük, miből származtatható a háromtengelyű ellipszoid: először gömbből dilatációval (1.1), majd a Staude-féle fonálszerkesztéssel (1.2) [2], majd definiáljuk a fokális felületet (2).
Ezután a szerkesztés menetét követve nézzük végig, hogyan szerkeszthető a háromtengelyű ellipszoid fokális felülete. Vetületeivel ábrázolunk egy háromtengelyű ellipszoidot (3.1), majd elkezdjük megszerkeszteni a fokális felületet két részben (3.2). Először megkeressük annak speciális görbéit (4), majd a háromtengelyű ellipszoid egy általános pontjához tartozó, a fokális felület két pontját (5-8). Ehhez megkeressük adott pontban a főgörbületi irányokat a konfokális hiperboloidok segítségével (6-7).

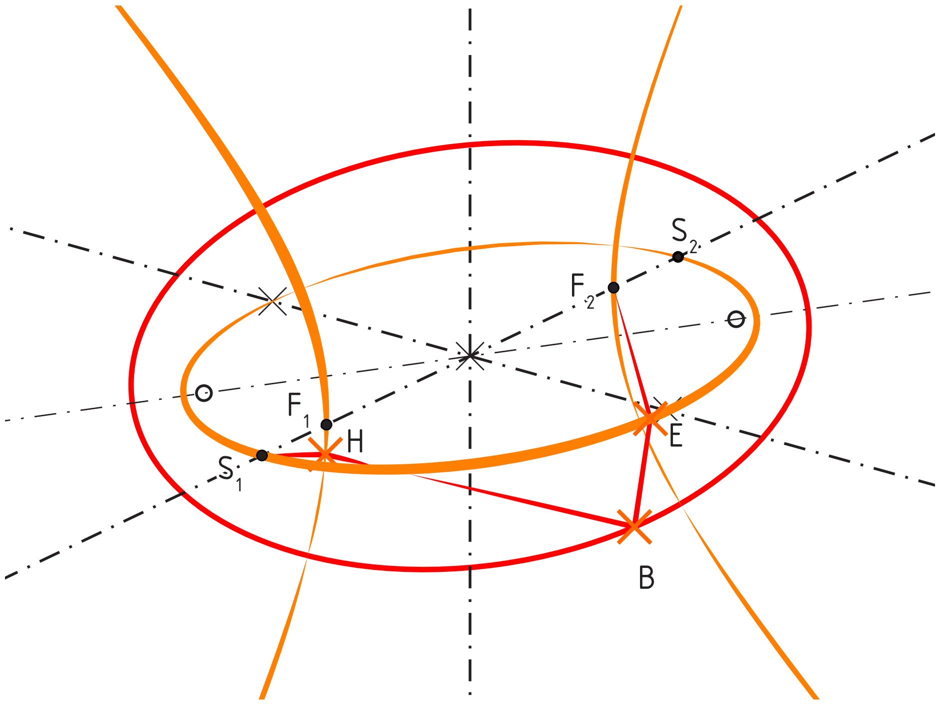
1. A háromtengelyű ellipszoid származtatása

1.1 A háromtengelyű ellipszoid származtatása dilatációval

A háromtengelyű ellipszoid egy másodrendű felület. A felületet legegyszerűbben gömbből származtathatjuk affín transzformációval. A transzformáció lényege, hogy a tér egy síkjában fekvő pontokat változatlanul hagyom, míg az összes többi pontot egy adott iránnyal párhuzamosan mozgatom úgy, hogy minden pontnak az adott síktól való távolsága ugyanolyan arányban változzon. Ez a transzformáció minden egyenest egyenesbe, síkot síkba visz át. A köröket ellipszissé (vagy körré), az ellipsziseket pedig ismét ellipszissé vagy körré transzformálja. Azt az affín transzformációt, amelynek síkja egy felület tengelyén halad keresztül, dilatációnak nevezzük. A gömböt az egyszeri dilatáció forgási ellipszoidba viszi át. A forgási ellipszoidot előállíthatjuk forgástestként is, egy ellipszist kis- vagy nagytengelye körül megforgatva. A forgási ellipszoid dilatációjával kaphatjuk meg a háromtengelyű ellipszoidot. Míg a gömb összes origón átmenő síkja szimmetriasík, illetve a forgási ellipszoidnak minden forgástengelyen keresztül felvett síkja szimmetriasík, addig a háromtengelyű ellipszoidnak mindössze három szimmetriasíkja van. Ezek egymásra merőlegesek, metszésvonalaikból a felületek három különböző hosszúságú szakaszt metszenek le. Ezek a háromtengelyű ellipszoid tengelyei, melyeket az ellipszoid kis-, középső és nagytengelyének nevezzük. Ha az ellipszoid három tengelyéből kettőt azonos méretűvé teszünk dilatáció segítségével, a felület egy forgási ellipszoid lesz. Ha mindhárom tengelyt egyenlővé tesszük, gömböt kapunk.

1.2 Staude-féle fonálszerkesztés

A háromtengelyű ellipszoid másik származtatása Staude nevéhez kötődik, aki 1882-ben megoldotta a felület fonálszerkesztését [2]. Itt egy ellipszisből és egy hiperbolából álló merev vázból indulunk ki. A hiperbola síkja merőleges az ellipszis síkjára, a két sík metszésvonala az ellipszis nagytengelye. A hiperbola döféspontjai az ellipszis síkjában egybeesnek az ellipszis fókuszpontjaival, míg az ellipszis döféspontjai a hiperbola síkjában egybeesnek a hiperbola fókuszpontjaival. Egy fonalat egyik végén megerősítünk az ellipszis egyik csúcsában (S_1), átfűzzük a hiperbola közelebbi ágán hátulról (H), majd az ellipszisre fektetjük (E), a másik végén pedig a hiperbola csúcsában rögzítjük (S_2). Amennyiben a fonalat folyamatosan feszesen tartva mozgatjuk, a fonál megfogott pontja (B) egy ellipszoidon mozog. Az, hogy milyen módon fűzzük át a fonalat meghatározza, hogy a megfogott pont az ellipszoid mely térnegyedét futja be. A két kúpszeletből álló váz tehát hasonló szerepet játszik az ellipszoid szerkesztésénél, mint a fókuszpont az ellipszis szerkesztésénél.

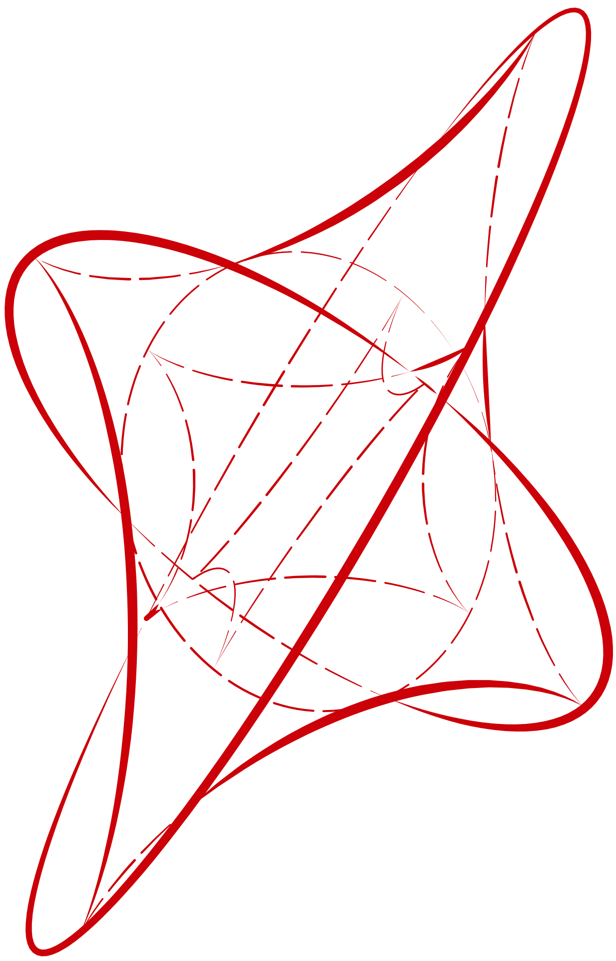


1. ábra: A Staude-féle fonálszerkesztés

S : A fokális ellipszis csúcsai, S_1 ahol a fonál egyik végét rögzítjük
F : A fokális hiperbola csúcsai, F_2 ahol a fonál másik végét rögzítjük
H : A fokális hiperbola egy pontja, ahol a fonalat átfűzzük
E : A fokális ellipszis egy pontja, ahol a fonalat átfűzzük
B : A pont, aminél fogva a fonalat megfeszítjük

2. A fokális felület

Fokális felületnek egy felület gyújtópontjainak unióját nevezzük. Másképp megfogalmazva: egy test fokális felületeit meghatározza a test összes pontjában a normálisra felmért két főgörbületi érték, azaz az adott ponthoz tartozó legnagyobb és legkisebb görbület.

