



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Húros hangszer analitikus rezgésvizsgálata

Szerző:

Friedrich Dániel

NK: FHHGJO

Konzulensek:

Dr. Hegyi Dezső

Dr. Sipos András Árpád



2021. ősz

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Tartalom

ABSZTRAKT	3
ENGLISH ABSTRACT	5
Bevezetés.....	6
A hangszer.....	7
Az egyszerűsített modell	8
A fizikai modell.....	11
A hatásfunkcionál stacionárius pontjának feltétele	12
Az Euler-Lagrange egyenletek modelltől izolált megoldása.	16
Az egyes elemek egyenleteinek meghatározása	16
A húr és a lemez időfüggése	17
A rúdegyenlet térfüggése.	19
A húr térfüggése.....	19
A lemez térfüggése.....	21
A rúd hullámzásának peremérték-feladatai, a teljes függvény felállítása	25
A lemez peremérték-feladatai	25
A húr peremérték-feladatai	28
Kapcsolt modell.....	32
A kapcsolt pont (híd) időbeli mozgása	34
A kapcsolt modell peremérték-feladatai	40
Az időfüggvény meghatározása.	43
Az eredmények analitikus megjelenítése, grafikus ábrázolása	45
A végeelem modell.	47
A waveguide-modell	52
Összegzés, kitekintés.....	53
BIBLIOGRÁFIA.....	56
Köszönetnyilvánítás	57
FÜGGELÉK.....	58
Csillapítatlan oszcillátor kezdeti feltételeinek algebrai (nem-trigonometrikus) tárgyalása..	58

ABSZTRAKT

Dolgozatom célja, hogy egy saját készítésű hangszer egyszerűsített modelljének rezgéseit analitikusan írja le, majd az analitikus számítást igazolandó, végeselem-módszerrel verifikálja a kapott eredményeket. Röviden részletezi a modellalkotási kérdéseket: előfeszített húr, nyírás- és nyújtásmentes rúd a hangszer lemezének modellezésére, lineáris, kis elmozdulásos megközelítés. A dolgozat bemutatja az elhanyagolásra kerülő mennyiségeket, majd elméleti mechanikai alapon tárgyalja a mozgásokat.

Az analitikus módszer több szinten kerül kidolgozásra: bevezetésre kerül a rendszer szabad energiája, ebből a Hamilton-féle legkisebb hatás elve származtatja a csatolt parciális differenciálegyenleteket. Részletesen bemutatásra kerül ezek általános megoldása, majd a modelltől izolált esetben elemzésre kerülnek lehetséges partikuláris megoldások. A dolgozat végén a modell szabad rezgést leíró peremérték-feladatai következnek, amelyek az előtte bemutatottaktól abban különböznek, hogy a rendszer csatolását is figyelembe veszik. A végeselem-modell is az utóbbi rendszert vizsgálja. Általános törekvés a követhetőség, és átláthatóság; a felhasznált matematikai módszerek tiszta alkalmazása. A részletes irodalomjegyzékből a felhasznált könyvek tekintetében fontos kiemelni Landau-Lifsic Elméleti fizika című sorozatának első, és hetedik kötetét, Nagy Károly Elméleti Mechanikáját, illetve Budó Ágoston Mechanikáját.

A dolgozat hangsúlyozottan bevezető jellegű, a további, gyakorlat-orientáltabb kutatásokhoz ad szilárd alapot, illetve az elméleti ismereteket mélyíti el. Kitekintésként kapcsolatot mutat a rezgések más területeivel: az épületek rezgésvizsgálatához is hasznosítható, analitikus összefüggéseket ad.

A bibliográfiánál fontos megjegyezni, hogy a könyvek eltérő tudományterületekből származnak; célszerű őket csoportosítani. Első kategóriába sorolnám a közvetlenül felhasznált irodalmakat, mely az elméleti fizika könyveket tartalmazzák, illetve

a matematikának a módszerekben tulajdonképpen felhasznált részét: ezek főként differenciálegyenletek, vektor- és tenzoranalízis, lineáris algebra, komplex függvénytan, analízis, differenciálgeometria témájú könyvek.

Második kategóriába tartoznak azon könyvek, melyek a szemlélet kialakításában adtak nagy segítséget, ezek közül szeretném kiemelni az axiomatikus geometriakönyveket – természetesen konkrét, geometria tartalma nincs a dolgozatnak, de a modell elméleti struktúrájának létrehozásakor, az axiómák meghatározásakor, a következmények levonásakor elengedhetetlen egy elméleti világ felépítésének tudománya, mely módszertanához ezen könyvek adtak számomra releváns segítséget. Hasonló szempontból az analógiák terén az Elméleti Villamosságban, illetve az Elektrodinamika könyv adott számomra absztraktabb térszemléletet, illetve a hullámok nem mechanikai, hanem elektronikai tárgyalása, mely más szempontból, más terminológiával írta le lényegében ugyanazt – segítve a tudományok közti határok lebontását, egységes, magasabb szintű szemlélet kialakítását.

ENGLISH ABSTRACT

This study aims an analytical interpretation of a custom-made stringed musical instrument. The analytical results are verified by a finite element model. The analytical model of the instrument consists of a prestressed string and a flexible, but unshearable and inextensible rod, which latest represents the plate of the instrument, and the neglected effects and quantities are discussed.

The motions are described by an approach rooted in theoretical physics. First the free energy of the system is obtained by assuming linear elasticity and small deformations. Then the governing equations are derived according to the stationary-action principle. The obtained partial differential equations solved, then some isolated cases are investigated. The last examination is the initial value problem associated with the coupled, freely vibrating system. The finite element model investigates this latest system. The general aspiration are the traceability and transparency, the applied mathematical method's clear interpretation. This study strongly relies on the first and seven volumes of Theoretical Physics by Landau and Lifsic, the Theoretical Mechanics by Károly Nagy, and Mechanics by Ágoston Budó.

This essay is an introduction to further research and provides knowledge base on vibrations and acoustic waves. Finally I show the connection between vibrating instruments and buildings, for example the vibration of rods, beams and so on.

Bevezetés

A TDK munka előzménye egy saját tervezésű billentyűs, húros hangszer kivitelezése és vizsgálata volt. Később a Fa tartószerkezetek konstruálása című tárgy beadandó dolgozata keretében ismertettem a hangszer tartószerkezeti kialakítását, és empirikus, kísérleti fizikai úton bemutattam a húrok által a keretvázra gyakorolt erőhatásokat, illetve elemeztem a húr konstruálási paramétereinek megválasztási lehetőségeit (húrhossz, anyag, vastagság, feszítőerő összefüggései, összehangolása a rendelkezésre álló felülettel, teherbírásokkal, geometriai kialakítással). Ez után fogalmazódott meg bennem egy távlati cél, melynek második lépése a TDK dolgozat: szeretnék létrehozni egy szoftvert, mely geometriai, anyagi paraméterek esetén meghatározza a tervezett hangszer hangszínét, annak megépítése előtt – így lehetővé téve a hangszerek hangszínének tervezését. E dolgozatnak nem célja eljutni idáig, itt egy egyszerűsített modellt írok le a matematikai fizika módszereivel.

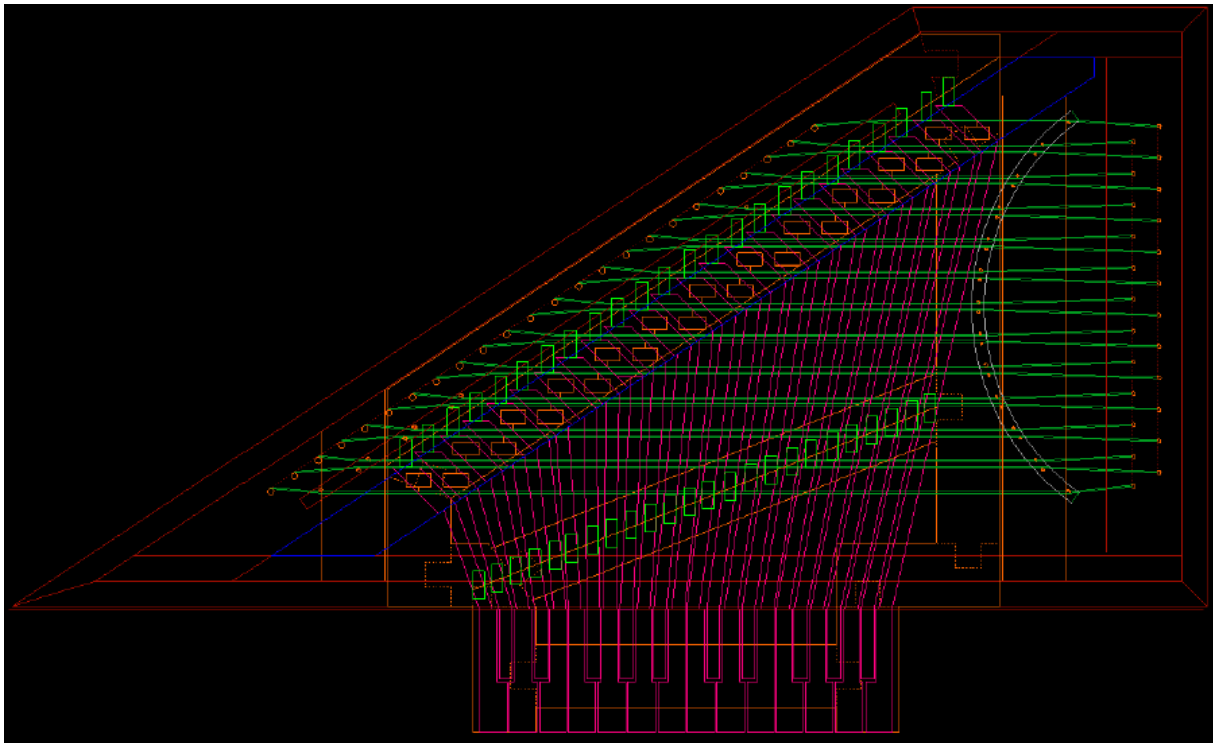
A rezgéseknek, hullámoknak a fizikában meglehetősen nagy irodalma van, számos kutató foglalkozott ezen jelenségek leírásával. A dolgozatom fő célja, hogy kiindulási alapot nyújtson a későbbi kutatások számára; egy nagyon egyszerű modellen keresztül bemutatom analitikusan a húrok és lemezek hullámvizsgálatát, majd végeselem-módszerrel alátámasztom az eredmények helyességét. A végső eredmények a közölt formában nem újak (leszámítva a kapcsolt modell alkalmazott matematikai leírását, ahol a parciális differenciálegyenlet peremfeladatára új lehetőséget mutatok be), viszont a sok mű között nem találtam egyetlen hasonlóan, szabatosan, lépésről lépésre következetesen leírt számolást sem a témában, mely azt az alapvetésektől a végső eredményekig közérthetően bemutatná. A felhasznált irodalom részlegesen kidomborítja a számítás egy-egy aspektusát, az önálló munka az egyes matematikai fogások értelmezése, a nem fizikusok számára közérthetővé tétele volt. A matematikai apparátus nem kerül bemutatásra, a terjedelem miatt ez nem is lehetséges, viszont a szükséges matematikai ismeretek fényében minden képlet közvetlenül következik az előzőből, hiánytalanul követhető - ellentétben a legtöbb szakirodalmi művel, ahol gyakori a „könnyen beláthatjuk” szókapcsolat, melyet gyakran hosszadalmas, és közel sem triviális számítások követnek.

A hangszer



A vizsgálat tárgyát alkotó hangszer egy egyedi megjelenésű, mechanikai kialakítású virginál. A virginálok a csembalók családjába tartozó hangszerek. E hangszer család jellemzője, hogy a hangképzés a húrok billentyűzet által közvetített pengetésével történik. A billentyű játékoshoz közeli lenyomása esetén a hangszertesten belüli része felemelkedik (kétkarú emelő), egy sínen vezetett ugrót magasba emel, majd az azon lévő plektrum megpengeti a húrt. A lenyomott billentyű felengedése után a plektrum a kezdeti pozícióba kerül úgy, hogy a húrt kikerüli, így másodszori pengetés nem következik be. A családon belül három fő típust különböztetünk meg a billentyűzet és a húrok által bezárt szög alapján (billentyűzet iránya alatt a billentyű forgástengelyére merőleges, horizontális síkú irányt értem, a húrok iránya pedig megegyezik a húrok által kijelölt egyenesek irányával). A csembalóknál a húrok és billentyűzet alaprajzi vetülete kollineáris, virgináloknál egymásra merőleges, az úgynevezett spinetteknél pedig a két előző által kijelölt szögtartományban foglal helyet. Ezen hangszerek főleg az 1500-1700-as években voltak elterjedtek, majd később a zongora sajnos egyre inkább kiszorította őket.

A hangszer részletes ismertetése megismerhető az említett dolgozathól, melyet kérés esetén szívesen megosztok.



A hangszer alaprajza, melyet ArchiCAD-del szerkesztettem. Vörös: oldallemez és tartószerkezeti keretváz (mindkettőnek a kapcsolati kialakítása változott; narancssárga: billentyűzet keretváz; ciklámen: billentyűzet; zöld: húrok; világoszöld: billentyűzet tengelyeinek, vezetősíneinek helye; kék: regiszter (narancssárgával jelzett lyukakkal az ugrók helyének). A jobb oldali (szürke) híd a kivitelezés során törtvonalként készült el.

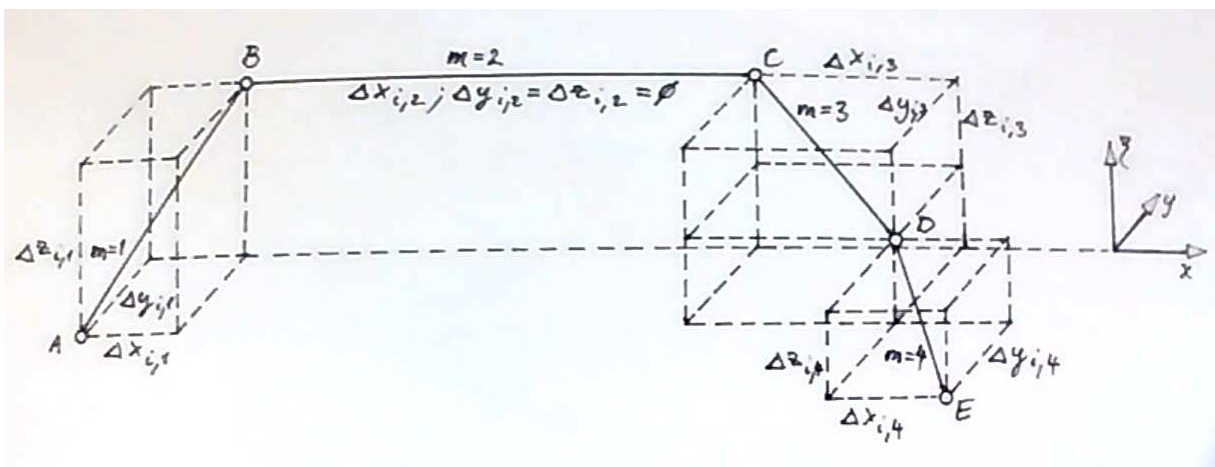
Az egyszerűsített modell

E szakaszban röviden ismertetem a hangszer modellezési lépéseit, ahogyan a konkrét eszközről absztrakciók révén a mechanikai vizsgálat tárgyához jutok.