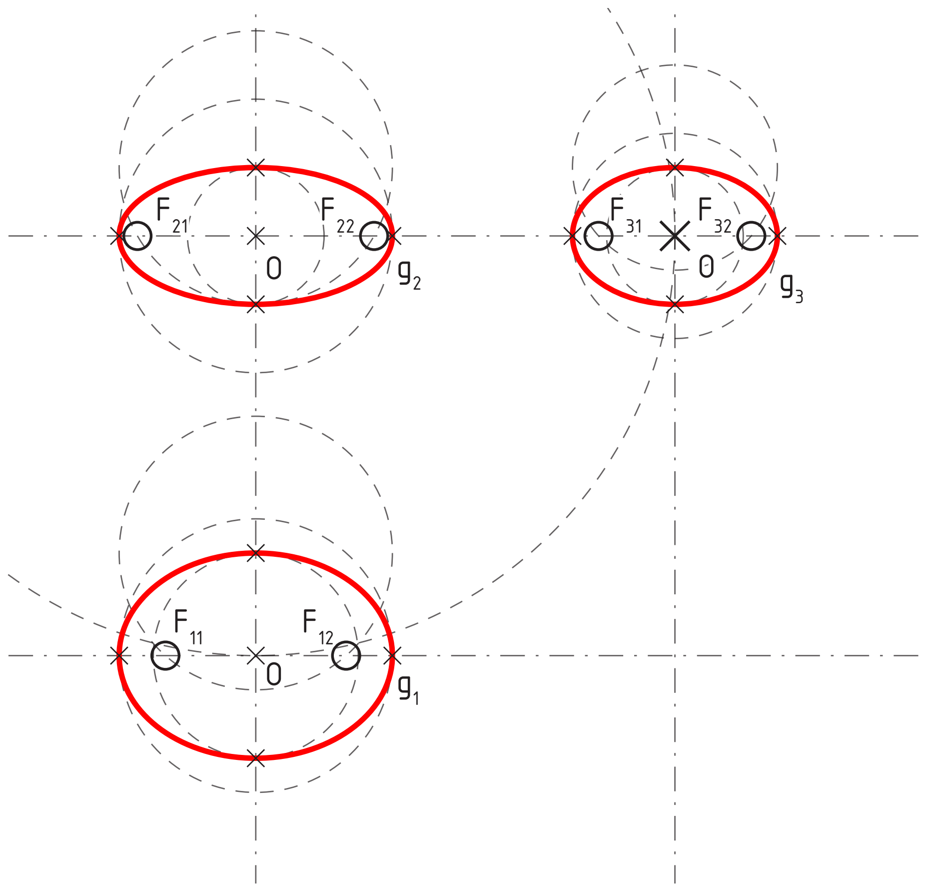


A szerkesztés menete

3. A háromtengelyű ellipszoid vetületei

3.1 Az ellipszoid ábrázolása három vetületével

A szerkesztés első lépéseként megadjuk az ellipszoid kis-, közepes és nagytengelyének méretét, majd a testet három vetületével ábrázoljuk. Ezzel a három képével az ellipszoid egyértelműen meg van határozva. A test felül- (g_1), elöl- (g_2) és oldalnézetének kontúrgörbéje (g_3) egybeesik az ellipszoid három szimmetriasíkjában fekvő görbéivel, a vetületi ellipszisek kis- és nagytengelye az ellipszoid kis-, közepes és nagytengelye.



2. ábra: A háromtengelyű ellipszoid ábrázolása három vetületével

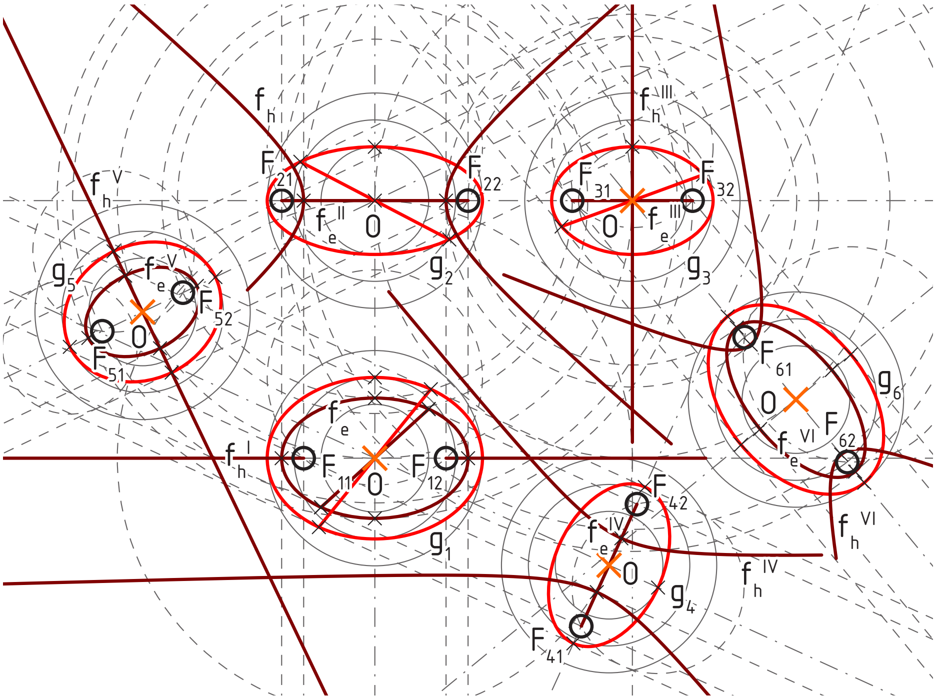
0 : A háromtengelyű ellipszoid origója

F : A háromtengelyű ellipszoid kontúrgürgéjének fókuszpontjai

g : A háromtengelyű ellipszoid kontúrgörbéi

3.2 Az ellipszoid általános vetületei

Az ellipszoid ábrázolásához ismernünk kell annak viselkedését a vetítések során. A Staude-féle fonálszerkesztés szerint minden háromtengelyű ellipszoidot meghatározhatunk két fokális kúpszelettel: egy ellipszissel és egy hiperbolával. Tudjuk, hogy a fokális hiperbola fókuszát a fokális ellipszis döféspontja adja meg a hiperbola síkjával, illetve fordítva: a fokális ellipszis fókuszpontját a fokális hiperbola döféspontja adja meg az ellipszis síkjával. Párhuzamos vetítés során egy érdekes viszony alakul ki a két fokális kúpszelet között, mégpedig az, hogy képüknek fókuszpontja közös marad. Ezenfelül ez a két fókuszpont egybeesik a háromtengelyű ellipszoid kontúrgörbéjének fókuszpontjaival is. Ez az ellipszoid speciális metszetein is megfigyelhető, ahol a fokális ellipszisre merőleges nézetben a fokális ellipszis fókusza a hiperboloid csúcspontja, és ebben a nézetben a hiperbola két félegyenessé fajul; illetve fordítva, a fokális hiperbola síkjára merőleges nézetben a hiperbola fókuszpontjai az ellipszis csúcsaira esnek, így az szakasszá fajul.



3. ábra: A háromtengelyű ellipszoid vetületei

O : A háromtengelyű ellipszoid origója

F : A háromtengelyű ellipszoid kontúrgürgéjének és fokális kúpszeleteinek fókuszpontjai

g : A háromtengelyű ellipszoid kontúrgörbéi

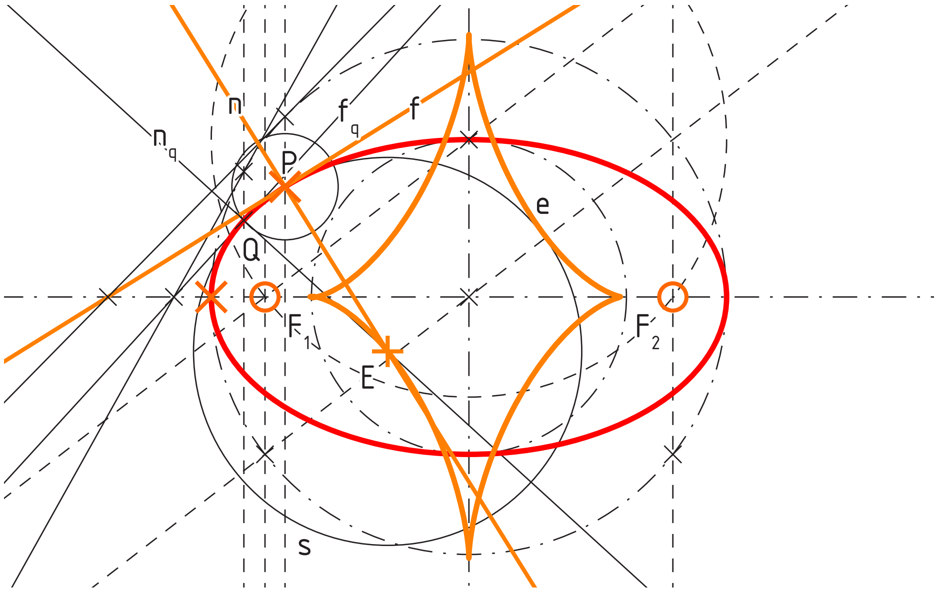
f_h : A háromtengelyű ellipszoid fokális hiperbolája

f_e : A háromtengelyű ellipszoid fokális ellipszise

4. A fokális felület speciális görbéi

A fokális felület kiszerkesztését két részre lehet osztani: első a fokális felület speciális, szimmetriasíkjaiban fekvő görbéinek kiszerkesztése, második pedig a felület általános pontjának megszerkesztése. Természetesen a második rész módszerével definiálhatjuk a szimmetriasíkban fekvő pontokat is, de ezek a görbék a felület oly meghatározó pontjai, amiket egyszerűbb módon meg lehet határozni a fő vetületi nézeteken, ráadásul megadják a test taréjpontjait is.

Az ellipszoid szimmetriasíkjaiban fekvő ellipszisei egyben főgörbületi vonalak is, tehát a fokális test ehhez tartozó görbéje is ebben a síkban kell hogy legyen. Ebből származik, hogy a fokális felület szimmetriasíkjai egybeesnek az ellipszoid szimmetriasíkjaival, továbbá az ellipszoid szimmetriasíkjaiban fekvő ellipszisekhez a fokális felület szimmetriasíkjaiban fekvő görbéinek pontjai rendelhetők hozzá. A felületet mindhárom szimmetriasíkja két-két görbében metszi, melyek egyikét úgy kapjuk meg, ha ehhez a síkmetszethez tartozó ellipszishez evolútát szerkesztünk.



4. ábra: Ellipszis evolútájának szerkesztése közelítő szerkesztéssel
F : Az ellipszis fókuszpontjai
P,Q: Általános pontok az ellipszisen
f : Az ellipszis általános pontjaiba húzott érintők
n : Az ellipszis általános pontjaiba húzott normálisok
E : Az ellipszis evolútájának P-hez tartozó pontja
e : Az ellipszis evolútája
s : Az ellipszis simulóköre P pontban

4.1 A speciális görbék normálisa

Evolúta szerkesztéséhez érintőt kell húznunk az ellipszis általános pontjába. Ezt –mivel az ellipszisnek ismerjük a kis- és nagytengelyét is– affinitás segítségével könnyen kiszerkeszthetjük. Én a kevesebb vonal érdekében a GeoGebra program érintő parancsát használtam. Az ellipszis, amivel dolgozunk kontúrgörbe, így a hozzá tartozó érintősík csak vetítő helyzetű lehet. Ebből következik, hogy a fő vetületi képeken a kontúrgörbe érintőegyenesei egyben az ellipszoid egyenesnek látszó érintősíkjai is. Ezután a választott általános pontba (P) merőlegest állítunk az érintőre (f), ami így az ellipszoid normálisa (n) is lesz. Erre az egyenesre kell felmérni a ponthoz tartozó görbületi értéket. Ezt az értéket meghatározhatjuk közelítő szerkesztéssel, a GeoGebra "Curvature" parancsával, illetve egy harmadik, fókuszpontos szerkesztéssel is.

4.2 Evolúta szerkesztése közelítő szerkesztéssel

A közelítő szerkesztés a görbület definícióját veszi alapul, több változata is van. A kiválasztott ponttól (P) adott távolságra felveszünk egy másik pontot (Q) is az ellipszisünkön. Ebbe a pontba is merőlegest állítunk az ellipszisünkre (n_q). A két egyenes metszéspontja határértékben adja meg az evolúta egy pontját (E). Ezután egy olyan kört (s) körzőzünk, amely átmegy az első általános ponton (P) és origója a két normális metszéspontja (E). Határértékben ezt a görbe simulókörének nevezzük.

Egy másik módszer az, hogy a két ponton keresztül olyan kört húzunk, aminek érintője megegyezik a kezdeti pontban az ellipszishez húzott érintővel.

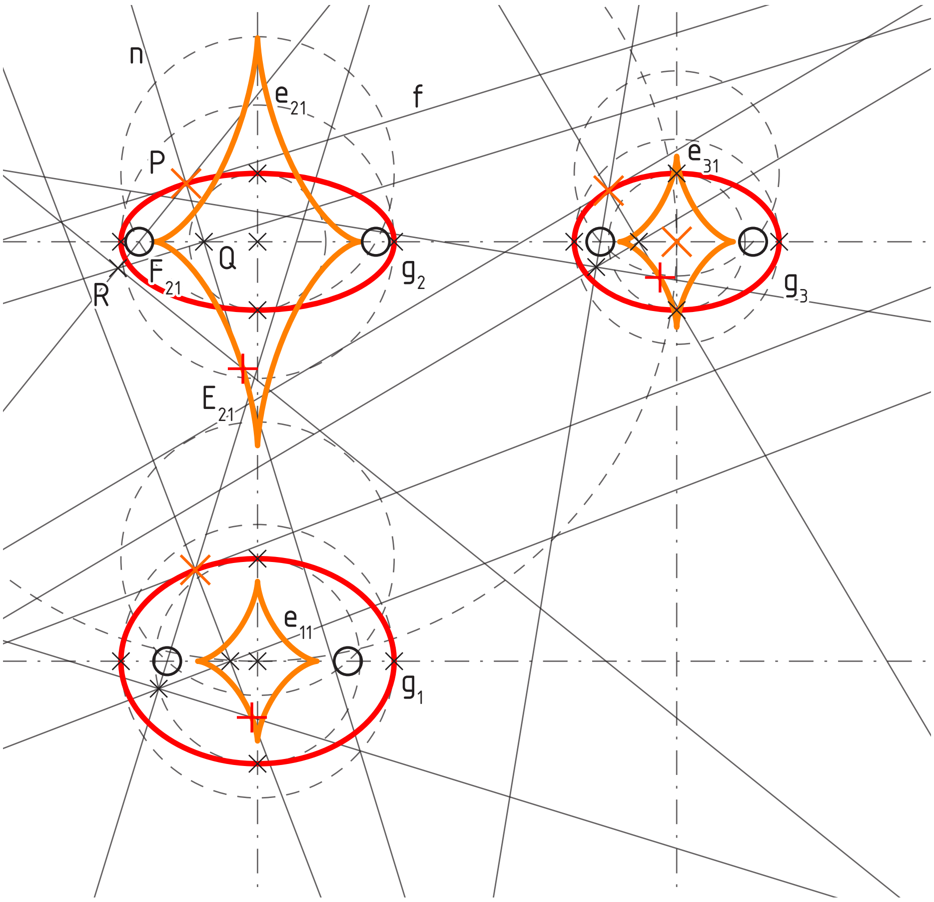
A harmadik lehetőség, hogy az ellipszisen nem egy, hanem két másik pontot jelölünk ki adott távolságra és a három ponton keresztül húzunk egy kört. Ha a kezdetben megadott távolságot csökkentjük, a szerkesztett kör rádiusza az ellipszis görbületi értékéhez közelít. Ezeknek a szerkesztéseknek az a legnagyobb hátránya, hogy pont határértékben, nulla távolságnál lesz értelmezhetetlen.

4.3 Evolúta szerkesztése a "Curvature" paranccsal

Egy lehetséges másik megoldás az, hogy a GeoGebra beépített "Curveture" parancsát használva kapott értéket felmérjük az ellipszoid normálisára és így kapjuk meg a fokális felület pontját.

4.4 Evolúta szerkesztése fókuszpont segítségével

A harmadik megoldás egy speciális szerkesztés az ellipszis fókuszpontjának segítségével. Az általános pontba (P) meghúzzuk az ellipszis érintőjét (f) és normálisát (n), majd egy harmadik egyenest, ami az ellipszis egyik fókuszpontján (itt F_{21}) megy át. A normálisra (n) merőlegest állítunk abból a pontból, ahol a normális metszi a nagytengelyt (Q), majd ennek a kettőnek a metszéspontjába (R) merőlegest állítunk az általános pontot (P) és a fókuszpontot összekötő egyenesre. Ahol ez az egyenes metszi a normálist, ott van az evolúta egy pontja (E_{21}).

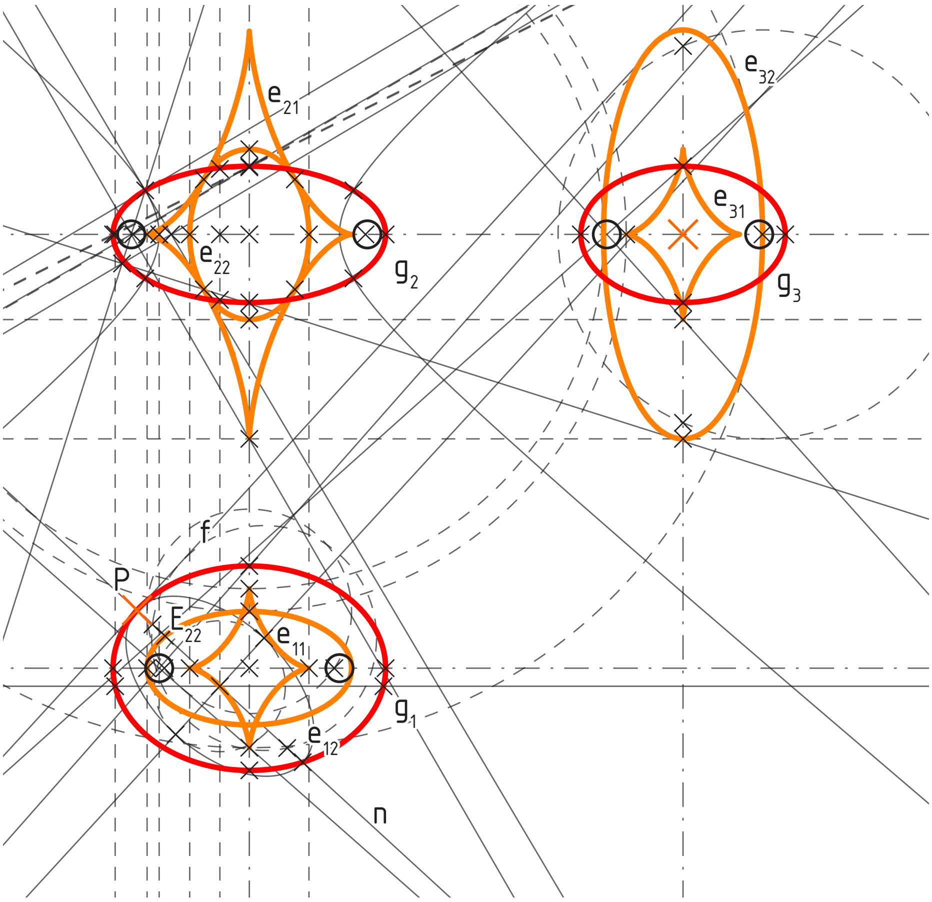


5. ábra: Háromtengelyű ellipszoid fokális felületeinek speciális görbéi evolúta szerkesztésével

g : Az ellipszoid kontúrgörbéi
F : Az ellipszoid vetületének fókuszpontja
P : Általános pont az ellipszis kontúrgörbéjén
f : Az ellipszis általános pontjába (P) húzott érintő
n : Az ellipszis általános pontjába (P) húzott normális
E : Az ellipszis evolútájának P-hez tartozó pontja
e : Az ellipszoid egy vetületének evolútái

4.5 Taréjpontok szerkesztése

Így meghatároztuk a fokális felületek szimmetriasíkban fekvő egy-egy görbéjét. Tudjuk hogy ezekhez a normálisokhoz (n) tartozik egy-egy másik pont is (E_{22}). Mivel a főgörbületi irányokról tudjuk, hogy merőlegesek egymásra és a test érintősíkjára, ismerjük a kontúrban az ellipszoid érintősíkjait és az egyik főgörbületi irányt, így egyértelműen meg van határozva a másik főgörbületi irány is. Ráadásul az érintősík az adott képeken vetítő helyzetű (egybeesik az f egyenessel), a főgörbületi irány síkja pedig a szimmetriasík, ami párhuzamos a képsíkunkkal. Így a másik főgörbületi irány az adott képeken szintén vetítő helyzetű kell hogy legyen, képe az egyenesben