Az alábbi képen látható, hogy bal oldalt találhatóak a pengetőszerkezetek, melyek a hangképzésért felelősek, középen vonul a híd, mely összekapcsolja a rezonátorlemezt (a díszítéssel ellátott vékony lucfenyő-lemez) a húrokkal, jobb oldalt pedig a húrok akasztására szolgáló szegek találhatóak. A pengetés hatására a húrban hullám keletkezik, viszont a húr a kis keresztmetszet miatt kis mértékben képes a környezetében lévő légtömegben nyomáskülönbségeket létrehozni, ezért van szükség a rezonátorlapra, mely a hídon keresztül átveszi a húr rezgéseit, és sugározza a környezete felé.

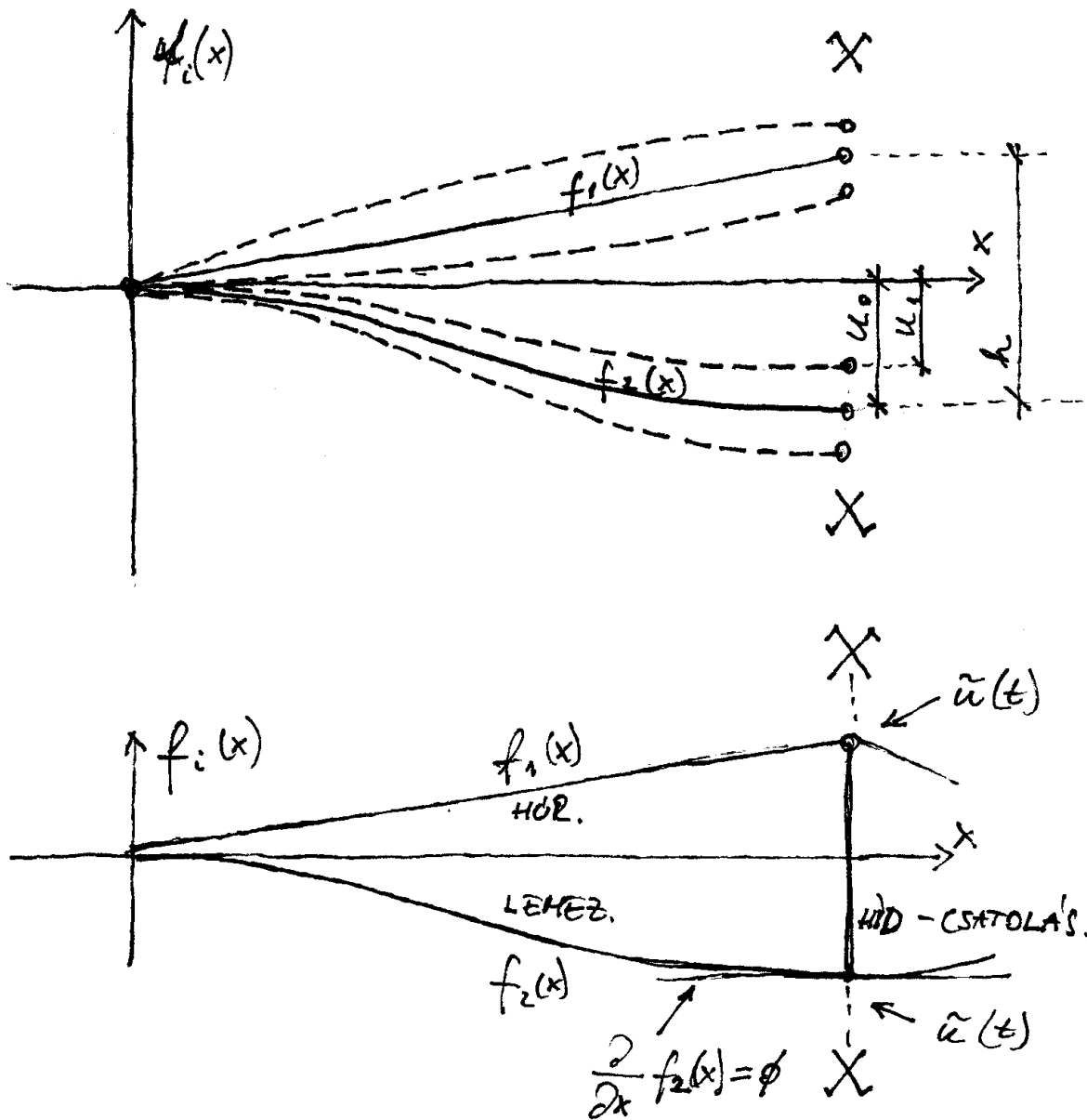


A második képen egy húr sematikus ábrája látható, mely a megelőző dolgozatban került részletes bemutatásra. Láthatók rajta az erőátadási pontok, illetve a geometriai törések, melyekből a különböző irányú erőkomponensek meghatározhatók. Tekintettel arra, hogy az idézett dolgozat főként statikai vizsgálatot tartalmazott, csupán a szerkezetre ható erőket mutatta be, e tekintetben irreleváns volt a hullámváz, hiszen az elhanyagolható erőtöbblet-változást ad az időben tartó szerkezeti szempontból. Jelen dolgozatnak viszont pont a rezgések képezik a tárgyát, így fontos az időbeli leírás – viszont egy ilyen összetett modellen keresztül leírni a kiindulási jelenségeket meglehetősen bonyolult lenne; céloom az egyszerű esetektől eljutni az összetett jelenségekig. Így a modell további egyszerűsítése válik szükségessé.



A dolgozat további részében izolált modell (külön a húr és külön a lemez) bemutatása után a hangszer alábbi absztrakt modellje kerül ismertetésre. Az utóbbihoz ismertetem a következő

általánosítási szintet: egy végtelenül merev keretre ragasztással (merev befogással) kerül rögzítésre a rezonátorlemez, mely fölött feszül a húr. A kettőt egy szintén merevnek tekintett híd kapcsolja össze. További egyszerűsítés, hogy szimmetrikus szerkezetet feltételezek, így a számításnál csak az eszköz bal oldalát vizsgálom.



Az alsó képen látható a szimmetrikus, egyszerűsített szerkezet, a felső képen pedig a nyugalmi, illetve a két szélső pozíció a hullámozás közben.

A fizikai modell

Az analitikus modellt a klasszikus mechanika eszköztárának használatával vezetem be. A hangszer húrjának és lemezének viselkedését a klasszikus, Euler-Bernoulli rúdmodell alapján írom le. Első lépésben meghatározásra kerül a rendszer teljes energiája – itt fontos tisztázni pár alapvetést. A rúdmodellnél feltételezem, hogy a folyamatot elegendően kicsiny kitérések és nyúlások jellemzik – így az elmozdulások sorbafejtésénél megállok a lineáris tagoknál, illetve a deformációtenzor lineáris függvénye a feszültségtenzornak. Az anyagmodellnél továbbá homogenitást feltételezek, így a kis elmozdulások esetén érvényes a

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{lm}$$

Hooke törvény, ami egy homogén, lineáris leképezés, mely kapcsolatot teremt a feszültség-, és az elmozdulástenzor szimmetrikus része között (röviden utalok arra, hogy tetszőleges tenzor felbontható egy szimmetrikus, és egy antiszimmetrikus tag összegére, belátható a harmadrendű, teljesen antiszimmetrikus tenzor, a vektoranalitikai rotáció, és a vektoriális szorzat definíciója alapján, hogy az antiszimmetrikus tag tengely körüli forgást jelent, a szimmetrikus tag pedig algebrai átalakítások után igazolható, hogy a megnyúlást jelenti [Nagy 1989]). A fenti, negyedrendű, rugalmas együtthatókat tartalmazó tenzor az izotróp modellünk esetében kettő független tagot tartalmaz csupán a 3^4 általános eset helyett (Lamé-állandók). Sőt, tekintettel arra, hogy én a rúdmodell esetében a nyírást elhanyagoltam, a Lamé-féle állandókból származtatható, egyetlen együtthatót, a Young-féle rugalmassági moduluszt alkalmaztam kizárólag.

Utalva az általános esetre, inhomogenitás és az anizotrópia esetén a rugalmas együtthatókból képzett negyedrendű tenzor a térnek is függvénye, illetve, ha figyelembe vesszük a disszipációs energiák miatti időbeli hőváltozást, az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\sigma_{ij}(x, y, z, t) = C_{ijkl}(x, y, z, t) \varepsilon_{lm}(x, y, z, t).$$

Továbbá a rezgésnek az időben kis környezetét vizsgálom, ahol a csillapítás nem jelentkezik, így a differenciálegyenletek elsőrendű időderiváltakat nem fognak tartalmazni, mely a megoldásokat egyszerűsítik. (A húr rezgésében csillapítás esetén az exponenciális

függvény kitevőjében komplex konjugáltak szerepelnének, ez esetben csak a képzetes tag marad meg. Látható így a csillapítás matematikai vonatkozása: a harmonikus függvényt egy exponenciálisan lecsengő függvénnyel szorozza meg, mely a rezgés időbeli burkológörbéje, mely a végtelenben eltűnik.) Így kinetikus és potenciális energia lép fel, disszipációs nem. Matematikailag létezik egy skalártér, melynek negatív gradiensei az erővonalak, illetve a skalártér rotációmentes – ezt hívjuk potenciáltérnek. Az ilyen potenciáltérhez tartozó erőteret nevezik konzervatív erőtérenek.

A második lépés a mozgásegyenletek levezetése. Itt az algoritmikusabb Hamilton-féle variációs elvet használtam fel, mely a rendszert egészben kezeli. A newtoni mechanikára alapozva ezzel párhuzamosan fel lehet ugyan építeni a modellt, de sok tekintetben körülményesebb; független részekre kell bontani az elemeket, erőket, reakcióerőket. A harmadik szint a differenciálegyenletek analitikus megoldása. Itt részletesen bemutatásra kerülnek a homogén, lineáris, másod-, illetve negyedrendű parciális differenciálegyenletek megoldásai. Negyedik szinten algebrai, trigonometriai átalakítások történnek, melyek az exponenciális eredményeket szemléletesebbé teszik, ötödik szinten a peremérték-feladatok a konkrét rendszerhez illesztik a megoldásokat, hatodik szinten numerikus helyettesítések történnek. Ezt követi a végeelem-modell, ami az analitikus modellel párhuzamosan bemutatja a rezgési módusokat.

A hatásfunkcionál stacionárius pontjának feltétele

A dolgozatban a Hamilton-féle variációs elvet, a hatásfunkcionál extrémumának meghatározását a felmerülő speciális részleteknél továbbmenően nem részletezem; a felhasznált irodalomban e helyen hivatkozom Landau-Lifsics első kötetére [Landau-Lifsics 1988], Nagy Károly Elméleti mechanikájának [Nagy 1989] a „Mechanika elvei” című fejezetre, illetve Budó Ágoston Mechanika [Budó 1988] című kötetére, melyekből az elv részletesen megismerhető. Ugyanakkor hangsúlyoznom kell, hogy ezen könyvek a jelen problémához szükséges általános megfogalmazást csak megemlítik – ugyanis a felsorolt irodalomban a Lagrange-függvény nem tartalmaz elsőrendűnél magasabb deriváltakat, a jelen probléma rugalmas energiája viszont másodrendben tartalmazza az elmozdulásmezőt. Ezért a funkcionál stacionárius pontjának feltételét meghatározó Lagrange-Euler-féle egyenletnek általánosabb alakját kellett alkalmaznom.

Bevezetve az

$$f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{és} \quad f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

jelöléseket, a két független változós, argumentumában magasabb rendű deriváltakat is tartalmazó funkcionál általánosan

$$I[f] = \int \mathcal{L}(x_1, x_2, f, f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}, \dots, f_{22\dots 2}) dx_1 dx_2$$

alakú. A $\delta I[f]=0$ stacionárius pont feltétele az alábbi Euler-Lagrange-egyenlet, a variációszámításból, és funkcionálanalízisből ismeretesen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{11}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{12}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{22}} \right) - \dots \\ + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x_2^n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{22\dots 2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a modell teljes energiáját fel tudjuk írni, és a variáció számítását végre tudjuk hajtani, előbb tisztában kell lennünk a rendszer energia-dimenziójú mennyiségeivel. A hangszer általános modellje feszített-hajlított rúdmodell, melyből később elhanyagolásokkal megkapjuk a húr- és a lemez speciális modelljét. Az energia-sűrűség felírásánál nem teszünk különbséget az egyes elemek között – így elég egyszer levezetni a mozgásegyenlet, mely általános alakú – a feszítést és hajlítást ugyanúgy tartalmazza. A félreértéseket elkerülendő, a hangszer folytonos anyageloszlású modelljét vizsgálom, így nem az anyagi pontot jellemző Lagrange-függvénnyel, hanem az eloszlást bemutató Lagrange-sűrűséggel dolgozom. A Lagrange-sűrűség elméleti bevezetését részletesen Nagy Károly Elméleti mechanikájának [Nagy 1989] vonatkozó pontja tartalmazza.

A rendszer elemei rendelkeznek rugalmas energiával, azon belül hajlítási energiával, illetve előfeszítési energiával; ezen túl mindegyik elem rendelkezik kinetikus energiával. Az egyes energiákra vonatkozó összefüggéseket nem bizonyítom, részletesen megtalálható Landau-Lifsic Elméleti fizikájának 7., Rugalmasságtan [Landau-Lifsics 1974] című kötetében. Fontos feltételezés, hogyha a rúdhoz viszonyítunk, se longitudinális, sem binormális irányú elmozdulást nem engedünk meg (azaz a rúdban nem ébrednek longitudinális hullámok, illetve a rúdnak nincs torziója, csak időben változó görbülete).

A teljes hajlítási rugalmas energia teljes rúdra összegzett, integrális alakja:

$$U_{hajlítás,i} = -\frac{1}{2} E_i I_i \int_0^{l_i} dx \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2$$

ahol E a Young-modulus, $I = \int dA y^2$ ún. inercia, u a vertikális diszlokáció, az integrálási tartomány pedig az elem bal végétől a jobb végéig (l) tart. Ezen mennyiségek a modellben nem függvényei a térnek, így kihozhatók az integráljel elé.

Az előfeszítésből származó rugalmas energia teljes rúdra összegzett, integrális alakja:

$$U_{feszítő,i} = -\frac{1}{2} T_i \int_0^{l_i} dx \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2$$

ahol T a feszítőerő.

A kinetikus energia teljes rúdra összegzett, integrális alakja:

$$U_{kinetikus,i} = +\frac{1}{2} \rho_i A_i \int_0^{l_i} dx \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2$$

ahol ρ az anyagsűrűség, A pedig a rúdtengelyre merőleges keresztmetszet területe.

Miután a rendszer különböző energiái bemutatásra kerültek, képezzük az elemek Lagrange-sűrűségét azaz a Lagrange-féle energia térben megoszló, differenciális alakját!

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \rho_i A_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E_i I_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} T_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2$$

Láthatjuk, hogy a megadott általános Lagrange-Euler egyenlet egyszerűsödni fog, hiszen a legmagasabb rendű derivált másodrendű, illetve a Lagrange-sűrűség az $x, t, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ változókat, vegyes deriváltakat explicit módon nem tartalmazza. Ennek értelmében a hatásfunkcionál az alábbi alakú:

$$S[\mathcal{L}_i] = \iint_{x_1 t_1}^{x_1 t_1} \mathcal{L}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx dt$$

Keressük a funkcionál stacionárius pontját, azaz

$$\delta S_i = 0$$

egyenlőség teljesülésének keressük a feltételét! Ez akkor következik be, ha a variációhoz tartozó Euler-Lagrange-egyenlet teljesül. A rendszer speciális Lagrange-Euler-egyenlete az alábbi módon származtatható az általános képletből kiindulva, a saját modellre átalakítva:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)} = 0.$$

A fenti Euler-Lagrange egyenletnek a következő lépésben meghatározom az együtthatóit, majd az együtthatók függvényében előállítom az egyenletet, amely, mint Lagrange-féle másodfajú egyenlet, a rendszer mozgását leírja. Láthatóan más alakú az egyenlet, mint a fent említett irodalom kevésbé általános egyenletei.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} = +\rho_i A_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} = -\rho_i A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)} = -T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)} = +T_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)} = -E_i I_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad +\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)} = -E_i I_i \frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4},$$

így a funkcionál stacionárius pontjának feltétele az alábbi

$$T_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - E_i I_i \frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} - \rho_i A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$$

Euler-Lagrange egyenlet, mely egyben a modell elemeinek mozgásegyenleteit is adja. Látható, hogy a fenti egyenlet lineáris, negyedrendű, homogén, állandó együtthatójú parciális differenciálegyenlet. Mielőtt az egyenletet megoldanám, a modell egyes elemeihez illeszttem.

A modell négy egységből áll: két húszakaszból, egy hídból, egy rezonátorlemezről. A híd hatása első közelítésben elhanyagolható, csupán a peremfeltételekben mutatkozó kényszereket határozza meg. Itt említem meg, hogy a kényszerek nem Lagrange-féle multiplikátorokkal kerültek bele a hatásfunkcionálba, hanem peremfeltételekként kerülnek a későbbiekben feldolgozásra.

Vizsgáljuk meg a fennmaradó két elemtípust! Mindkettő leírása a rúdmodellből indul ki, viszont a húrnak oly kicsiny a hajlítómerevsége, hogy a teret negyedrendben tartalmazó tag elhanyagolásra kerül. A lemeznek pedig nincsen előfeszítettsége, a deformációk során létrejött axiális diszlokációi miatt létrejövő normálfeszültségei elhanyagolhatók a hajlítófeszültségek mellett, így az pedig a teret másodrendben tartalmazó tagot fogja nélkülözni.

Jelölje $i=1$ a lemezt, $i=2,3$ pedig a húrokat! A hajlított lemez mozgásegyenlete a fenti megfontolások figyelembevételével:

$$-E_1 I_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} - \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0.$$

Az előfeszített húrszakaszok Lagrange-féle másodfajú egyenlete ($i=2,3$):

$$T_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \rho_i A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0.$$

Az Euler-Lagrange egyenletek modellől izolált megoldása

Az egyes elemek egyenleteinek meghatározása

Az előző fejezetben az S funkcionál stacionárius pontjának feltételeként lineáris, másod- illetve negyedrendű, homogén, állandó együtthatójú parciális differenciálegyenleteket kaptunk, melynek a megoldását kereshetjük szorzat alakban, ezért feltételezzük, hogy

$$u(x, t) = f(x)g(t).$$

A szorzatot a parciális differenciálegyenletbe helyettesítve, a változókat szeparálva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{T}{\rho A} \frac{f''}{f} - \frac{EI}{\rho A} \frac{f^{(IV)}}{f} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\omega^2,$$

ahol

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t}, \text{ és}$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Az egyenlet úgy teljesül minden x, t értékre, ha mind a jobb-, mind a baloldal egy konstanssal egyenlő – e konstans $-\omega^2$ -el jelöltem. A differenciálegyenlet megoldását könnyítendő szerepel

négyzetesen, az előjelét pedig az egyenlet megoldásának periodicitása teszi szükségessé (tekintettel arra, hogy így kapunk komplex kitevőjű hatványfüggvényt).

A húr és a lemez időfüggése

Elsőként tekintsük az egyenlet időfüggő részét, mely rendezve

$$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

alakú másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, közönséges differenciálegyenlet. Az egyenlet megoldásához vezessük be az

$$L(D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2$$

operátor polinomot, melyet a $g(x)$ függvényre hattatva megkapjuk a megoldandó differenciálegyenletet:

$$L(D)g(t) = \ddot{g} + \omega^2 g = 0$$

Az alábbiakban a fenti operátor-polinom sajátérték-problémájával foglalkozunk, ugyanis keressük azon λ értékeket, mely esetén

$$L(D)g(t) = L(\lambda)g(t)$$

egyenlőség teljesül, és a jobb oldalon az összefüggés tisztán algebrai jellegű. Tegyük fel, hogy

$$g(t) = e^{\lambda t}$$

alakú, így a fenti sajátérték-probléma

$$L(D)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t} = 0$$

egyenlőségben jelenik meg. A sajátértéket tartalmazó polinomot részletesen kiírva az alábbi karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$(\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

A fenti egyenlet akkor teljesül, ha

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Ezen egyenletnek a komplex számtesten két megoldása van:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega$$

A fenti egyenlet azon esetekben is teljesül, ha

$$\omega = \omega_n = 2\pi\nu_n = \frac{n\pi}{l}$$

A sajátértékeket az exponenciális egyenletbe helyettesítve, a megoldások lineáris kombinációját képezve $g(t)$ függvényre az alábbi kifejezést (általános megoldás) kapjuk:

$$g_n(t) = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t}$$

Tegyük szemléletessé a kapott megoldásunkat! Feltételezzük, hogy az exponenciális függvények komplex együtthatóval rendelkeznek, mégpedig

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{i\delta} \quad \text{és} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-i\delta}$$

Így az időfüggést adó $g_n(t)$ a következő alakot ölti egyszerű algebrai átalakítások után:

$$g_n(t) = \frac{c}{2} e^{i(\omega_n t + \delta)} + \frac{c}{2} e^{-i(\omega_n t + \delta)}$$

Vegyük figyelembe az Euler-féle képleteket, melyek két algebrai struktúra közti izomorfizmust jelenítik meg:

$$e^{ix} = \sin x + i \cos x$$

A komplex számtesten az exponenciális függvények körében a számításokat könnyen elvégezhetjük, az izomorfizmus miatt a szorzást kitevőbeli összeadásként végezhetjük el, viszont a szögfüggvények sokkal szemléletesebben ábrázolják a rezgéseket, hullámokat, így az alábbi kitérőben áttérünk a trigonometrikus függvényekre.

Legyen

$$\alpha_n = \omega_n t + \delta$$

Így a komplex számtestbeli $g_n(t)$ függvény trigonometrikus alakja:

$$g_n(t) = \frac{c}{2} \cos \alpha_n + \frac{c}{2} i \sin \alpha_n + \frac{c}{2} \cos(-\alpha_n) + \frac{c}{2} i \sin(-\alpha_n)$$

Vizsgáljuk a sinus, cosinus függvények szimmetriatulajdonságait!

$$\cos \alpha_n = \cos(-\alpha_n)$$

$$\sin \alpha_n = -\sin(-\alpha_n)$$

A fenti azonosságokat figyelembevéve

$$g_n(x) = \frac{c}{2} \cos \alpha_n + \frac{c}{2} i \sin \alpha_n + \frac{c}{2} \cos \alpha_n - \frac{c}{2} i \sin \alpha_n$$

A jobb oldalt rendezve, α_n helyére az eredeti kifejezést helyettesítve:

$$g_n(x) = c \cos \alpha_n = c \cos(\omega_n t + \delta)$$

A fenti függvény a jól ismert összefüggés a rezgőmozgásra. Tehát a lemez, illetve a húr összes pontja az időben rezgőmozgást végez, c amplitúdóval, ω_n körfrekvenciával, δ fázissal.

Az időfüggő rész tárgyalásának végén megemlítem, hogy a

$$g_n(t) = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t}$$

függvény ekvivalens átalakítások után a

$$g_n(t) = d_1 \cos \omega_n t + d_2 \sin \omega_n t$$

képzetes egységet nem tartalmazó kifejezésbe megy át, ahol d_i konstans értékek. A gyakorlati alkalmazások során sokszor megjelenik e megoldás; a lemez térfüggésénél mutatom be a képzetes egység kiküszöbölésének módját.

A rúdegyenlet térfüggése.

A szeparációs állandót tartalmazó általános (rudat leíró, húr és lemez közt különbséget nem tevő) mozgásegyenlet az alábbi alakú:

$$\frac{T}{\rho A} \frac{f''}{f} - \frac{EI}{\rho A} \frac{f^{(IV)}}{f} = -\omega^2$$

Ahhoz, hogy a térfüggést leíró $f(x)$ függvényt meghatározzuk, a megoldásfüggvény alakjának könnyebb áttekinthetősége kedvéért foglalkozunk külön a két speciális esettel!

A húr térfüggése

A húrnál, mint ahogy a Lagrange-Euler egyenletnél írtam, a hajlítófeszültségek elhanyagolhatók – tekintettel arra, hogy egy húr a kis keresztmetszeti mérete miatt mintegy ráhúzódik a semleges szálra, így a hajlítófeszültségek nem adnak számottevő járulékot. A húr speciális egyenlete a hajlításból származó tag elhanyagolásával a jól ismert hullámeqyenletbe megy át, melyet itt a szeparált alakban közlök:

$$\frac{T}{\rho A} \frac{f''}{f} = -\omega^2$$

Mielőtt a térfüggést tartalmazó egyenletet megoldom, bevezetek egy új jelölést. Legyen

$$\frac{T}{\rho A} =: c^2$$

melynek a fizikai jelentése a következő: c a hangsebességet jelenti. Megjegyzem, hogy az általam követett variációs elvből közvetlenül, bizonyítás nélkül nem következik a tény, hogy a fenti állandó ekvivalens a hangsebesség négyzetével, illetve én a Fourier-féle megoldást tárgyalom (változók szeparálása) viszont az érdeklődőknek ajánlom a hullámeqyenlet d'Alembert féle megoldásának tanulmányozását, ahol a megoldásfüggvény a húron tovaterjedő hullámokat szemléletesen jeleníti meg.

A fenti jelöléssel a hullámeqyenlet a

$$c^2 \frac{f''}{f} = -\omega^2$$

Bevezetve a

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

jelölést (k az úgynevezett hullámszám, mely az időbeli körfrekvenciának megfelelő térbeli mennyiség, melyre később ezen összefüggésre a diszperziós reláció tárgyalásakor visszatérek), ekvivalens átalakításokat végrehajtva, a hullámeqyenlet térfüggése

$$f'' = -k^2 f$$

alakú lesz. Láthatóan ez az időfüggéshez hasonlóan másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú, homogén, közönséges differenciálegyenlet. A megoldás menete hasonló.

Vezessük be az $L(D)$ operátor polinomot, mely az $f(x)$ -re hatva kiadja a fenti differenciálegyenletet!

$$L(D) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2$$

Az operátor-polinom sajátérték-problémájának vizsgálatához tegyük fel, hogy

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

alakú, így az alábbi összefüggéssel kell foglalkoznunk:

$$L(D)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}$$

azaz a differenciáloperátor-polinom egyenlete helyett az izomorfizmus végett algebrai, úgynevezett karakterisztikus egyenlettel kell megoldani.

A differenciálegyenlet algebrai, karakterisztikus egyenlete ennek függvényében:

$$(\lambda^2 + k^2) e^{\lambda x} = 0$$

Ezen egyenlet csak úgy teljesülhet, ha

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

A fenti másodfokú egyenletnek a komplex számtesten két megoldása van:

$$\lambda_{1,2} = \pm i k$$

Így a térfüggő egyenlet megoldása:

$$f_n(x) = c_3 e^{ik_n x} + c_4 e^{-ik_n x}$$

ahol

$$k = k_n = \sqrt{\frac{\rho A}{T}} \omega_n = \sqrt{\frac{\rho A}{T}} \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}$$

A fenti összefüggés elégíti ki azon határfeltételt, hogy a térfüggésnek a befogások környezetében el kell tűnnie – azaz a *határfeltétel kvantálja a szeparációs állandót*. (Könnyen belátható a trigonometrikus alak periodicitása miatt.)