6. ábra: Háromtengelyű ellipszoid fokális felületeinek taréjpontjai

g : Az ellipszoid kontúrgörbéi

F : Az ellipszoid vetületének fókuszpontja

P : Általános pont az ellipszis kontúrgörbéjén

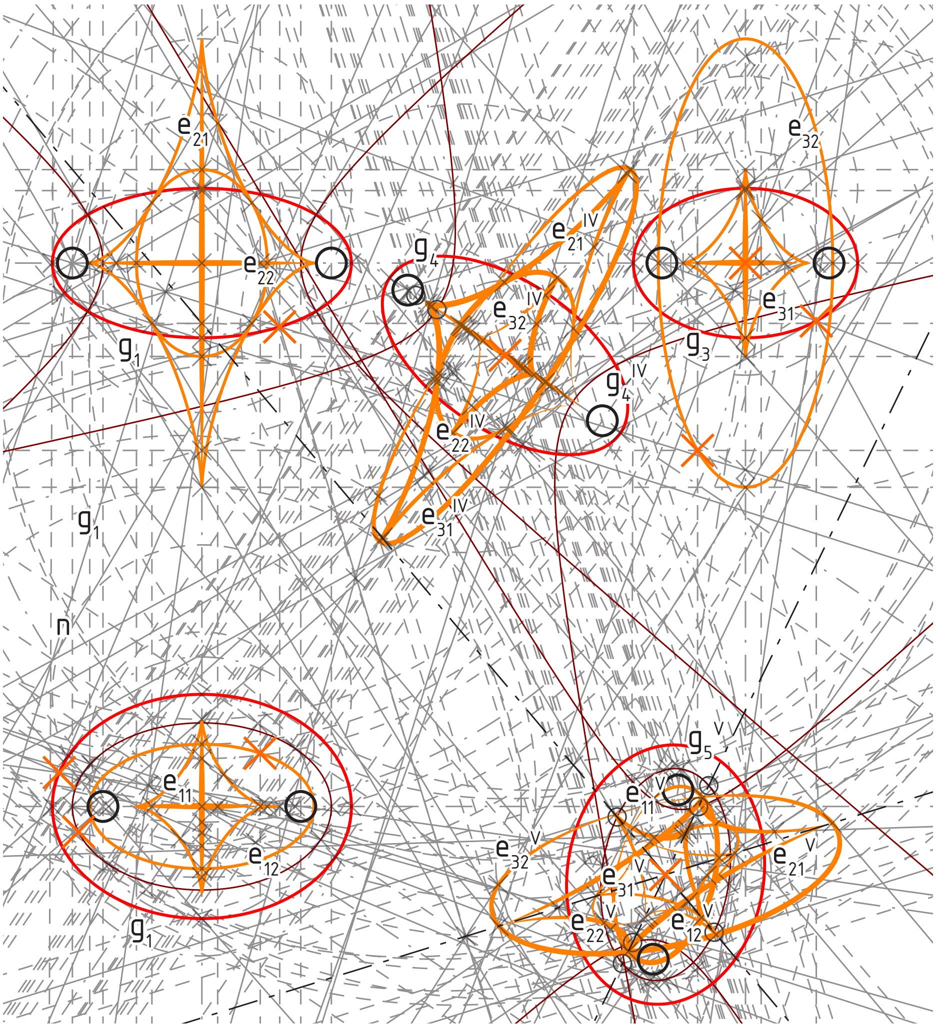
f : Az ellipszis általános pontjába (P) húzott érintő

n : Az ellipszis általános pontjába (P) húzott normális

E : Az ellipszoid egy fokális felületének P-hez tartozó taréjpontja

e : A fokális felületek speciális síkgörbéi

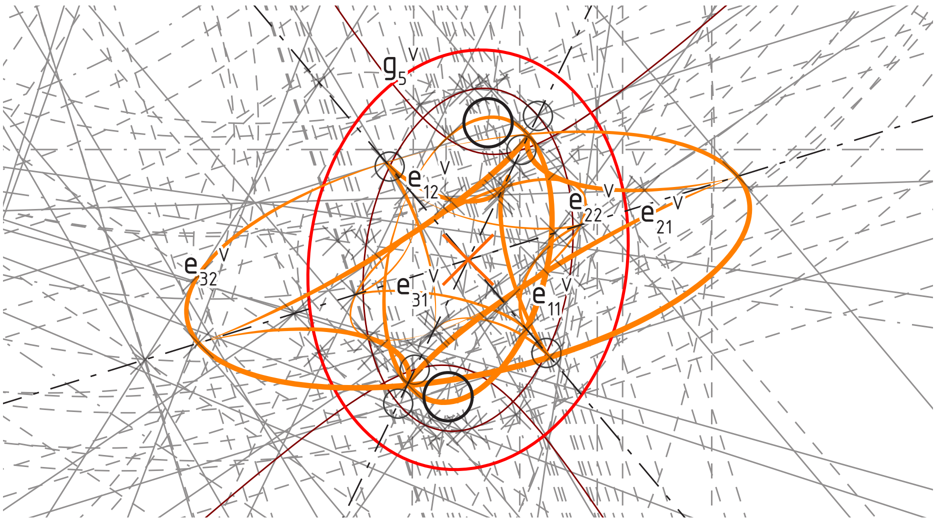
látszódó érintősíkra húzott merőleges egyenes (egybeesik az n egyenessel). Ez a sík elmetszi az ellipszisünket, a metszetgörbe egy újabb ellipszis lesz, aminek egyik csúcspontja az az általános pont (P), ahol a görbületre kíváncsiak vagyunk. Itt fontos megjegyezni, hogy ez a síkgörbe nem egy görbületi vonala a felületünknek, kizárólag lokálisan tudjuk meghatározni belőle a fokális felület egy pontját (E_{22}). Így megkaptuk a fokális felület szimmetriasíkjaiban fekvő görbéit.



7. ábra: Háromtengelyű ellipszoid fokális felületeinek speciális görbéinek általános vetülete
g : Az ellipszoid kontúrgörbéi
e : A fokális felületek speciális síkgörbéi

5. Főgörbületi irányok

A következő rész az ellipszis átalános pontjához tartozó, a fokális felület két pontjának kiszerkesztése. Ehhez ismernünk kell az ellipszis általános pontjához tartozó főgörbületi irányokat. Ezt legkönnyebben úgy kaphatjuk meg, ha adott pontban meg tudjuk határozni a háromtengelyű ellipszoid konfokális felületeit. A konfokális felületek síkbeli megfelelői a konfokális kúpszeletek. Ezeket a görbéket úgy kaphatjuk meg, hogy a síkban adott két fókuszponthoz rajzolunk egy ellipszist, majd ugyanezen fókuszpontokhoz szerkesztünk egy hiperbolát is. Mivel két fókuszpont még nem ad meg sem egy konkrét ellipszist, sem pedig egy hiperbolát, végtelen ilyen görbét szerkeszthetünk, ezek a görbék a síkot egyrétűen és hézagtalanul lefedik, úgy hogy a sík minden pontján pontosan egy ellipszis és egy hiperbola megy keresztül. Ebben a pontban a két görbe mindig merőlegesen metszi egymást. Ahogy a síkban a konfokális kúpszeleteket közös fókuszponttal határozhattuk meg, úgy a konfokális felületet is fonálszerkesztésre tudjuk visszavezetni. A Staude-féle fonálszerkesztés segítségével kaphatjuk meg ezeket a felületeket. A tér egy pontjához három konfokális felület tartozik. Egy ellipszoid, egy egyköpenyű hiperboloid és egy kétköpenyű hiperboloid. A konfokális felületekre is igaz, hogy mindig merőlegesen metszik egymást, továbbá egymással alkotott metszetgörbéik a felületek görbületi vonalai.



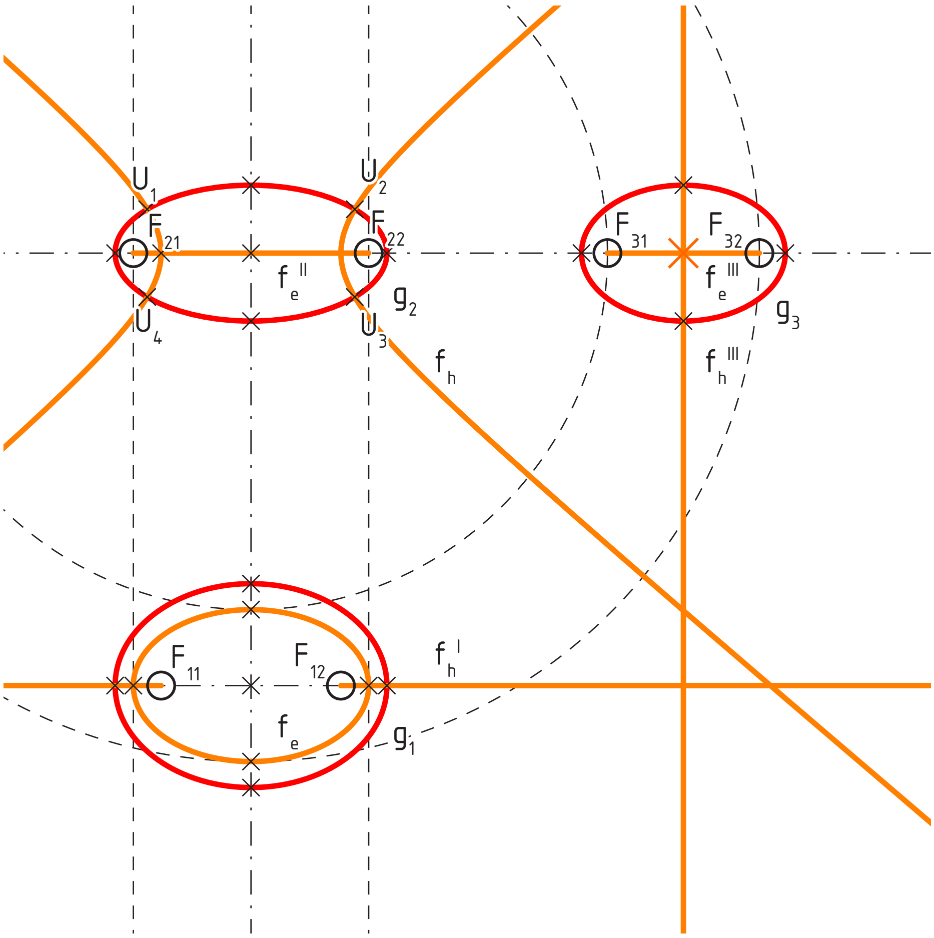
8. ábra: Háromtengelyű ellipszoid fokális felületeinek speciális görbéinek általános vetülete 12.1 ábra V. képe kinagyítva

g : Az ellipszoid kontúrgörbéi

e : A fokális felületek speciális síkgörbéi

5.1 Fokális kúpszeletek

Első lépésben meghatározzuk az ellipszoidhoz tartozó fokális kúpszeleteket. Ezek elhelyezkedése az ellipszoid tengelyeinek arányán múlik. A fokális ellipszis (f_e) az ellipszoidunk középső és nagytengelyével alkotott szimmetriasíkjában helyezkedik el (g_1 síkja). A fokális hiperbola (f_h) az ellipszoid kis- és nagytengelye által alkotott szimmetriasíkban található (g_2 síkja). A fokális hiperboláról tudjuk, hogy merőlegesen döfi a háromtengelyű ellipszoidunkat. Ebből következik, hogy az ellipszoid fokális hiperbola síkjában fekvő ellipszisének (g_2) és a fokális hiperbolának közös a fókuszpontja (F_{21}, F_{22}). Hasonló okokból az ellipszoid fokális ellipszis síkjában fekvő ellipszisének (g_1) és a fokális ellipszisének is



9. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid fokális kúpszeletei

g : Az ellipszoid kontúrgörbéi

F : Az ellipszoid és a fokális kúpszeletek vetületének fókuszpontja

f_e : Az ellipszoid fokális ellipszise

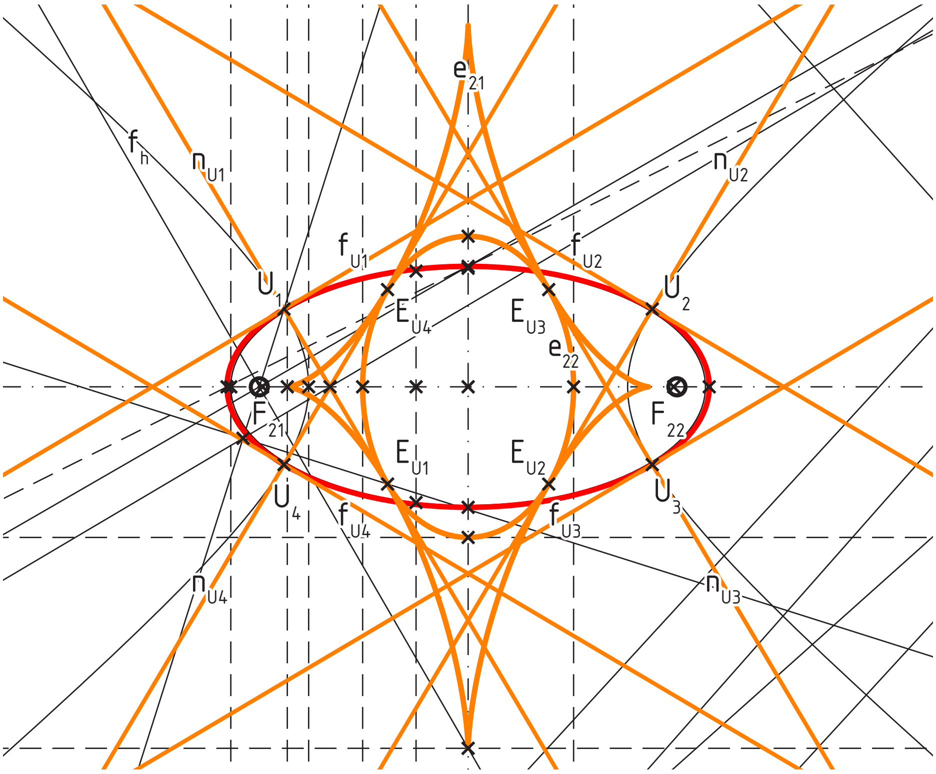
f_h : Az ellipszoid fokális hiperbolája

U : Az ellipszoid umbilikus pontjai

közös a fókuszpontja (F_{11} ,F_{12}). Azt is tudjuk, hogy az egyik fokális kúpszelet másik fokális kúpszelet síkjával alkotott döféspontja szintén megadja a fokális kúpszelet fókuszpontját. Ezen adatok ismeretében a két fokális kúpszelet egyértelműen meg van határozva. Itt láthatjuk, hogy az ellipszoid középső és kistengely által alkotott síkban elhelyezkedő ellipszisének (g_3) fókuszpontjai a fokális ellipszoid döféspontjai a síkkal (F_{31} ,F_{32}).

5.2 Umbilikus pontok

Ahol a fokális hiperbola (f_h) döfi a háromtengelyű ellipszoidot, ott a felületnek négy speciális pontja található. Ezek a pontok az úgynevezett gömbi pontok, vagy umbilikus pontok (U_1, U_2, U_3 ,U_4). Itt a felület minden normálmetszetének görbülete azonos, a főgörbületi irányok határozatlanok. Ezekből következik, hogy a fokális felület két pontja (melyek az ellipszoid azonos umbilikus pontjához tartoznak) itt egybeesik, ezen szimmetriasíkban fekvő két görbéje érinti egymást.



10. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid umbilikus pontjai

F : Az ellipszoid vetületének fókuszpontja

f_h : Az ellipszoid fokális hiperbolája

U : Az ellipszoid umbilikus pontjai

f_U : Az ellipszoid vetületének érintője az umbilikus pontokban

n_U : Az ellipszoid vetületének normálisa az umbilikus pontokban

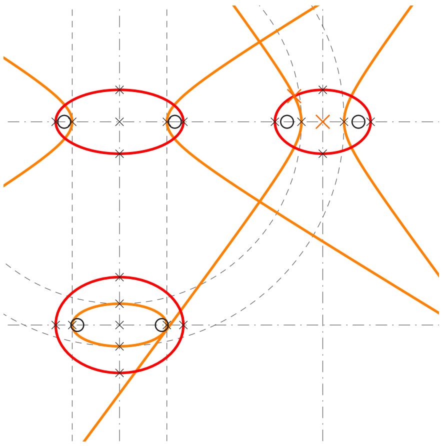
E_U : A fokális felület az ellipszoid umbilikus pontjaihoz tartozó pontjai

6 Az egyköpenyű konfokális hiperboloid

Ezek után meghatározunk egy egyköpenyű konfokális hiperboloidot (k_e). Felveszünk egy pontot az ellipszoidon a középső és kistengely által alkotott síkban (P). Azért ebben a síkban, mert ez merőleges a fokális kúpszeletek síkjaira és így az ellipszis minden pontjához hozzárendelhetünk egy egyköpenyű hiperboloidot. Ezen a ponton keresztül felveszünk egy konfokális hiperbolát (k_{e3}) a sík által kimetszett ellipszisünk fókuszpontjaira (F_{31}, F_{32}). Tudjuk, hogy az egyköpenyű hiperboloidunk a fokális ellipszis síkjával párhuzamos metszeteiben ellipszist ad, hiszen a felület a fonálszerkesztésen kívül származtatható (az ellipszoidhoz hasonlóan) egy egyköpenyű forgási hiperboloid dilatációjából. A hiperboloidnak van egy torokellipszise, ami a fokális ellipszis síkjában található. Ennek az ellipszisnek ismerjük két pontját: ezek az imént kiszerkesztett konfokális hiperbola ellipszis síkjával alkotott döféspontjai. Tudjuk azt is, hogy a torokellipszis és az ebben a síkban fekvő ellipszis fókuszpontja közös (F_{11}, F_{12}). Ezen adatok ismeretével a hiperboloid torokellipszise adott (k_{e1}). A torokkör döféspontja a fokális hiperbola síkjával megadja a hiperboloidunk újabb két pontját. Ebben a síkban is közös a hiperboloid fókusza a kontúrellipszisével (F_{21}, F_{22}), így a hiperboloid harmadik nézetét is ismerjük (k_{e2}).

6.1 A konfokális hiperboloid áthatása az ellipszoiddal

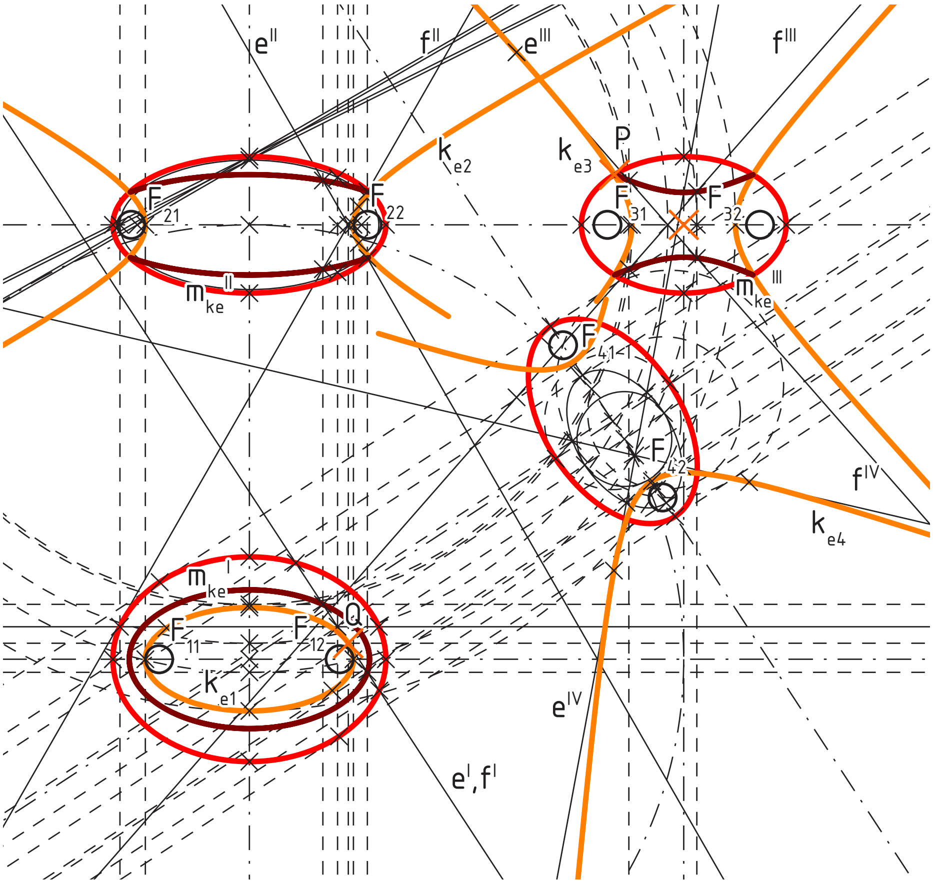
A két felület metszetgörbéjét (m_{ke}) keressük. Tudjuk, hogy a forgási hiperboloid vonalfelület, leképezhető egy egyenes körül megforgatott kitérő egyenesként. Tudjuk azt is, hogy az egyköpenyű hiperboloidunk dilatációval származtatható forgási hiperboloidból, továbbá hogy az affín transzformáció az egyeneseket egyenesekbe transzformálja. Ebből következik, hogy a hiperboloidunk felületén is végigfut egyenesek két serege. Felveszünk egy pontot a hiperboloid torokellipszisén (Q). Tudjuk, hogy a hiperboloidot alkotó egyenesek érintik a torokellipszist és a felület minden pontján pontosan két egyenes



11. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid egyköpenyű konfokális hiperbolájának fő vetületei

fut át (e, f). Ez a két egyenes érinti továbbá a két másik vetületen kapott hiperboláinkat is. Ezekkel az adatokkal a torokkör adott pontjához tartozó két egyenes egyértelműen adott. Ez a két egyenes síkot alkot, ezzel a síkkal elmettszük az ellipszoidunkat. Az így kapott elliszis metszéspontja a két egyenesünkkel megadja a metszetgörbe (m_{ke}) négy pontját.