A tér- és időfüggő megoldások ismeretében definiálhatjuk a húr rezgésének diszperziós relációját:

$$\omega_n(k) = \sqrt{\frac{T}{\rho A}} k_n.$$

A lemez térfüggése

Az általános, szeparált rúdegyenlet:

$$\frac{T}{\rho A} \frac{f''}{f} - \frac{EI}{\rho A} \frac{f^{(IV)}}{f} = -\omega^2$$

A lemezben nincs előfeszítés, illetve az alakváltozás miatt létrejövő normálfeszültségek elhanyagolhatók, így az egyenlet egyszerűsödik:

$$-\frac{EI f^{(IV)}}{\rho A f} = -\omega^2$$

Vizsgáljuk az egyenlet térfüggését! Bevezetve a

$$\frac{\rho A}{EI} \omega^2 = k^4$$

hullámszámot, rendezve az egyenletet a következő összefüggéshez jutunk:

$$f^{(IV)} - k^4 = 0$$

A fenti negyedrendű differenciálegyenletet írjuk fel az

$$L(D)f(x) = 0$$

alakban, ahol az $L(D)$ operátor polinom

$$L(D) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - k^4$$

Tegyük fel, hogy $f(x)$

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

alakú, így a megoldandó sajátérték-probléma

$$L(D)f(x) = L(\lambda)f(x)$$

$$L(D)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x} = 0$$

egyenlőségben jelenik meg. A sajátértéket tartalmazó polinomot részletesen kiírva az alábbi karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$(\lambda^4 - k^4)e^{\lambda x} = 0$$

A fenti egyenlet akkor teljesül, ha

$$\lambda^4 - k^4 = 0$$

Vezessük be a

$$\xi = \lambda^2$$

helyettesítést, így a megoldandó karakterisztikus egyenletünk

$$\xi^2 - k^4 = 0$$

alakú, melynek a komplex számtesten két megoldása van:

$$\xi_{1,2} = \pm k^2$$

Innét származtatható a négy sajátérték:

$$\lambda_{1,2} = \pm k$$

$$\lambda_{3,4} = \pm ik$$

Legyen

$$k = k_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \omega_n} = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \sqrt{\frac{n\pi}{l}}} \quad n \in \mathbb{N}$$

Így a lemez térfüggése:

$$f_n(x) = c_3 e^{k_n x} + c_4 e^{-k_n x} + c_5 e^{ik_n x} + c_6 e^{-ik_n x}$$

A diszperziós reláció

$$\omega_n(k_n) = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} k_n^2$$

mely k-ra nézve kvadratikus kifejezés, ellentétben a húr hullámegyenletének megoldásával.

A térfüggvény az időfüggvénynél bemutatott átalakítások után az alábbi, hiperbolikus és trigonometrikus függvényeket tartalmazó

$$f_n(x) = c_3 \cosh k_n x + c_3 \sinh k_n x + c_4 \cosh(-k_n x) + c_4 \sinh(-k_n x) + c_5 \cos k_n x + c_5 i \sin k_n x + c_6 \cos(-k_n x) + c_6 i \sin(-k_n x)$$

Mely egyrészt átalakítható egyszerű cosinus és cosinus hyperbolicus függvényekké:

$$f_n(x) = p \cosh(k_n x + \zeta) + q \cos(k_n x + \varsigma)$$

ahol p és q konstansok, a szögfüggvények argumentumában pedig fáziseltolás lép fel. Utóbbi a peremfeltételek miatt (a lemezvégen a kitérésnek el kell tűnnie), $\pi/2$ -vel egyezik meg (ezen eltolási transzformáció viszi a cosinus függvényt sinusba, mely $x=0$ és $x=L$ helyen zérust ad).

A könnyebbég kedvéért hajtsunk végre olyan átalakításokat az eredeti,

$$f_n(x) = c_3 e^{k_n x} + c_4 e^{-k_n x} + c_5 e^{ik_n x} + c_6 e^{-ik_n x}$$

egyenleten, hogy a trigonometrikus, hiperbolikus alak ne tartalmazza a képzetes egységet! Ehhez az Euler-formulákra vezető irányba kell terelni a tagokat.

Vezessük be a c konstansok helyére a velük egyenértékű d konstansokat, a köztük lévő reláció, tekintettel arra, hogy egyszerre csak az egyik rendszert fogjuk alkalmazni, lényegtelen. A konstansokat úgy vesszük fel, hogy az f(x) függvény az alábbi alakot ölti:

$$f_n(x) = \frac{d_4 + d_3}{2} e^{k_n x} + \frac{d_3 - d_4}{2} e^{-k_n x} + \frac{d_5 - id_6}{2} e^{ik_n x} + \frac{d_5 + id_6}{2} e^{-ik_n x}$$

Végezzünk a fenti egyenlőségen ekvivalens átalakításokat!

$$f_n(x) = d_3 \frac{e^{-k_n x} + e^{k_n x}}{2} + d_4 \frac{e^{k_n x} - e^{-k_n x}}{2} + d_5 \frac{e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}}{2} - id_6 \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2}$$

Az utolsó tag kivételével azonnal felismerhetők az azonosságok. Az utolsó tagnál vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i} = \sin(k_n x)$$

Átrendezve

$$\frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2} = i \sin(k_n x)$$

A jobboldalt helyettesítve f(x) utolsó tagjába az

$$-i^2 d_6 \sin(k_n x)$$

összefüggést kapjuk, mely az $i^2 = -1$ azonosság felhasználásával a

$$d_6 \sin(k_n x)$$

kifejezésbe megy át. Így felírhatjuk az f(x) függvény képzetes egységet nem tartalmazó, trigonometrikus és hiperbolikus alakját:

$$f_n(x) = d_3 \cosh k_n + d_4 \sinh k_n + d_5 \cos k_n + d_6 \sin k_n$$

Ezen alakkal fogok tovább dolgozni a peremérték-feladatnál.

A rúd hullámzásának peremérték-feladatai, a teljes függvény felállítása

Az elemek időfüggésére kettő partikuláris megoldást kaptunk, a lemez térfüggésére négyet, míg a húr térfüggésére kettőt. Első lépésben állítsuk elő a lemez hullámzását leíró függvényt!

A lemez peremérték-feladatai

Az időfüggést leíró megoldások:

$$g_n(t) = d_1 \cos \omega_n t + d_2 \sin \omega_n t$$

A térfüggés:

$$f_n(x) = d_3 \cosh k_n x + d_4 \sinh k_n x + d_5 \cos k_n x + d_6 \sin k_n x$$

Először foglalkozzunk a határfeltételekkel!

A lemez mindkét végén elfordulást gátló befogással modellezhető (c-c beam), tekintettel arra, hogy a valóságban egy merev test-szerű keretre van ragasztva. Így megállapítható, hogy a lemez két végén eltűnnek az elmozdulások, illetve az érintő vízszintes marad minden időpontban. Ezt az alábbi határfeltételekkel írhatjuk le:

$$u(x = 0, t) = 0$$

$$u(x = L, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 0, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = L, t) = 0$$

Láthatjuk, hogy ez négy egyenlet, nekünk pedig négy egyelőre meghatározatlan konstans szerepel a differenciálegyenlet térfüggő megoldásában. Így a probléma határozott.

Helyettesítsük a fenti összefüggéseket a megoldásfüggvénybe! Az első egyenlet:

$$f_n(x = 0) = d_3 \cosh(0) + d_4 \sinh(0) + d_5 \cos(0) + d_6 \sin(0) = 0$$

$$f_n(x = 0) = d_3 + 0 + d_5 + 0 = 0$$

így

$$d_3 + d_5 = 0$$

A második egyenlet:

$$f_n(x = L) = d_3 \cosh k_n L + d_4 \sinh k_n L + d_5 \cos k_n L + d_6 \sin k_n L = 0$$

A harmadik egyenlethez képezzük a megoldás tér szerinti differenciálhányadosát!

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) = d_3 k_n \sinh k_n x + d_4 k_n \cosh k_n x - d_5 k_n \sin k_n x + d_6 k_n \cos k_n x$$

Az argumentumba helyettesítsük az $x=0$ értéket, és tekintettel arra, hogy itt $f(x)=0$, osszuk el az egyenletet k_n -el – hiszen a hullámszám mindig pozitív.

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x = 0, t) = d_3 \sinh(0) + d_4 \cosh(0) - d_5 \sin(0) + d_6 \cos(0) = 0$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x = 0, t) = 0 + d_4 + 0 + d_6 = 0$$

Tehát

$$d_4 + d_6 = 0$$

Vizsgáljuk a másik hűrvégen, $x=L$ helyzetnél mi a feltétele az érintő vízszinteségének! Hasonlóan k -val történő osztás után, $x=L$ helyettesítéssel az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x = L, t) = d_3 \sinh k_n L + d_4 \cosh k_n L - d_5 \sin k_n L + d_6 \cos k_n L = 0$$

Az $x=0$ helyi határfeltételekből egyszerű algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$d_3 + d_5 = 0$$

$$d_4 + d_6 = 0$$

Innét

$$d_5 = -d_3$$

$$d_6 = -d_4$$

Ezen eredményeket helyettesítsük az $x=L$ helyen lévő határfeltételekbe! A megoldandó egyenletrendszer:

$$d_3 \cosh k_n L + d_4 \sinh k_n L - d_3 \cos k_n L - d_4 \sin k_n L = 0$$

$$d_3 \sinh k_n L + d_4 \cosh k_n L + d_3 \sin k_n L - d_4 \cos k_n L = 0$$

A hiperbolikus, trigonometrikus tagokból együtthatómátrixot képezve, a konstansokat vektorként felírva, a fenti egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} \cosh k_n L - \cos k_n L & \sinh k_n L - \sin k_n L \\ \sinh k_n L + \sin k_n L & \cosh k_n L - \cos k_n L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ezen lineáris egyenletrendszernek akkor lesz a triviális, $d_3=d_4=0$ -tól különböző megoldása, ha az együtthatómátrix determinánása eltűnik:

$$\det \begin{bmatrix} \cosh k_n L - \cos k_n L & \sinh k_n L - \sin k_n L \\ \sinh k_n L + \sin k_n L & \cosh k_n L - \cos k_n L \end{bmatrix} = 0$$

A determináns kifejtése után az alábbi egyenlőségre jutunk:

$$\begin{aligned} &(\cosh k_n L - \cos k_n L)(\cosh k_n L - \cos k_n L) - (\sinh k_n L \\ &\quad - \sin k_n L)(\sinh k_n L + \sin k_n L) = 0 \end{aligned}$$

Tagonkénti szorzás után

$$\cosh^2 k_n L - 2 \cosh k_n L \cos k_n L + \cos^2 k_n L - \sinh^2 k_n L + \sin^2 k_n L = 0$$

Vegyük figyelembe az alábbi trigonometriai és hiperbolikus azonosságokat:

$$\cosh^2 k_n L - \sinh^2 k_n L = 1$$

$$\cos^2 k_n L + \sin^2 k_n L = 1$$

Ezen összefüggéseket felhasználva az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$2 - 2 \cosh k_n L \cos k_n L = 0$$

Így a konstansokat tartalmazó egyenletnek akkor lesz a triviálistól eltérő megoldása, ha

$$\cosh k_n L \cos k_n L = 1$$

A fenti egyenlet megoldásait keressük $x=k_n L$ alakban, így az argumentumban szereplő szorzat $k_n L$ alakú, és n természetes szám. A Newton-Raphson-féle iterációs eljárással keresem ezen x helyeket; melynek a lényege az, hogy találgatás alapján vizsgáljuk, hogy az x_0 véletlen érték mellett konvergál-e egy helyhez a

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

A függvény, és deriváltja 0-ra redukált alakban:

$$f_n(k_1L) = \cosh(n k_1L) \cos(nk_1L) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k_1L} f_n(k_1L) = n \sinh(nk_1L) \cos(nk_1L) - n \cosh(nk_1L) \sin(nk_1L) = 0$$

Az első három sajátérték:

$$n = 1 \text{ esetben } k_1L = 4,73004$$

$$n = 2 \text{ esetben } k_1L = 7,85321$$

$$n = 3 \text{ esetben } k_1L = 10,9956$$

Térjünk vissza az egyenletekhez, és küszöböljünk ki egy újabb konstanst! A térfüggés határfeltételekhez illesztett alakjának egyszerűbb meghatározása (értsd: kevesebb független konstanst tartalmazó kifejezés) érdekében fejezzük ki az első egyenletből d_4 -et d_3 függvényében!

$$d_4 = -d_3 \frac{\cosh k_nL - \cos k_nL}{\sinh k_nL - \sin k_nL}$$

A d_3 -as konstanst nyugodtan tekinthetjük egységnyiinek; az amplitúdót az időfüggés konstansánál fogjuk meghatározni. Így rendelkezésünkre áll az összes konstans közti összefüggés, melyeket számításakor az $f(x)$ függvénybe helyettesíthetünk, mint a trigonometrikus és hiperbolikus bázis lineárkombinációs együtthatóit.

A húr peremérték-feladatai

Vizsgáljuk a lemez után a húrokat leíró egyenletek peremérték-feladatait!

A húr térfüggését leíró egyenlet:

$$f_n(x) = c_3 e^{ik_n x} + c_4 e^{-ik_n x}$$

A lemezhez hasonlóan az első határfeltétel értelmében a húrvégeken az elmozdulásnak el kell tűnnie. A bal oldalon:

$$f_n(x = 0) = c_3 e^{ik_n 0} + c_4 e^{-ik_n 0} = 0$$

Tekintettel arra, hogy mindkét kitevőben nulla szerepel, az alábbi egyszerű egyenlőséget kapjuk:

$$c_3 = -c_4$$

A második határfeltételhez az előbbi eredményt helyettesítsük a térfüggésbe, emeljünk ki c_3 -at, és x helyére írjunk L -t! Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$f_n(x = L) = c_3(e^{ik_nL} + c_4e^{-ik_nL}) = 0$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben lévő kifejezés ekvivalens az egyik Euler-féle összefüggéssel kétszeresével:

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

Ennek figyelembevételével a második, L helyet tartalmazó határfeltétel az alábbi alakot ölti:

$$f_n(x = L) = 2i c_{3,n} \sin(k_nL) = 0$$

A triviális $c_3=0$ -tól eltekintve a baloldal akkor tűnik el, ha az argumentumban szereplő szorzat a π -nek egész számú többszöröse, azaz

$$k_nL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

ekkor

$$\sin(k_nL) = 0$$

és a hullámszámra vonatkozó összefüggés:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Ez a bizonyítása az egyenleteknél már említett ténynek, hogy a határfeltételek kvantálják a szeparációs állandót – bizonyos, természetes számtól, húrhossztól függő értékeket engednek meg. Ugyanis csak ezen esetben kerülnek a hullám-csomópontok a hűrvégekre.

Így a határfeltételeket figyelembe vevő, teret és időt is tartalmazó megoldás:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1,n}e^{i\omega_n t} + c_{2,n}e^{-i\omega_n t}) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Áttérve a c konstansokról d konstansokra, a fenti egyenlőség a következő trigonometriai alakban jelenik meg:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{1,n} \cos \omega_n t + d_{2,n} \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Vizsgáljuk tovább a peremfeltételeket most a kezdetiérték-feladattal! Itt első körben az általános esettel foglalkozom, és megemlítem, hogy a dolgozat alábbi része a d konstansok általános meghatározásáig Fourier módszerét követi.

Vezessük be az $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ függvényt a húr kezdeti alakjára és kezdeti sebességére! Így a kezdeti feltételek:

$$u(x, t = 0) = \alpha(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t = 0) = \beta(x)$$

Számítsuk ki az időderiváltat!

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-d_{1,n} \omega_n \sin(\omega_n t) + d_{2,n} \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x)$$

Így már meghatározhatjuk a kezdeti alakot, és sebességet, miután a megfelelő összefüggésekbe $t=0$ -t helyettesítünk:

$$u(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1,n} \sin(k_n x) \equiv \alpha(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1,n} \omega_n \sin(k_n x) \equiv \beta(x)$$

Az első egyenletnél írjuk a következő kifejezést:

$$k_n = nk_1, \quad \text{ahol} \quad k_1 = \frac{\pi}{L}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{1,n} \sin(nk_1 x) = \alpha(x)$$

Szorozzuk meg a fenti egyenlőséget a $\sin(k_1 m x)$ kifejezéssel, ahol m az egy n -hez hasonló természetes szám, majd integráljuk mindkét oldalt a teljes húrhossz mentén! Így az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{1,n} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(nk_1x) \sin(mk_1x) = \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(mk_1x) \alpha(x)$$

Vegyük figyelembe az alábbi trigonometriai azonosságot:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

Ennek értelmében a fenti integrál az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(nk_1x) \sin(mk_1x) = \int_{x=0}^{x=L} dx \frac{1}{2} [\cos(n-m)k_1x - \cos(n+m)k_1x] \\ &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

azaz

$$I_{n,m} = \int_{x=0}^{x=L} dx \frac{1}{2} = \frac{1}{2}L$$

és

$$I_{n,m} = \frac{1}{2}L \delta_{nm}$$

ahol δ_{nm} az úgynevezett Weierstrass-szimbólum, vagy másnéven Kronecker-delta, mely értéke az $n=m$ egyenlőség esetén 1, minden más esetben 0. A fenti összefüggés megfogalmazható úgy is, hogy a skaláris szorzat definíciójának kiterjesztése értelmében a fenti függvények ortogonálisak – ennek részleteit a valós függvénytannal foglalkozó könyvek tárgyalják.

Visszahelyettesítve az eredményt a kezdeti alakot tartalmazó egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{1,n} \frac{L}{2} \delta_{nm} = \frac{L}{2} d_{1,m} = \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(mk_1x) \alpha(x)$$

Innét az első együttható már könnyen kifejezhető:

$$d_{1,n} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(mk_1x) \alpha(x)$$

A másik, sebességre vonatkozó kezdeti feltételnél a fentivel megegyező módon járunk el; csak a végeredményt közölve:

$$d_{2,n} = 2 \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(mk_1 x) \beta(x)$$

Így a húr idő- és térfüggését az alábbi függvények írják le trigonometrikus alakban a peremfeltételekhez (kezdeti- és határfeltételek) igazodva:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{1,n} \cos \omega_n t + d_{2,n} \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$d_{1,n} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(mk_1 x) \alpha(x)$$

$$d_{2,n} = 2 \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(mk_1 x) \beta(x)$$

$$k_n = nk_1 = n \frac{\pi}{L}$$

$$\omega = \omega_n = 2\pi\nu_n = n \frac{v\pi}{l}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}$$

A diszperziós relációt leíró egyenlet pedig:

$$\omega_n(k) = \sqrt{\frac{T}{\rho A}} k_n$$

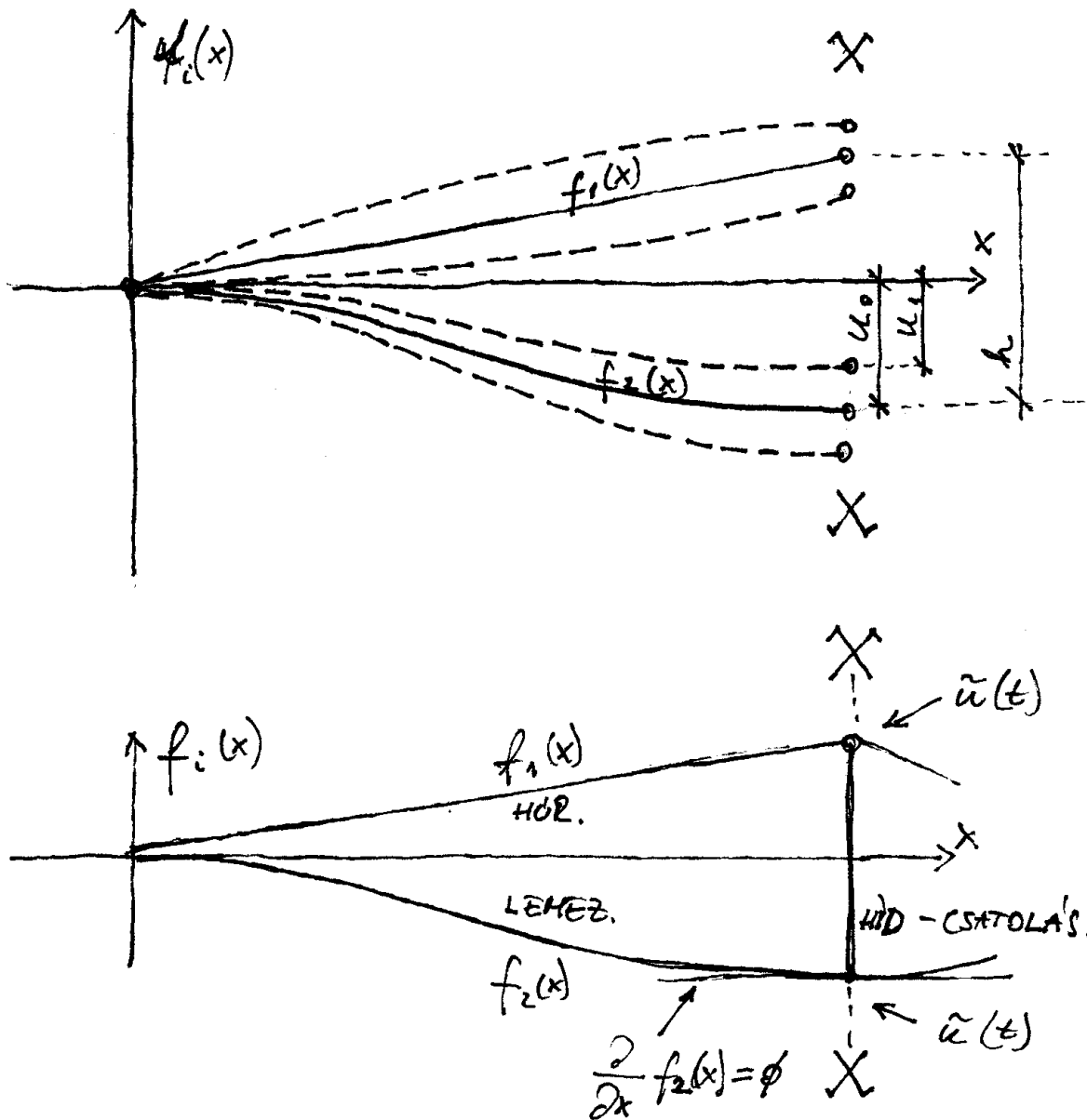
A fenti képletekkel minden szükséges összefüggést előállítottam explicit alakban ahhoz, hogy a modellel a húr rezgési módusai közül az első néhány tagot felírjam. Mint látható, geometriai- és anyagjellemzőktől függenek a hullámok.

Kapcsolt modell

A kapcsolt modell három elemet tartalmaz: egy húrt, a lemezt a húr vég vetületében képzeletben elmetszve, illetve a két elemet összekapcsoló, merev testnek tekintett hidat (mely értelemszerűen nem deformálódik, viszont a húrhoz, és lemezhez képest jelentős tömeggel rendelkezik). A kapcsolt rendszer leírása a következő: az előző fejezetekben meghatározásra kerültek izolált esetben az egyes elemek szabadrezgései – most visszanyúlunk a megoldott

differenciálegyenletekig, de elvetem a peremértékfeladatokat, és ehelyett újabbat határozok meg. A jobb- és bal lemezvég és híd mozgását pedig úgy modellezem, hogy a híd rezgőmozgást végez a híd és húr hatására.

A részletes tárgyalás előtt megemlítem, hogy a kapcsolt modellt parciális differenciálegyenletrendszer írná le, viszont itt a kapcsolás peremfeltételek figyelembevételével történik. Az izolált esetben a kezdetiérték-feladatnál kezdeti sebesség és kezdeti alak meghatározása lenne szükséges, itt viszont, ha a kapcsoló elemnek tömege van, akkor a mozgásegyenlet megoldásával meghatározhatjuk a jobb perem mozgásállapotát. Emiatt nem kell a kezdeti alak sebességét megadni, azonban kérdéses, hogy ekkor lehet-e szorzat alakban keresni a megoldást. Amit bemutatok, az egy olyan megoldás, ahol a tömeg mozgásából származtatom a szorzat-megoldás időfüggő részét.



Az egyes elemek és függvények, illetve konstansok ábrázolása. A későbbiekben az $u(t)$ függvény, az u_0 és u_1 állandók részletes bemutatásra kerülnek.

A kapcsolt pont (híd) időbeli mozgása

A baloldali peremértékek megegyeznek az eddig bemutatottakkal, viszont a jobb oldalon továbbá nem marad nyugalomban a húr vég; az időben vertikális tengelyű rezgőmozgást végez, és általa, a hídon keresztül kapcsoltan a lemez megfelelő pontja ugyanazon függvény szerint mozog. Első lépésben meghatározom a közös pont időbeli függvényét.

A hídra két erő hat: a húrból ébredő vertikális erő, illetve a lemez lehajlása ellen dolgozó, lemezben ébredt erőnek a hatása. A húr vertikális erőkomponense:

$$F_y = T \sin \alpha \approx T \alpha ,$$

ahol T a húrból ébredő, húrral koaxiális erő, α pedig a húr emelkedési szöge. Tekintettel arra, hogy ez a szög kicsiny, nyugodtan sorbafejthetjük a sinus függvényt, és megállhatunk az alábbi lineáris tagnál. Az α szögre geometriai vonatkozásban az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{h - \tilde{u}(t)}{L},$$

ahol h a híd magassága, $u(t)$ a lemez időben változó lehajlása (a keresett függvény), L pedig a vizsgált rendszer hossza.

A lemez lehajlás-tér-függvényét a rugalmas testek mechanikájából ismert

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x) = 0$$

negyedrendű, homogén, lineáris, közönséges differenciálegyenlet írja le, ahol E az anyagra jellemző rugalmassági modulus (az elméleti Lamé-állandókból származtatható mennyiség), I pedig az inercia. A fenti, úgynevezett biharmonikus (operátor tekintetében a Nablát negyedfokon vagy Laplace-t másodfokon tartalmazó) egyenletnél természetesen nem vizsgáljuk a triviális $EI=0$ megoldást, és az egyenlet homogenitása miatt csak differenciálgeometriai vonatkozásában informatív; ahhoz, hogy mechanikai vonatkozása is legyen, képezni kell az egyenlet első integrálját – az integrációs konstans fizikai jelentése a rugalmas testek mechanikájából ismert nyíróerő nevű mennyiség. A fenti (biharmonikus) egyenlet közvetlenül integrálható; viszont alkalmasan választott a-d konstansokkal a keresett függvényt

$$w(x) \equiv u_1(x) \equiv P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

polinom írja le, ahol négy új, egyelőre ismeretlen integrációs konstans bukkan fel. Ezeknek a meghatározására négy peremfeltételt kell írni. (A $w(x)$ lehajlásfüggvényt továbbá azonosnak tekinthetjük az $u_1(x)$ kezdeti elmozdulás-függvénnyel.) Az

$$a.) \quad u_1(x)|_{x=0} = 0,$$

$$b.) \quad u_1(x)|_{x=L} = u_1,$$

$$e.) \frac{\partial}{\partial x} u_1(x)|_{x=0} = 0,$$

$$f.) \frac{\partial}{\partial x} u_1(x)|_{x=L} = 0.$$

Az e-f.) határfeltételekhez képezzük az elsőrendű térderiváltat!

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Végezzük el a helyettesítéseket! Az a.) feltételből kapjuk a d integrációs állandóra, hogy

$$d = 0$$

A b.) határfeltétel a lemezvég kezdeti lehajlását mutatja, mely szerint

$$aL^3 + bL^2 + cL + d = \tilde{u}_1$$

A c.) feltétel a baloldali helyen felvett térderivált eltűnését követeli meg az időben; ez akkor történik meg, ha

$$c = 0$$

Az utolsó, d.) feltétel értelmében pedig a jobboldali (L helyen felvett) térderivált is eltűnik, eszerint

$$3aL^2 + 2bL + c = 0$$

Az a.) és c.) határfeltételt a b.) és d.) egyenletbe helyettesítve, az alábbi, inhomogén, lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$aL^3 + bL^2 = \tilde{u}_1$$

$$3aL^2 + 2bL = 0$$

Az utóbbi egyenleten ekvivalens átalakításokat végrehajtva kapjuk, hogy

$$a = -\frac{2b}{3L}$$

Az eredményt az első egyenletbe írva kapjuk a másik integrációs állandóra, hogy

$$b = -\frac{3\tilde{u}_1}{L^2}$$

Így a lemez alakját leíró biharmonikus differenciálegyenletnek a peremfeltételekhez illesztett megoldása a

$$u_1(x) = \frac{2\widetilde{u}_1}{L^3} x^3 - \frac{3\widetilde{u}_1}{L^2} x^2$$

harmadfokú, hiányos polinomfüggvény.

Ahogy említettem, a fenti függvény leírja az alakot differenciálgeometriai szempontból, viszont még nem informatív a mechanikai mennyiségek tekintetében. Azt is fontos megjegyezni, hogy az u_1 mennyiség a jobb oldali végpont deformálatlan (nem a nyugalmi) alakhoz képest számított vertikális elmozdulása. Létezik egy – a továbbiakban meghatározásra kerülő – u_0 mennyiség is, mely az előbb említett pont deformálatlan helyzetéhez tartozó koordinátájából és az egyensúlyi deformált állapotban felvett koordinátájából képzett különbség. Az egyensúlyi állapot meghatározására nem elegendő a geometriai egyenlet, meg kell határozni a jobb végponton a hídról átadódó nyíróerő és az elmozdulás viszonyát. Ehhez képezzük a kapott $u_0(x)$ függvény saját változója szerint képzett harmadrendű deriváltját, és vegyük figyelembe az anyagi EI (merevségi) multiplikatort!

$$EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1(x) = \frac{12EI}{L^3} u_1 \equiv V \equiv F_y,$$

azaz harmadrendben a térváltozó eltűnik, a geometriailag meghatározott konstanst nyíróerőnek (V) nevezve, a jelen terminológiát használva azonosnak tekintjük az F_y vertikális erőkomponenssel.