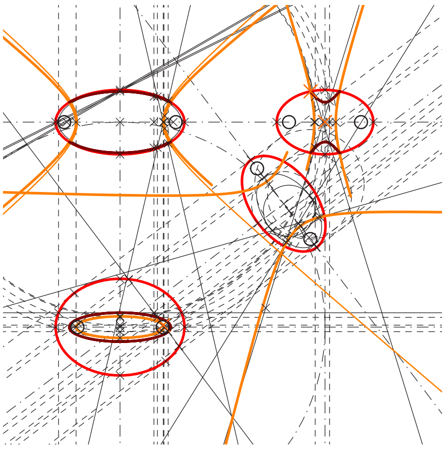
A metszetgörbét másképp úgy kaphatnánk meg, hogy az ellipszis fonálszerkesztéséhez hasonló módszert alkalmazunk, ahol a térgörbénk fókuszpontjai a felület két szomszédos umbilikus pontja, és a görbe kirajzolásakor a fonál folyamatosan fölfekszik az ellipszoidra. Ez a megközelítés térbeli konstrukcióknál működik jól, síkbeli ábrázolásban nehéz reprodukálni a fonál görbülete miatt.



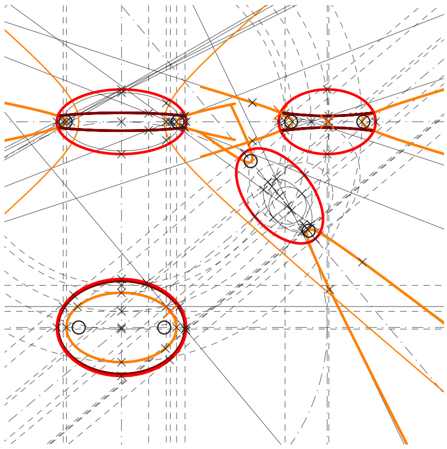
12. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid egyköpenyű konfokális hiperbolája és metszetgörbéjük
F : Az ellipszoid és a fokális kúpszeletek vetületének fókuszpontja
P : Az ellipszoid egy kontúrgörbéjének általános pontja
k_e : A konfokális egyköpenyű hiperbolája képsíkokkal alkotott metszetei
e,f : Az egyköpenyű konfokális hiperboloid alkotói
m_{ke} : Az ellipszoid és a konfokális hiperbola metszetgörbéje

6.2 A metszetgörbe viselkedése

Megfigyelhetjük a hiperboloid (k_e) viselkedését a felvett pont (P) függvényében. Minél távolabb megy a felvett pont a fokális ellipszis síkjától, a hiperboloid annál nyújtottabb lesz, torokellipszise rásimul a két fókuszpontra, határértékben szakasszá fajul. A fokális hiperbola síkjában fekvő görbéje egyre inkább rásimul a fokális hiperbolára, határértékben egybeesnek. A harmadik szimmetriasíkban a hiperbolák egy egyenesbe torzulnak. Megfigyelhető, hogy ez a felület egy síkidommá fajul, ami térgörbe helyett síkgörbében metszi az ellipszoidunkat. Ez a síkgörbe pedig a test egyik szimmetriasíkjában található, a fokális felület ehhez tartozó pontjait már megszerkesztettük. Ez a metszetgörbe azonban hiányos: csak umbilikus ponttól umbilikus pontig tart. A hiányzó részt a jövőben fogjuk megkapni (7.2 pont alatt). Ezekből is látszik a görbületi vonal és az ellipszis fonálszerkesztése közötti hasonlóság: a fonálhossz csökkentésével ellipszisünk a két fókuszpont közötti szakasszá, görbületi vonalunk pedig az ellipszoid felületére simuló, két umbilikus pont közötti szakasszá fajul. Ha a felvett pont a fokális ellipszis síkjához közelít, határértékben hiperboloidunk ebbe a síkba simul bele, hiperbolái félegyenessé fajulnak, torokköre pedig egybeesik a fokális ellipszissel. Ez metszi ki a másik szimmetriasíkban fekvő síkgörbénket.



13. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid egyköpenyű konfokális hiperbolájának viselkedése, ha P pont a fokális hiperbola síkjához közelít

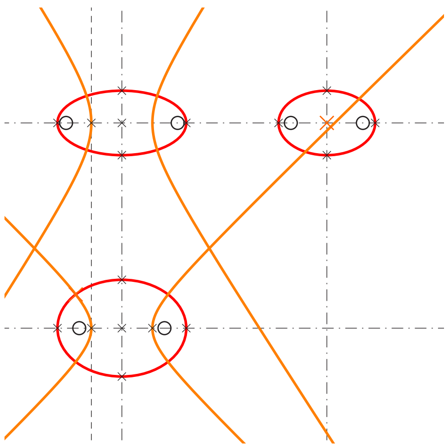


14. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid egyköpenyű konfokális hiperbolájának viselkedése, ha P pont a fokális ellipszis síkjához közelít

7 A kétköpenyű konfokális hiperboloid

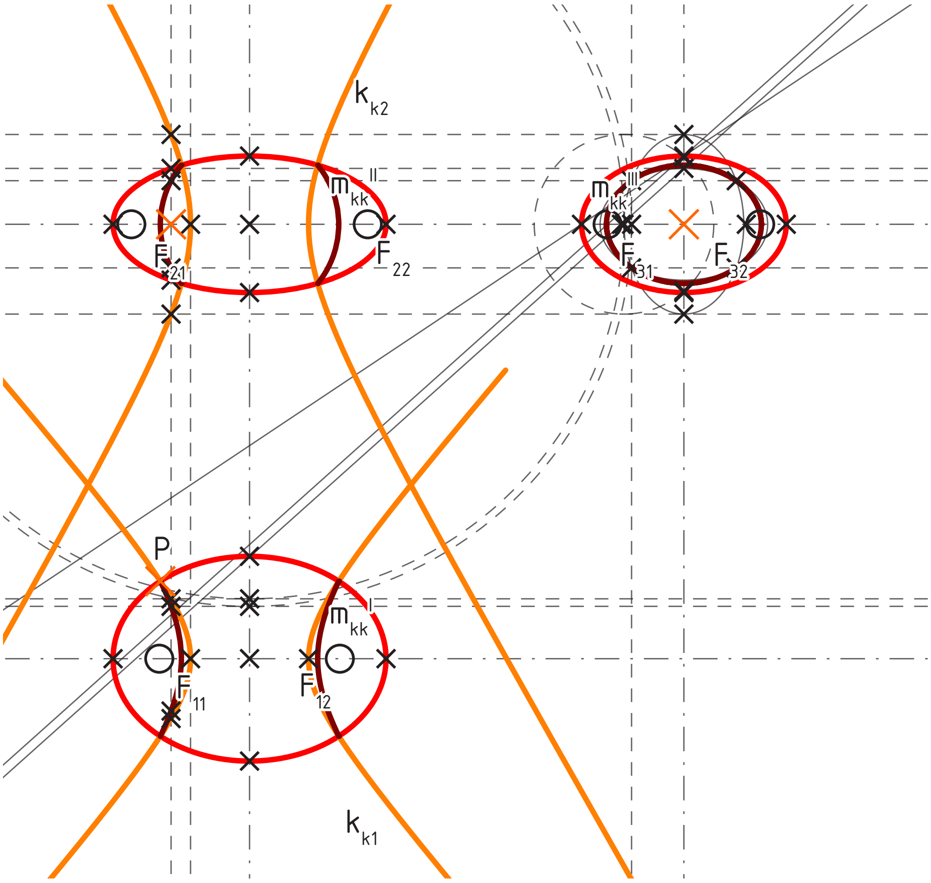
Most szerkesszük meg az ellipszoid egy pontján átmenő másik konfokális felületét, a kétköpenyű hiperboloidot (k_k). Az ellipszoid fokális ellipszisének síkjában fekvő görbéjének minden pontjához tartozik egy kétköpenyű konfokális hiperboloid, így itt felveszünk egy pontot (P). Tudjuk, hogy a hiperboloid ebben a síkban fekvő hiperbolája konfokális viszonyban áll az ellipszoid ebben a síkban fekvő ellipszisével, így közös fókuszponttal (F_{11}, F_{12}) a felvett ponton keresztük hiperbolát szerkesztünk (k_{k1}). Ebből az ellipszoid nagytengelyén megkapjuk a kétköpenyű hiperboloid csúcsát. Ez a pont benne van az ellipszoid fokális hiperbolájának síkjában is, így a hiperboloid ebben a síkban fekvő hiperboláját is megszerkeszthetjük, ha ezen a ponton keresztül fokális hiperbolát szerkesztünk (k_{k2}). Tudjuk, hogy a kétköpenyű hiperboloid származtatható egy kétköpenyű forgási hiperboloid dilatációjából. Ismert továbbá, hogy a kétköpenyű forgási hiperboloid tengelyre merőleges metszetei körök, és hogy a dilatáció körből ellipszist csinál. Tudjuk azt is, hogy a kiszerkesztett görbékben a felület érintősíkja merőleges a görbék síkjára. Ezekből következik, hogy a kiszerkesztett hiperbolák síkjára merőleges síkokban a görbék döféspontjai megadják a kétköpenyű hiperboloid abban a síkban fekvő ellipszisének kis- és nagytengelyét. Ezekkel az adatokkal a kétköpenyű konfokális hiperboloid ismert.