Ahhoz, hogy a híd mozgásegyenletét felírjuk, már ismerjük a hídra ható erőket – meghatározásra került a húr által az időben változó alfa szög függvényében a vertikális komponens, illetve a híd lehajlása és a lehajlás által generált ellenerő közti kapcsolat is. Legyen a lehajlást jellemző jobb végponti $u=u(t)$!

Figyelembe veendő elméleti megfontolásokból, hogy a koncentrált erőt, (mellyel a húr hat a hídra, és a híd hat a lemezre), a húr alfa szögének függvényének, vagy az idő függvényének tekintjük-e; az eredmény szempontjából az időbeli paraméterezés szolgáltat releváns fizikai tartalmat; a szögparaméter is tekinthető tulajdonképpen az idő függvényének, így kezelhető F_y összetett függvényként: $F_y(\alpha(t))$. Az egyenlet a vertikális erőre explicit

alakban, azaz a lineáris összefüggés, mely tájékoztat minket arról, hogy meghatározott lehajlás mekkora ellenerőt generál:

$$F_y(\tilde{u}(t)) = \frac{12EI}{L^3} \tilde{u}(t).$$

A két „rugó” (ugyanis a húr és a lemez modellezési szempontból a hídra gyakorolt hatásával mintegy rugó jelenik meg), és a tömeg függvényében a híd mozgásegyenlete, a tömeggel történő osztást követően:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(t) = \frac{T}{mL} [h - \tilde{u}(t)] - \frac{12EI}{mL^3} \tilde{u}(t);$$

ekvivalens átalakítások után:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(t) + \left(\frac{T}{mL} + \frac{12EI}{mL^3} \right) \tilde{u}(t) = \frac{Th}{mL}.$$

Láthatjuk, hogy ez egy másodrendű, állandó együtthatójú, inhomogén, közönséges, lineáris differenciálegyenlet. Legyen

$$\frac{T}{mL} + \frac{12EI}{mL^3} = \omega^2, \text{ és}$$

$$\frac{Th}{mL} = c,$$

így a differenciálegyenlet a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(t) + \omega^2 \tilde{u}(t) = c$$

egyszerű alakot ölti. Az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlethez vezessük be a

$$L(D) = \nabla^2 + \omega^2$$

operátor polinomot, majd oldjuk meg a sajátérték-problémáját:

$$L(D) = L(\lambda)$$

A fenti sajátérték-problémát már megoldottam, úgyhogy itt további magyarázat nélkül az inhomogén egyenlet általános megoldását közlöm, mely a differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy a homogén egyenlet általános megoldásának, illetve az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összegeként áll elő:

$$\tilde{u}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{c}{\omega^2}.$$

A periodikus tagok után álló kifejezés az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Ennek a fizikai tartalma a következő: a lemez egyensúlyi (még külső terhelés nélküli) lehajlását jelenti, így ezt a tagot u_0 -al jelölve az egyenlet

$$\tilde{u}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \tilde{u}_0$$

elegánsabb alakot ölti, ahol

$$\tilde{u}_0 \equiv \frac{c}{\omega^2} \equiv \frac{\frac{Th}{mL}}{\frac{T}{mL} + \frac{12EI}{mL^3}},$$

ekvivalens átalakítások után

$$\tilde{u}_0 = \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI}$$

tisztán konstruálási paramétereiktől függő kifejezés (a híd magasságának, húrban fellépő feszítőerőnek, a húr-lemez horizontális vetületi hosszának, a lemez rugalmassági modulusának, és keresztmetszetének másodrendű nyomatékának függvénye).

Az A , B konstansokat kiküszöbölendő, oldjuk meg a fenti egyenlet kezdetiérték-feladatát! Ismeretes, hogy a nyugalmi helyzetből (értsd, midőn a lehajlásból származó ellenerő, és a húr vertikális ereje épp kiegyenlítik egymást) kimozdulva, a pengetés pillanatában

$$\tilde{u}(t)|_{t=0} = \tilde{u}_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(t)|_{t=0} = 0$$

Fontos megjegyezni, hogy u_1 az abszolút, és nem a nyugalmi vonatkoztatási rendszerben értelmezett. Vizsgáljuk először az időt elsőrendben tartalmazó függvényt!

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(t)|_{t=0} = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 \equiv 0$$

Tekintettel arra, hogy a körfrekvencia nem nulla, a sinust tartalmazó tag nem ad járulékot, az egyenlőség jobboldala csak

$$B = 0$$

feltétel esetén tűnik el. Helyettesítsük ezen eredményt az első kezdeti feltételbe!

$$\tilde{u}(t)|_{t=0} = A \cos 0 + \tilde{u}_0 \equiv \tilde{u}_1$$

Tekintettel arra, hogy $\cos(0) = 1$,

$$A = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_0$$

Így a kezdetiértékekhez illesztett inhomogén egyenlet:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_0) \cos \omega t + \tilde{u}_0 \\ &= \left(\tilde{u}_1 - \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \right) \cos \omega t + \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \end{aligned}$$

Az egyenlet a fenti formában tisztán mutatja a jelenség fizikai tartalmát: a híd a kezdeti időpontban u_1 vertikális távolságot veszi fel a deformálatlan helyzettől, majd u_0 hely $u_1 - u_0$ sugarú környezetében rezeg. Kérdésként felmerülhet, hogy az alkalmazás szempontjából nem érdemes-e inkább a

$$q \equiv \tilde{u}_1 - \tilde{u}_0$$

általános koordinátát bevezetni, amely a mindenkor nyugalmi lehajlástól mért elmozdulást mutatja.

A kapcsolt modell peremérték-feladatai

A kapcsolt modell, mely egy húrt, és egy konzolos lemezt tartalmaz a híddal összekötve, hat térbeli, és négy időbeli integrációs állandót tartalmaz, melynek elméleti háttérét az előző fejezetekben megmutattam. Idézzük fel a még ismeretlen konstansokat tartalmazó térfüggést!

A lemez differenciálegyenletének általános térfüggő tényezője:

$$f_{2,n}(x) = d_{2,3} \cosh k_n x + d_{2,4} \sinh k_n x + d_{2,5} \cos k_n x + d_{2,6} \sin k_n x,$$

míg a húr

$$f_{1,n}(x) = d_{1,3} \cos k_n x + d_{1,4} \sin k_n x.$$

A nehezen áttekinthető, kétindexes terminológia helyett (pontosabban háromindexes, tekintettel arra, hogy pontos kiírás szerint a konstansok is tartalmazzák indexben az n

futóindexet) vezessünk be nagybetűs jelöléseket, így az alábbi, áttekinthetőbb egyenleteket kapjuk:

$$f_{1,n}(x) = A \sin k_n x + B \cos k_n x,$$

$$f_{2,n}(x) = C \sinh k_n x + D \cosh k_n x + E \sin k_n x + F \cos k_n x$$

Ahol $A=A_n$, és rendre a többi konstans is tartalmazza a futóindexet, de az egyszerűség kedvéért ezt nem írom ki. Fontos megjegyezni, hogy itt most a módusok által meghatározott partikuláris megoldásokat külön-külön teljes értékű megoldásnak veszem, és nem törekszem a végtelen tagú összegben keresett általános megoldásra.

Képezzük a második függvény saját változója szerinti deriváltját, és osszuk k -val!

$$\frac{1}{k_n} \frac{\partial}{\partial x} f_{2,n}(x) = C \cosh k_n x + D \sinh k_n x + E \cos k_n x - F \sin k_n x$$

Hat szabad tényezőnk van, a határozottság feltétele ekképpen hat egyenlet. A hat határfeltétel magától értetődő a geometriai modell alapján, így minden további magyarázat nélkül kerülnek bevezetésre. A húrnál

$$a.) \quad f_1(x)|_{x=0} \equiv 0$$

Ebből következik a helyettesítéseket elvégezve, hogy

$$B = 0$$

$$b.) \quad f_1(x)|_{x=L} \equiv 1$$

Itt visszatérek arra, hogyha végtelen sorként keresném a megoldást, a jobb oldalon lévő konstansfüggvényeknek a végtelen összegének kéne egységelemet adni – így teljesülne a b.) határfeltétel. Tekintettel arra, hogy itt külön partikuláris módus-megoldásokat határozok meg, a fenti állítás nem okoz következetlenséget. A fenti egyenlet a helyettesítés ekvivalens átalakítása után:

$$A = \frac{1}{\sin k_n L}$$

Így meghatározható a húr térfüggvénye:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin k_n L} \sin k_n x$$

A lemeznél

$$c.) f_2(x)|_{x=0} \equiv 0,$$

melyből következik, hogy

$$F = -D$$

A differenciálhányadosra vonatkozó feltétel a befogásnál:

$$d.) \frac{1}{k_n} \frac{\partial}{\partial x} f_{2,n}(x)|_{x=0} \equiv 0,$$

mely az

$$E = -C$$

egyenlőséget vonja maga után. A túloldalon szintén vízszintes érintőt feltételezve (nyomatéki maximum):

$$e.) \frac{1}{k_n} \frac{\partial}{\partial x} f_{2,n}(x)|_{x=L} \equiv 0,$$

melybe ha a c.) és d.) feltétel eredményét helyettesítjük, az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$C \cosh k_n L + D \sinh k_n L - C \cos k_n L + D \sin k_n L = 0.$$

A csatolás végett

$$f.) f_2(x)|_{x=L} \equiv 1,$$

mely szintén c.) és d.) feltétel figyelembevételével az alábbi alakot ölti:

$$C \sinh k_n L + D \cosh k_n L - C \sin k_n L - D \cos k_n L = 1$$

Az e.) egyenlőségben végezzünk ekvivalens átalakításokat! Így az

$$C [\cosh k_n L - \cos k_n L] + D [\sinh k_n L + \sin k_n L] = 0$$

$$C [\sinh k_n L - \sin k_n L] + D [\cosh k_n L - \cos k_n L] = 1$$

inhomogén, lineáris egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből D-t kifejezve (a multiplikatív inverzzel szorozva a nevezőben):

$$D = C \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L},$$

melyet, ha a második egyenletbe írjuk, a

$$C \left\{ [\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L] \right\} = 1$$

egyenlőséget kapjuk, és így meghatározhatjuk a lemez együtthatóit:

$$C_n = \frac{1}{[\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L]},$$

$$D_n = \frac{1}{[\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L]} \left[\frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} \right];$$

$$E_n = - \frac{1}{[\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L]};$$

$$F_n = - \frac{1}{[\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L]} \left[\frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} \right].$$

Az időfüggvény meghatározása

A húrt a hosszának egy tetszőleges pontjában megfeszítjük, így a konzolvégen az u_0 nyugalmi lehajlás helyett u_1 lesz a vertikális magasság. Ugyanakkor az eddig könnyen definiálatlanul hagyott u_1 mennyiség csak azon degenerált esetben lesz egy általunk direkt módon meghatározott érték, ha a húrt a híd végtelen kis környezetében pengetjük – amely, lássuk be, zenei szempontból nagyon kevésbé valószínű. Rendszerint a húrt véges távolságra

pengetjük annak megfogásaitól, így az u_1 bizonyos függvénye lesz a pengetéshez húzás helyének és mértékének. Feltételezem, hogy a pengetéshez húzás vertikális irányú.

Külön bonyodalmat okoz, hogy a pengetéskor a húr a tér szerinti elsőrendben nem egy folytonos görbe, hanem a pengetési pontnál szakadása van a deriválnak. E problémát kiküszöbölendő vagy a disztribúcióelméletből ismeretes Green-függvénnyel írhatjuk le az alakot, vagy közelíthetjük Fourier-sorral is. Fontos megjegyezni továbbá, hogy a húr által a hídra kifejtett vertikális komponens függ a híd közvetlen környezetében értelmezett szögtől, amely viszont nem pusztán az u_1 értéknek a függvénye, hanem ha pontosak akarunk lenni, a pontban értelmezett tér szerinti első deriválttól (érintőtől) is függ, hiszen, ha a húr kezdeti alakját görbeként közelítjük, akkor az is befolyásolja, hogy a húr milyen szögben hagyja el a hidat.

A modellt egyszerűsítendő, feltételezem, hogy a szimmetrikusnak tekintett rendszer másik végén történik a pengetés, így a kutatás ezen fokán a részletes leírás még nem kerül kidolgozásra. A túloldalon történő pengetéshez feszítés a hídnál az u_1 pozíció felvételét eredményezi az u_0 nyugalmi helyzetből.

A kapcsolat végett a húrnak és a lemeznek az időfüggése megegyezik a híd időfüggésével. A jelen helyzetben nem az izolált modell megszokott módszerével dolgozom az időfüggvény meghatározásánál – azaz nem kezdeti alakot és kezdeti sebességet határozok meg, hanem megadom az egységnyire normált térfüggő megoldás időbeliségét, illetve szerepeltetem az amplitúdót, amely megmutatja, hogy a húr- és lemezei egységnyi elmozdulást mennyivel kell szorozni, hogy a valós, időbeli mértékét megkapjuk. Így a húr és lemez időfüggő megoldása az alábbi azonosság:

$$g_{1,n}(t) \equiv \tilde{u}(t)$$

melyből felírható a

$$u_{m,n} = g_{m,n} f_{m,n} \equiv \tilde{u}(t) f_{m,n}$$

függvényrendszer, mely leírja módusokra bontva a rendszer rezgését. Itt az m index kétértékű: $m(1)$ a húrt, míg $m(2)$ a lemezt jelöli, az n természetes szám pedig a módus számát jelöli. A diszperziós reláció az $u(t)$ függvényen keresztül, bonyolultan jelenik meg, hiszen az $u(t)$ differenciálegyenlete tartalmazza a tömegeket, anyagjellemzőket, keresztmetszeti ellenállásokat. A fenti szorzat-előállítás approximáció, feltételezve, hogy a híd tömege jelentősen nagyobb, mint a húr, és a lemezé. Ez igaz is a hangszerek világában; míg a híd egy

tömör keményfarúd, addig a húr a keresztmetszete miatt, a lemez pedig a vékonysága miatt elhanyagolható.