7.1 A konfokális hiperboloid áthatása az ellipszoiddal



15. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid kétköpenyű konfokális hiperbolájának fő vetületei

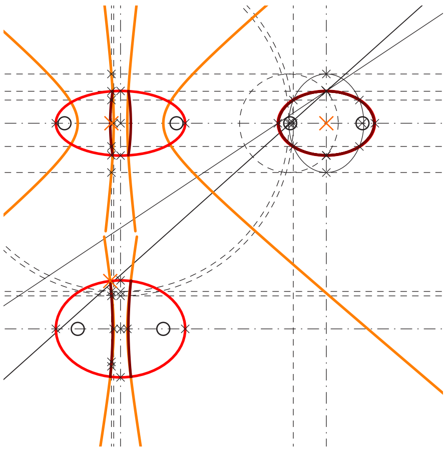
A kétköpenyű konfokális hiperboloidok és a háromtengelyű ellipszoid metszetgörbéi (m_{kk}) az ellipszoid másik irányú görbületi vonalait adják meg. A metszetgörbe négy-négy pontja már ismert a korábban kiszerkesztett hiperbolák és a velük egy síkban fekvő ellispzisek metszéspontjaiból. Több pontot kiszerkeszthetünk például úgy, hogy az ellipszoid nagytengelyére merőleges síkokat veszünk fel. Tudjuk, hogy az ellipszoid és a hiperboloid ilyen irányú metszetei is ellipszisek. Ezeknek az ellipsziseknek metszéspontjai megadják a metszetgörbe pontjait. A másik egyszerű módszer, hogy az ellipszoid nagytengelyére fektetett síkokkal mettszük el a két testet. Ilyen irányban az ellipszoid metszete ellipszoid, a hiperboloid metszete pedig olyan hiperbola, amelynek fókusza megegyezik az ellipszoid metszetének fókuszával. Ezt a metszetgörbét is megkaphatnánk úgy, hogy az ellipszis fonálszerkesztéséhez hasonló módszert alkalmazunk, ahol a térgörbénk fókuszpontjai a felület két szomszédos umbilikus pontja, és a görbe kirajzolásakor a fonál folyamatosan fölfekszik az ellipszoidra. Az, hogy melyik két szomszédos umbilikus pontot választjuk, eldönti, hogy melyik konfokális felülethez tartozó metszetgörbét kapjuk meg.



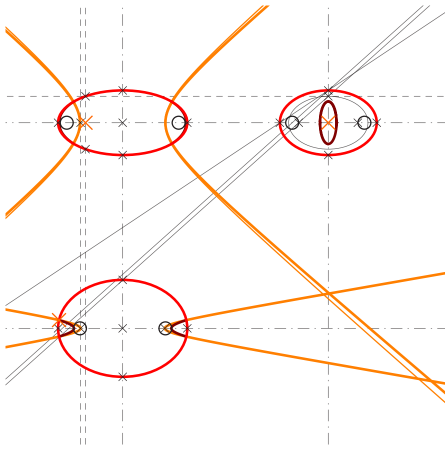
16. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid kétköpenyű konfokális hiperbolája és metszetgörbéjük
F : Az ellipszoid vetületének fókuszpontjai
P : Az ellipszoid egy kontúrgörbéjének általános pontja
k_k : A konfokális kétköpenyű hiperbolája képsíkokkal alkotott metszetei
m_{kk} : Az ellipszoid és a konfokális hiperbola metszetgörbéje

7.2 A metszetgörbe viselkedése

Most megfigyelhetjük a kétköpenyű hiperboloid viselkedését a választott pont viszonyában. Minél közelebb veszem fel a pontot az ellipszoid csúcsához, annál laposabb lesz a hiperboloid, rásimul a fokális hiperbolára. Ha a választott pont az ellipszoid csúcspontja, a hiperboloid a fokális hiperbola síkjába fekszik bele, a metszetgörbe pedig a két umbilikus pontot összekötő, ellipszoid felületére ráfekvő szakasz. Itt láthatjuk, hogy a kapott metszetgörbe az egyköpenyű hiperboloid egyik síkká fajult metszetgörbéjének kiegészítő része (lásd 6.2). A két metszetgörbe közösen kiadja az ellipszoid kis- és nagytengelyének síkjában fekvő metszetgörbéjét. Ha a választott pontot az ellipszoid középső tengelyéhez közelítem, a hiperboloid két köpenye egyre laposabb, egymáshoz közelít. Amikor elérem a középső tengely pontját a felületen, a hiperboloid az ellipszoid középső és kistengelyére simuló síkká fajul. Így megkaptuk az összes síkban fekvő görbületi vonalat.



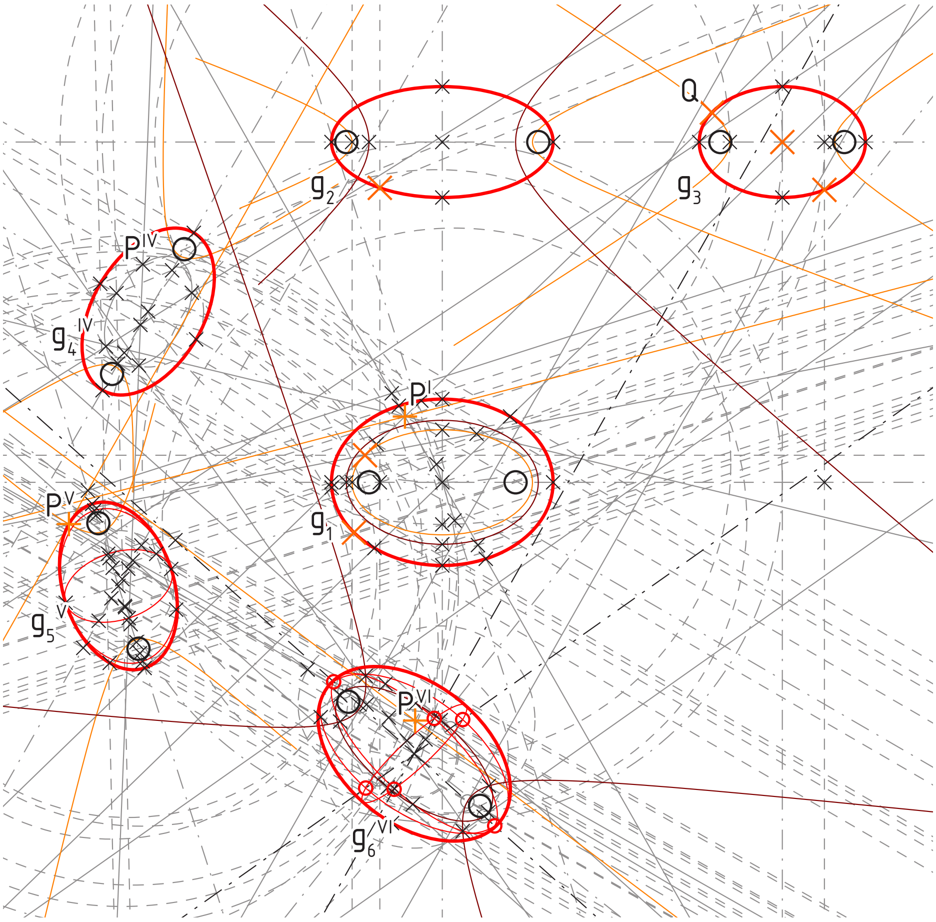
17. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid kétköpenyű konfokális hiperbolájának viselkedése, ha P pont az ellipszoid kis- és középső tengelye által alkotott síkhoz közelít



18. ábra: A Háromtengelyű ellipszoid kétköpenyű konfokális hiperbolájának viselkedése, ha P pont a fokális hiperbola síkjához közelít

8. Főgörbületi irányok szerkesztése általános pontban

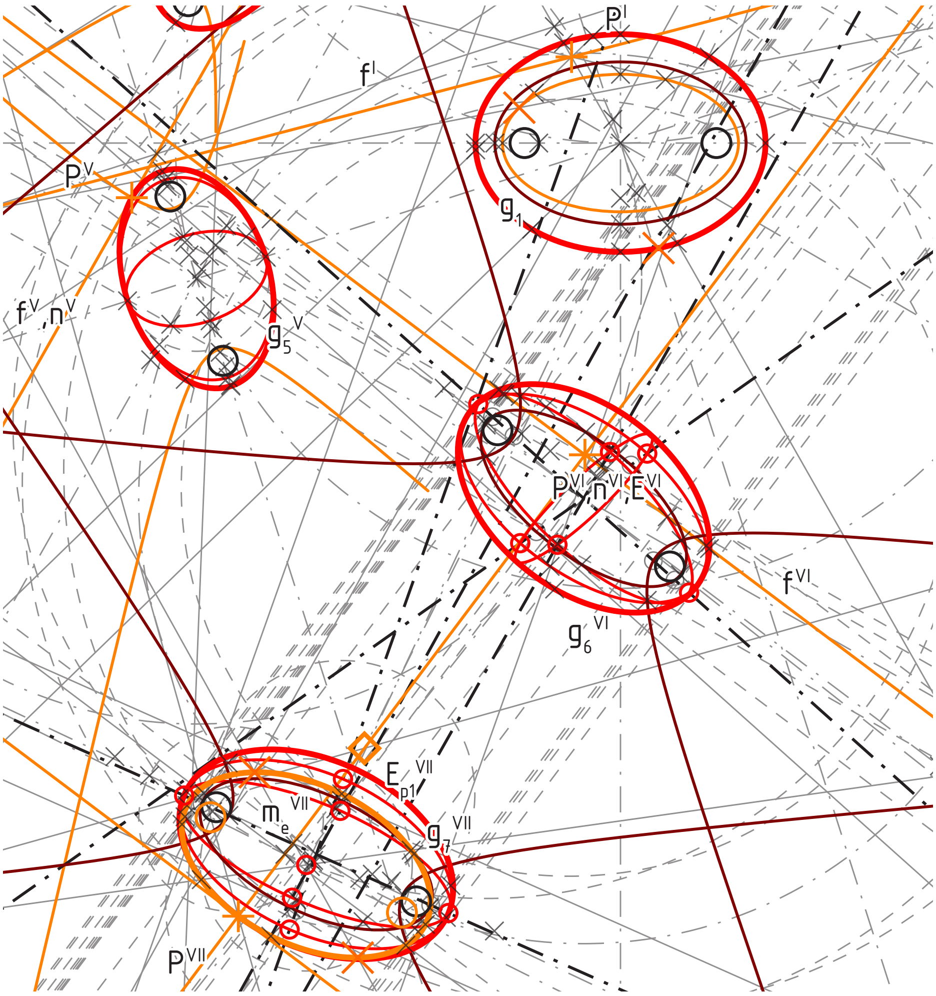
Ezekkel a módszerekkel az ellipszoid bármely pontján keresztül meg tudjuk határozni legalább az egyik konfokális felületet, amiből megtudjuk az egyik főgörbületi irányt. Az ellipszoid érintősíkját minden pontjában ismerjük és tudjuk, hogy a második főgörbületi irány merőleges erre a síkra és az első főgörbületi irányra. Így tehát az ellipszis bármely pontjának megszerkeszthetjük a két főgörbületi irányát. Én a könnyű ábrázolhatóság végett a szerkesztést képsíktranszformációval oldottam meg a következő módon:



19. ábra: A háromtengelyű ellipszoid adott, általános pontjának normálisával párhuzamos nézete
g : Az ellipszoid kontúrgörbéi
P : Az ellipszoid egy általános pontja

8.1 Egyköpenyű konfokális hiperboloid szerkesztése
Szerkesszük meg az ellipszoid egyik pontjához (Q) tartozó egyköpenyű hiperboloidot. Ezután vegyünk fel egy olyan nézetet, ahol a választott pont az ellipszoid kontúrgörbéjén található (V. nézet). Ezt legönnyebben a test kis- és középső tengelyére merőleges nézetből tudjuk megszerkeszteni. A keresett kontúr ebben a nézetben vetítő helyzetű síkgörbe, a választott ponton és az ellipszoid origóján átmenő egyenes lesz. Az egyenes kimetsz ebben a nézetben két pontot az ellipszoid konturján, ahova érintő szerkesztésével megkapjuk a keresett vetítési irányt. Ezzel a vetítési iránnyal új képet veszünk fel, ahol a választott pont ráesik az ellipszoid kontúrjára (V. nézet). Ez azt jelenti, hogy a test érintősíkja adott pontban vetítő helyzetű, a ponton átmenő, kontúrellipszist érintő egyenes (f^{V},n^{V}). Ha a ponton keresztül merőlegest húzunk az egyenesnek látott képsíkra, megkapjuk a felület ponton átmenő normálisát. Ezzel a normálissal párhuzamos vetítési iránnyal meghatározunk egy új képet (VI. nézet). Ezen a képen a test hozzánk legközelebbi pontja a választott pont (P), a ponton átmenő normális vetítő helyzetű (tehát egy pontban látjuk; P^{VI}, n^{VI}), a ponton átmenő érintősík pedig párhuzamos a képsíkkal. Ezekből származik, hogy a ponthoz tartozó görbületi irányok síkjai (köztük a főgörbületi irányok síkjai is) vetítő helyzetűek lesznek.
8.2 Test egyik görbületének meghatározása általános pontban
Ezután megkeressük az ehhez a ponthoz tartozó főgörbületi irányt. A vizsgált pontban a főgörbületi irányhoz ismernünk kell a két összemetsződő felület érintősíkját. A két érintősík metszésvonala lesz a térgörbe érintőegyenese (f), ami megmutatja a főgörbületi irányt. Az ellipszoid érintősíkja ismert, a konfokális felület érintősíkja a pontban pedig a ponton átmenő két alkotó által kifeszített sík. A konfokális hiperboloid egyik képe ismert. Ezen a képen ismerjük a konfokális hiperboloid torokellipszisének képét is, tudjuk továbbá, hogy a felület két alkotója érinti ezt a torokkört. Ezen adatok tudatában megszerkeszthetjük a két alkotót, az alkotók által kifeszített síkot és a két sík metszetvonalát. A metszetvonalat továbbvisszük arra a képre, ahol az ellipszoid választott pontbeli (P) érintősíkja párhuzamos a képsíkkal (VI. nézet). Ezen a képsíkon vetítő helyzetű síkot illesztünk az érintőre (f^{VI}), és ezzel a síkkal elmessük a háromtengelyű ellipszoidot, majd felveszünk egy újabb nézetet, amely párhuzamos ezzel a síkkal (VII. nézet). Ezen megszerkesztjük az ellipszoid és a sík által kimetszett görbét, ami

egy ellipszis lesz (m_e^{VII}). Ezt én az ellipszis három szimmetriasíkjában fekvő görbe elmetszésével, és ezen pontok segítségével a "kúpszelet öt ponton keresztül" paranccsal végeztem el. Az ellipszis egyik pontja a választott pont, itt kell megszerkesztenünk az ellipszis görbületét. Ehhez megszerkesztjük az ellipszis kis- és nagytengelyét, ezekből a fókuszpontokat, végül pedig a korábban tárgyalt fókuszpontos módszerrel (lásd 4.4) kiszerkeszthetjük adott pontban a görbületet (E_{p1}).

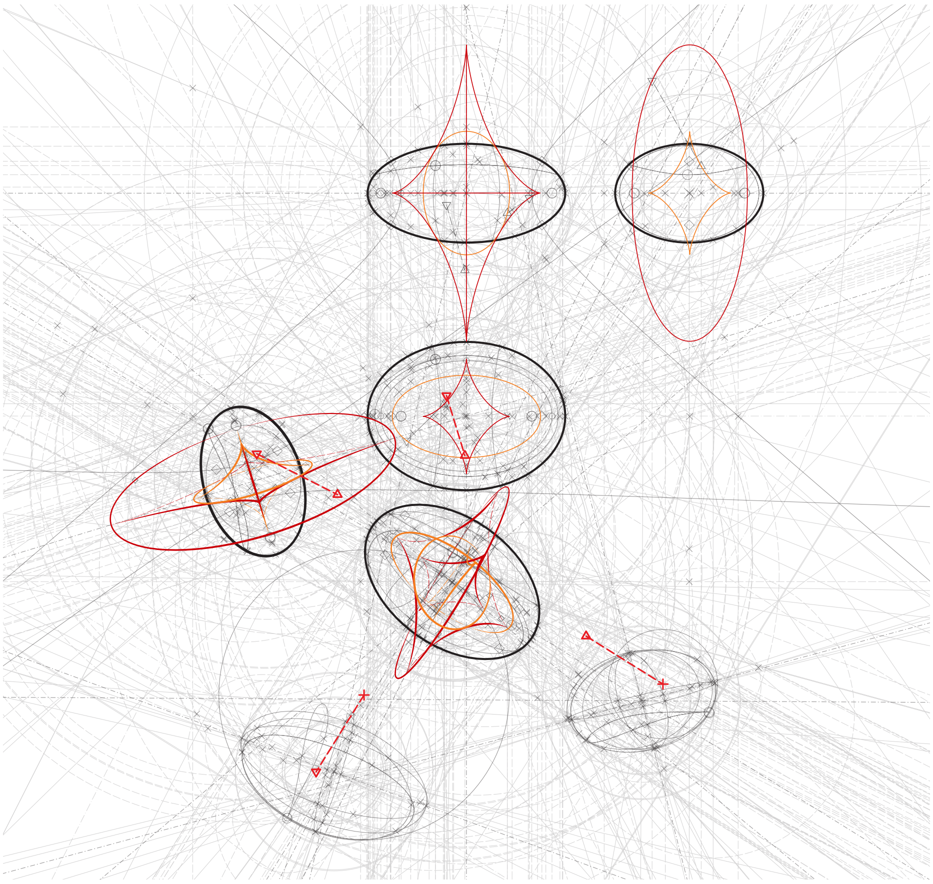


20. ábra: A háromtengelyű ellipszoid általános pontjának egyik görbületi értékének szerkesztése

g : Az ellipszoid kontúrgörbéi
P : Az ellipszoid egy általános pontja
f : Az ellipszoid általános P ponjtán átfutó egyik görbületi vonal érintője
n : Az ellipszoid normálisa, az általános P pontban
m_e : Az ellipszoid metszetgörbéje az n és f által kifeszített síkkal
E : Az ellipszoid fokális felületeinek egyik P-hez tartozó pontja

8.3 Test másik görbületének meghatározása általános pontban

Most ki kell szerkesztenünk a másik főgörbületi irányt. Azon a képen, ahol a test adott pontbeli érintősíkja párhuzamos a képsíkkal, ezt könnyen megtehetjük. Tudjuk, hogy a főgörbületi irány merőleges a test érintősíkjára és merőleges a másik főgörbületi irányra is. Mindkettő ismert, és mivel a főgörbületi irányok ezen a képen vetítő helyzetűek annyit kell tennünk, hogy a korábban kiszerkesztett főgörbületi irány egyenesére merőleges egyenest húzunk az adott ponton keresztül. Majd erre az egyenesre is vetítő helyzetű síkot állítunk és megismételjük a korábban írtakat (lásd 8.2). Így megkaptuk a háromtengelyű ellipszoid általános pontjában a fokális felület hozzá tartozó két pontját.



21. ábra: A háromtengelyű ellipszoid fokális felületének speciális görbéi, és az ellipszoid általános potjához tartozó két pontja

9. A szerkesztés rövid összefoglalása

Tehát röviden: a szerkesztéshez először megkerestem a háromtengelyű ellipszoid származtatásának módjait. Először dilatációval gömbből, majd pedig a Staude-féle fonálszerkesztésből.
Ezután két részre osztottam a fokális felület szerkesztését: a felület speciális pontjainak kiszerkesztésére, ami a szimmetriasíkjában fekvő pontjaiból és a két umbilikus pontból áll, majd az általános pontok megkeresésére.
A szimmetriasíkban fekvő pontok szerkesztéséhez a test három fő vetületének kontúrgörbéjét használtam fel. Először mindegyik kontúrellipszisnek evolútát szerkesztettem, majd az evolúta pontjaihoz egy merőlegesen felvett metszet segítségével megkerestem a másik görbületét.
Ezután a test általános pontjában meg kellett határozni a főgörbületi irányokat. Ehhez visszavezettem az ellipszoidot a Staude-féle fonálszerkesztésre, megkerestem a fokális kúpszeleteket, amik meghatározták az umbilikus pontokat is. A fokális kúpszeletek segítségével konfokális egyköpenyű hiperboloidot, majd konfokális kétköpenyű hiperboloidot szerkesztettem, amik megmutatták a test főgörbületi irányait.
A főgörbületi irányok síkjában elmetszettem az ellipszoidot és az így kapott ellipsziseknek megkerestük adott pontban a görbületét.

10. Irodalomjegyzék

[1] Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan: Szemléletes Geometria, Budapest, Gondolat (1982)
[2] Staude, O.:Die Focaleigenschaften Der Flachen Zweiter Ordnung, Leipzig, Teubner, (1896).