A fenti függvénybe történő helyettesítéssel részletesen meghatározhatóak a keresett függvények, melyek a következő szakaszban kerülnek analitikus és grafikus bemutatásra.

Az eredmények analitikus megjelenítése, grafikus ábrázolása

A húr idő és térbeli mozgását leíró explicit függvény a peremfeltételt adó $u(t)$ függvény részletes megjelenítésével:

$$u_{1,n}(x, t) = \left\{ \frac{1}{\sin k_n L} \sin(k_n x) \right\} \left\{ \left(\tilde{u}_1 - \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \right) \cos \omega t + \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \right\},$$

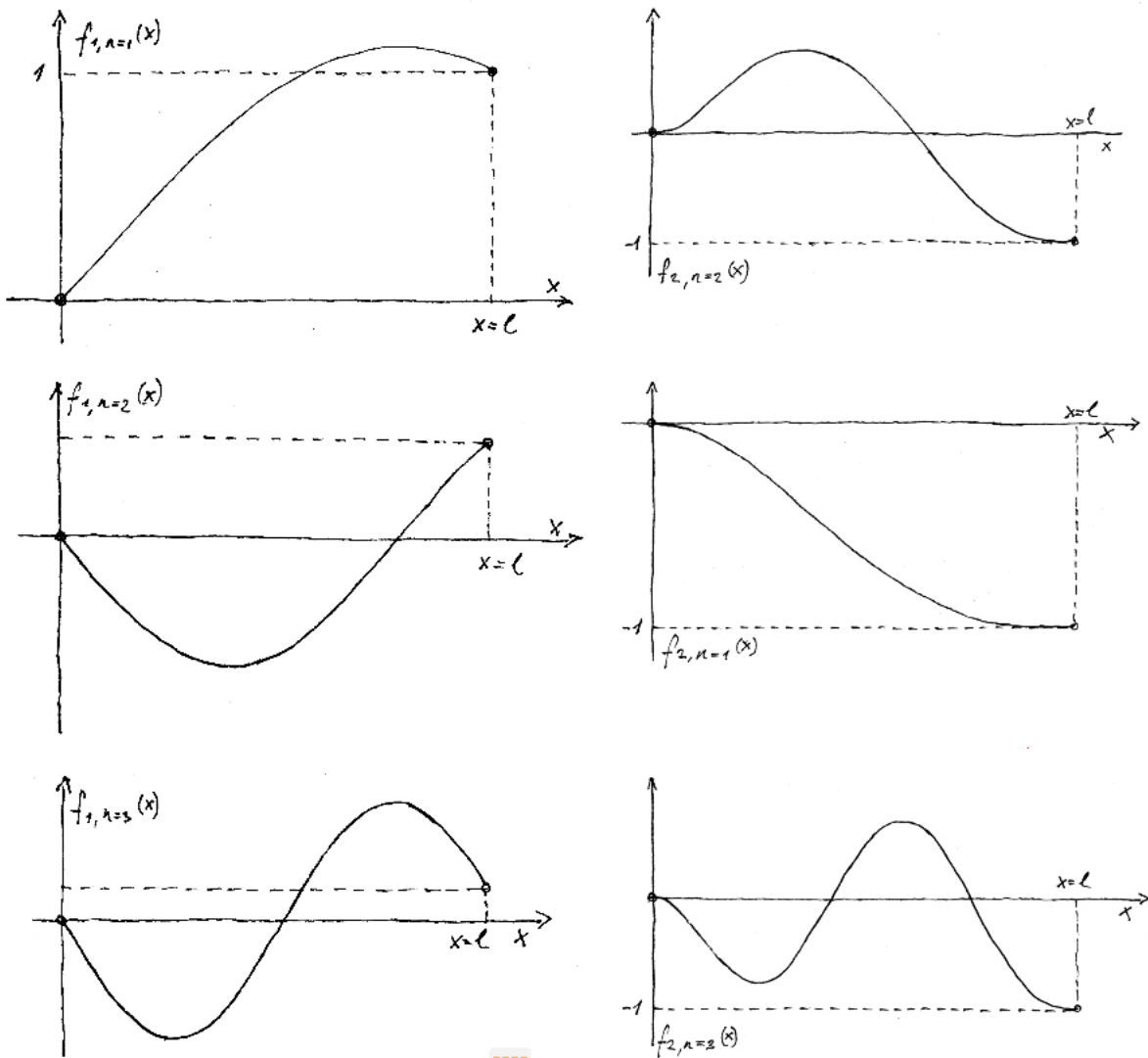
ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{mL} + \frac{12EI}{mL^3}}$$

A lemez idő és térbeli mozgását leíró explicit függvény a peremfeltételt adó $u(t)$ függvény részletes megjelenítésével:

$$u_{2,n}(x, t) = \left\{ \frac{\sinh(k_n x) - \sin(k_n x)}{[\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L]} + \frac{\cosh(k_n x) - \cos(k_n x)}{[\sinh k_n L - \sin k_n L] + \frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} [\cosh k_n L - \cos k_n L]} \left[\frac{\cos k_n L - \cosh k_n L}{\sinh k_n L + \sin k_n L} \right] \right\} * \left\{ \left(\tilde{u}_1 - \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \right) \cos \omega t + \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \right\}$$

A tömörség kedvéért az $E = -C$ és $F = -D$ azonosságot felhasználva a számlálókban a hiperbolikus bázis után a trigonometrikus bázis additív inverze szerepel.



A húr és lemez térfüggvénye az első három-három módussal. Az ábrán a periodikus jelleg mellett jól láthatók a peremfeltételek, a húrnál az $x=0$ helyen 0 a függvényérték, $x=L$ helyen

A végeelem modell

A végeelem modell az Axis VEM szoftverrel készült, másodrendű rezgésvizsgálattal. Az első módus a két modellben megegyezik, ugyanakkor az Axis a kapcsolásból fakadó jelenséget úgy értelmezi, mint az izolált modell egymáshelyezését: azaz figyelembe veszi, hogy a lemez az első módusban van, a húr elmozdul, de sajátrezgést még nem végez, illetve fordítva, hogy a húr rezeg, a lemez pedig nyugalomban van. A további módusalakokban bukkannak fel ezen esetek kombinációi az egyes felharmonikusokkal.

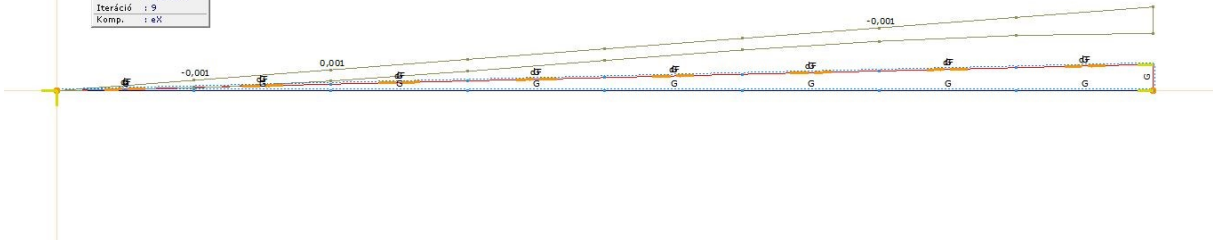
A végeelem-vizsgálat egyelőre bevezető jellegű, a későbbiekben, összetettebb geometriák miatt sokkal nagyobb hangsúllyal fog szerepelni.

Az analitikus modell szimmetrikus szerkezettel dolgozik – így ezt az utat követtem a végeelem-modellnél is. A szimmetriának megfelelően a középben a lemeznek hajlító és oldalirányú eltolódásra támaszt adtam meg, felül pedig csak oldalirányban adtam meg támaszt. A szimmetrikus-fél modell visszaadta a teljes modell frekvenciáit, de értelemszerűen kiestek azok az esetek, amikor középben nem vízszintes volt az érintője a lemeznek, ezzel ellenőriztem, hogy jó a félmodell.

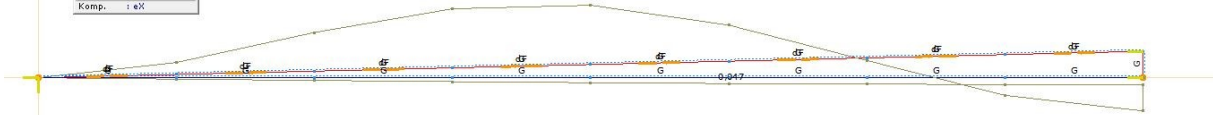
Az analitikus modell az approximációelméletből ismeretes úgynevezett asszociatív közelítésen alapszik. Az analitikus, egész rendszert leíró differenciálegyenletek, illetve a végeelem parciális differenciálegyenletei grafikusán valamelyest eltérő, de a lényegi tartalmuk szerint mégis hasonló diagramokat rajzolnak ki. Az első lengésalaknál a hasonlóság jelentős, míg a többi lengésalakoknál eltérések figyelhetők meg. Ennek fő oka, hogy a megoldást szorzat alakban kerestem, melyet a további számítások esetén módosítani kell – a parciális differenciálegyenletnek más integrálási módját kell alkalmazni. A gerjesztés modellezésének kérdését is a vizsgált oldalon kell a továbbiakban figyelembe venni.

Alább közlöm a szoftver által generált első hat rezgésalakot, a jellegábrák után pedig a jellemző rezgésalakoknál számszerűen összehasonlítom a végeelem-eredményeket az analitikus megoldás által generált frekvenciákkal.

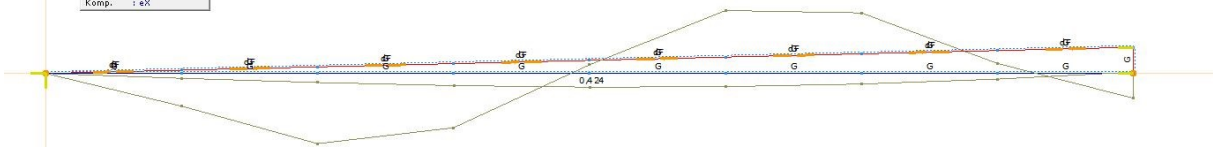
Szabvány : MSz
Nemlineáris rezgés
Eset : feszítés
Alak : 1
f : 11,71 Hz
T : 0,085 s
ω : 73,57 rad/s
S.á. : 5412,39
Hiba : 9,21E-9
Iteráció : 9
Komp. : eX



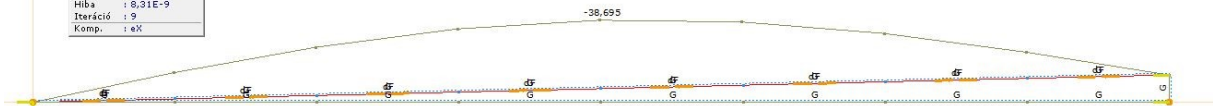
Szabvány : MSz
Nemlineáris rezgés
Eset : feszítés
Alak : 2
f : 65,55 Hz
T : 0,015 s
ω : 411,84 rad/s
S.á. : 169610,00
Hiba : 1,32E-10
Iteráció : 9
Komp. : eX

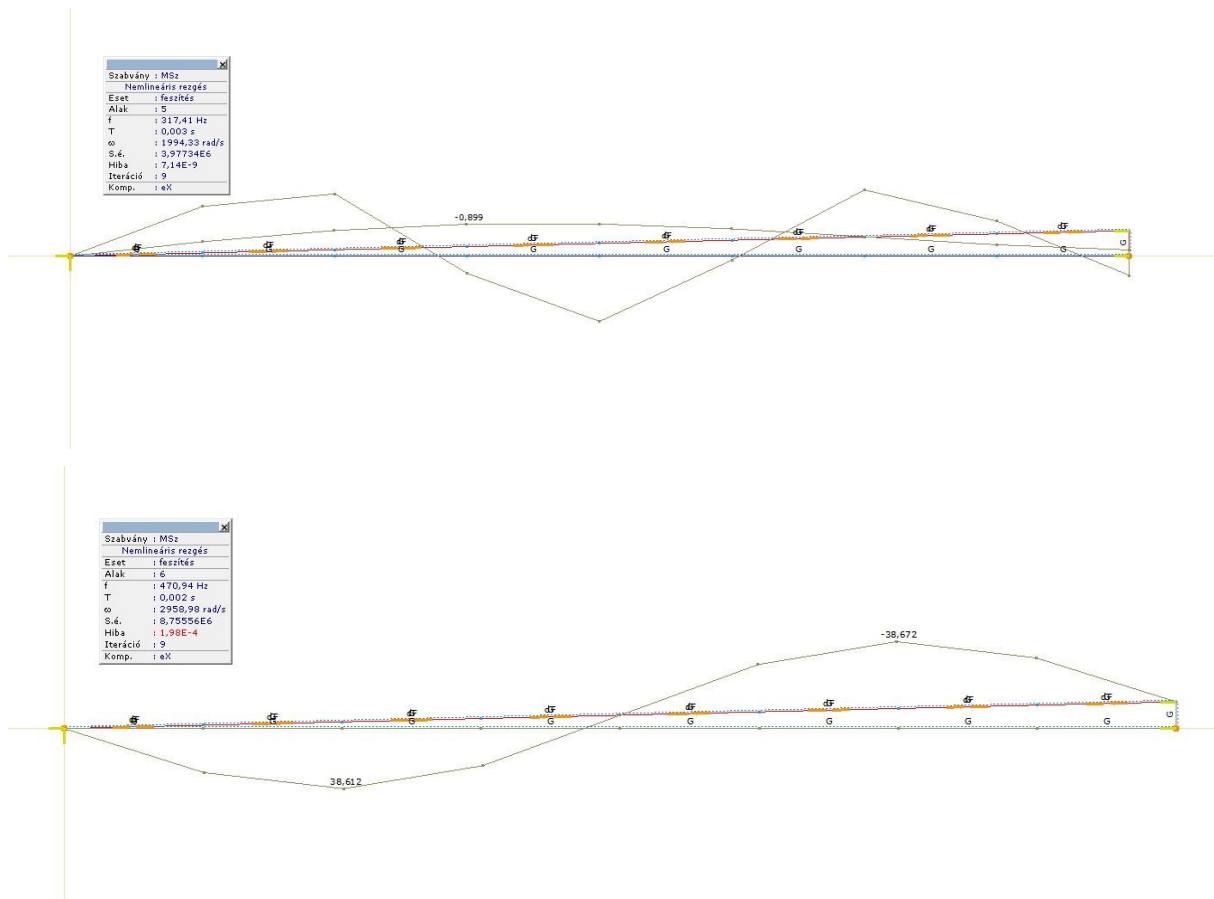


Szabvány : MSz
Nemlineáris rezgés
Eset : feszítés
Alak : 3
f : 167,32 Hz
T : 0,006 s
ω : 1051,29 rad/s
S.á. : 1,1052E6
Hiba : 3,93E-11
Iteráció : 9
Komp. : eX



Szabvány : MSz
Nemlineáris rezgés
Eset : feszítés
Alak : 4
f : 240,45 Hz
T : 0,004 s
ω : 1510,79 rad/s
S.á. : 2,2025E6
Hiba : 8,31E-9
Iteráció : 9
Komp. : eX





Az alábbiakban a két modell numerikus bemutatása történik, egy jellemző, tetszőleges paraméterek esetén. A paraméterek:

feszítőerő: 100 N

geometria:

- vízszintes hossz 0,5 m (a teljes hossz fele)
- 0,4 m szélesség
- lemeztvastagság: 0,003 m
- húr átmérő: 0,0005 m
- középső kapcsoló elem keresztmetszete: 0,005*0,01 m²

Anyagok:

- acél rugalmassági modulusa: 20600 kN/cm²
- acél sűrűség: 7850 kg/m³
- falemez rugalmassági modulusa (lucfenyő): 1000 kN/cm²
- falemez sűrűség: 470 kg/m³

Az izolált modell alapján a diszperziós relációból, illetve az időfüggéshez tartozó szeparációs állandóból számíthatjuk a húrfrekvenciát (az alábbiakban f jelöli a frekvenciát, c a terjedési sebességet, L a húrhosszt, T a feszítőerőt, ρ a sűrűséget, A a keresztmetszeti felületet):

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\rho A}}}{2L}$$

A fenti paramétereket helyettesítve:

$$f = \frac{\sqrt{\frac{100}{7850 * \left(\frac{0,0005}{2}\right)^2}} \pi}{2 * 0,5} = \mathbf{254,77 \text{ Hz}},$$

mely megközelíti a végeelem-modell által generált, 240,45 Hz-es értéket (a 4-es rezgésalak felel meg ennek). Vegyük figyelembe, hogy a tartományban a különbség nem túl jelentős, hiszen a frekvenciának logaritmikus függvénye a hangmagasság, így az eltérés nem számottevő. Különbséget mutat viszont a második módus izolált, elméleti görbéje (a frekvenciaérték a fenti értéknek a duplája), illetve a végeelem-modell: ott az érték 470,94 Hz, mely nem duplája a 240,45 Hz-nek.

Ezután vizsgáljuk meg az $u(t)$ függvényből adódó frekvenciát, és a végeelem első rezgésalakját, mely jellegét tekintve a híd rezgését jellemzi! A függvény, mint ismeretes

$$\tilde{u}(t) = \left(\tilde{u}_1 - \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI} \right) \cos \omega t + \frac{hTL^2}{TL^2 + 12EI}$$

ahol nekünk a körfrekvencia informatív:

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{mL} + \frac{12EI}{mL^3}},$$

ugyanis

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Így

$$f = \frac{\sqrt{\frac{100}{0,005 * 0,01 * 7850 * 0,5} + \frac{12 * 0,4 * 0,003^3 * 10^{10}}{0,005 * 0,01 * 7850 * 0,5^3}}}{2\pi} = \mathbf{13,11 \text{ Hz}},$$

melyet, ha összevetünk a végeelem-modell első rezgésalakjával, láthatjuk, hogy megközelíti a 11,71 Hz-es értéket, de nem tökéletes az egyezés. Visszautalok a modell felvételénél tett megjegyzésre, hogy a szorzatalakban történő megoldáskeresés approximáció.

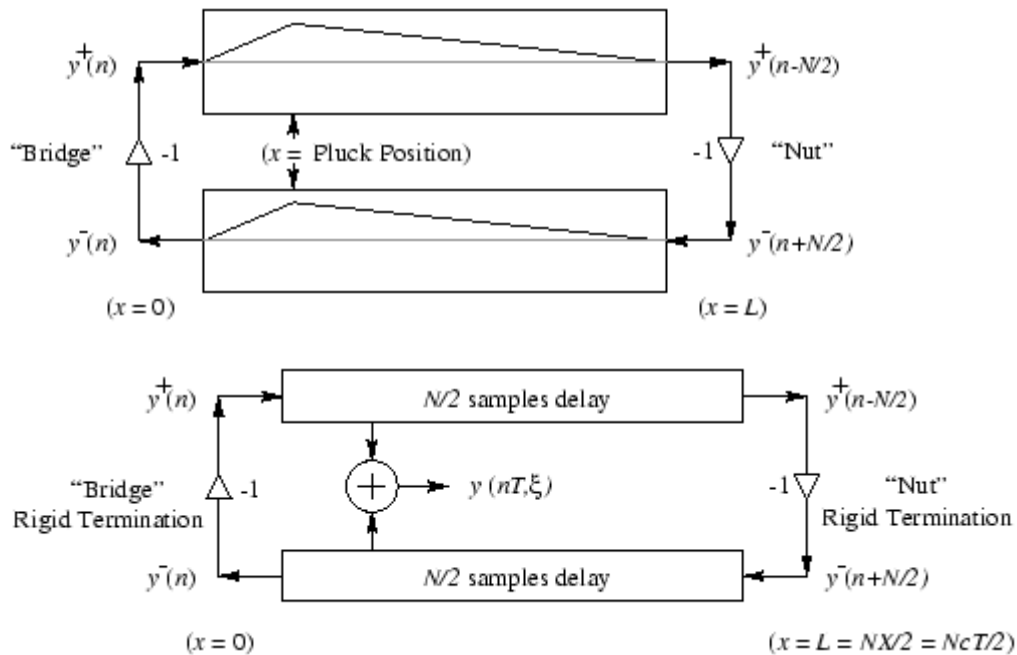
VEM alak	VEM mozgó elem	elmélet	eltérés (%)
	frekvencia		
	1 híd-lemez	11,71	13,11
	2 híd-lemez	65,55	máshogy értelmezett
	3 híd-lemez	167,32	máshogy értelmezett
	4 húr	240,45	254,77
	5 híd-lemez	317,41	máshogy értelmezett
	6 húr	470,94	509,54

A fenti táblázatban bemutatom a VEM által generált egyes rezgésalakok összevetését az analitikus modellel. A VEM modell a rezgésalakokat úgy értelmezte, hogy felváltva a lemezt, és a húr ábrázolta külön-külön módusokban. Azaz nem szokványosan, mint egy külön húrmodellnél, ahol az alaprezgés után rendre következnek a felharmonikusok, hanem a szoftver váltakozva, hol a húr, hol a lemez felharmonikusait írta, illetve a kettőt kombinálta az egyes alakokban. Az analitikus modell közül itt a VEM első alakja tulajdonítható a már említett híd rezgésének, a 4-es, 6-os pedig az izolált húr rezgésmódusainak. Tekintettel arra, hogy a két modell a lemez rezgését más módon értelmezett, 3 esetben nem lehet az összehasonlítást elvégezni. Átlagosan az eltérések 10% alatti értékek.

A későbbi vizsgálódás tekintetében szükségszerű, hogy az egyes izolált esetek, és a végeelem között szorosabb kapcsolat képződjön, majd a kapcsolt modellnél alternatívákat kell keresni a parciális differenciálegyenlet megoldására. Itt felmerül, hogy lehetséges, hogy el kell vetni a peremfeltételekkel történő kapcsolás-megadást, és differenciálegyenlet-rendszert kell megoldani, esetleg approximációs módszerekkel. Másik lehetséges, vizsgálandó út a feltételes funkcionál-optimalizáció, ahol egy szinttel feljebb, a Lagrange-multiplikátorokkal kerül be a csatolás a rendszerbe, így az Euler-Lagrange-féle parciális differenciálegyenletek ugyan összetettebb alakot fognak öltetni, de már magukban tartalmazni fogják a kapcsolást.

A waveguide-modell

A fent bemutatott analitikus és végeelem modell mellett számtalan más megközelítése van a hullámok vizsgálatának. A régebbi időkben, amikor a számítógépek teljesítménye kisebb volt, gyakorta alkalmaztak fizikai analógiákat, egyet említek meg részletesebben: az úgynevezett waveguide-modellt. A mechanikai rezgéseknek elektronikai analógiája az oszcillátor, mely induktivitást, kapacitást tartalmaz. A mágneses és az elektromos térerősség hasonlóan váltakozik, mint a potenciális és a helyzeti energia. A rendszernél vizsgálható az áramerősség, feszültség, mely harmonikusan oszcillál. A csillapítást beépített ellenállással lehet modellezni. Tekintsünk egy húrt, mely felfogható úgy, mint végtelen rezgő pontnak az összessége, ennek a megfelelője végtelen, egymás mellett lévő oszcillátor. Természetesen véges, de nagyszámú oszcillátorral is jól modellezhető a húr; viszont itt a hullámot diszkretizáltan kapjuk meg. Megjegyzendő, hogy az atomos szerkezet miatt a kontinuum-modell is korlátok közt értelmezhető, hiszen egy húr sem folytonos anyagból, hanem részecskékből áll.



A fenti ábrán látható egy digitális waveguide kezdeti feltételekkel. Bal oldalt a rezonátoron fekvő híd (bridge) analogonja, jobb oldalt pedig a merev hídé (nut).

Összegzés, kitekintés

A modell elméleti megalapozásának befejezésekor megemlítem, hogy a modell több irányba bővíthető: ha a viszkózus sűrűlódást, közegellenállást, a csatlakozások ellenállását, a húr tulajdonképpeni folytonosságát figyelembe vesszük, disszipációs erők jelennek meg. Ezt a Lagrange-sűrűség felírásakor egy újabb energia-dimenziójú tag megjelenését vonja maga után. Emellett a csatolt rendszer kényszereit nem csak peremfeltételekkel lehet leírni, hanem úgynevezett Lagrange-multiplikátorokkal is, mely a differenciálegyenleteket, mint funkcionál-optimalizálási problémát vetik fel, adott megkötésekkel.

Fontos megemlíteni, hogy a hullámok, rezgések vizsgálatának a zenei alkalmazáson túl építészeti vonatkozásai is megjelennek. Az épületek esetén bizonyos helyzetekben csillapítani, bizonyos helyzetekben pedig erősíteni szeretnénk a hullámokat, ilyen esetek a földrengés, hanggátlás, használati határállapotok (födémek, falak rezgésvizsgálata), termék akusztikája. A későbbi vizsgálatok szempontjából nagyon fontos egy biztos, tudományos alap elsajátítása, a legegyszerűbb modellek analitikus elemzésének képessége, mely lehetőséget nyújt az alapvető matematikai módszerek, fizikai modellalkotás elsajátítására, az elhanyagolható, és nem elhanyagolható tényezők disztinkválására. Később, összetett rendszerek vizsgálatánál így nagyobb biztonsággal alkalmazhatók végeelem-módszeren alapuló megoldási mechanizmusok, melynek az eredményének az értelmezése sokkal könnyebben történhet, mint ezen ismeretek hiányában. A megoldott rúdegyenletek építészeti vonatkozásban leírják a gerendák, rudak, kábelek, sodronyok, húrok rezgéseit. Csupán a peremfeltételeken, illetve kényszereken kell módosítani, ha az adott tervezési problémához szeretnénk illeszteni.

Lehetséges út a dimenzionális bővítés. A modellemben csupán transzverzális hullámokat vizsgáltam; a húr egyirányú hosszára merőleges kitérésekkel. Általánosabb esetben például a lemez három térirányában terjedhetnek hullámok, és három irányba történhetnek elmozdulások. A húrnál nincs értelme három irányú hullámterjedést bevezetni, tekintettel arra, hogy a keresztmetszete elhanyagolható a hosszához képest, viszont a kitérést általánosíthatjuk két transzverzális és egy longitudinális irányba. A lemeznél, általános esetben a kitérés három koordinátaértékű, négyváltozós vektor-vektor függvény lesz: $\underline{u}=\underline{u}(x,y,z,t)$, és a megoldásfüggvényben jelentkező hullámszám, mint hullámszámvektor fog megjelenni [lsd.

Dr. Dávid Gyula ELTÉ-n tartott Rezgések és hullámok című előadássorozatának vonatkozó, youtube-on elérhető felvételeit].

Továbbá röviden még két jelenségkör ismertetendő, első az esetben merül fel, ha a pillanatnyi pengetés helyett áttérünk vonóhasználatra, vagy fűvös hangszerekre, épületeknél földrengésre, gépalapokra, általánosságban bármely olyan helyzetre, ahol nem kezdeti pillanatban történő hatásra szabadon rezeg a rendszer, hanem egy folyamatos, feltételezhetően $f(x, y, z, t)$ függvény szerinti gerjesztőerő hat (a fizikai terminológiában kényszerrezgésnek nevezik ezt). A jelenség nem kerül részletes leírásra, a megjelölt szakirodalom minden vonatkozó könyve tárgyalja. A jelfeldolgozásnak két módját említem: a disztribúcióelméletet felhasználó, Dirac-delta függvényeken bázist kereső Green-függvények alkalmazását, illetve a Fourier-féle feldolgozást, mely periodikus függvényeken keresi a bázist. [Ild. Dr. Dávid Gyula ELTÉ-n tartott Rezgések és hullámok című előadássorozatának vonatkozó, youtube-on elérhető felvételeit]. A periodicitás miatt zenei vonatkozásban szemléletesebb Fourier módszere.

A másik jelenségkör az alkalmazott anyagmodell általánosításának kérdése. Amennyiben feltételezem, hogy a tér mégsem homogén, izotróp, (például azt mondom, hogy a lemez nem egy képzeletbeli, ideális anyag, hanem valós lucfenyő), a differenciálegyenletekbe a sokkal általánosabb, a bevezetésben említett, homogén lineáris kifejezést kell alkalmazni. Analitikus szinten viszont ez meglehetősen nehézkes, ez esetben javallt a végeelem-módszer használata.

A modell másik generalizálási lehetősége az úgynevezett anharmonikus rezgések területére vezet minket. Az előzőekben kis elmozdulásokat feltételeztem; amikor a rendszer szabadenergiáját felírtam, az energia tér szerinti Taylor-sorba fejtésénél a kvadratikus tagoknál megálltam (vegyük számításba, hogy a potenciáltér gradiensének képzése után a kvadratikus tagok a térben lineárisok lesznek, ez okozza a lineáris erőtörvényt [Hooke-törvény]). Ugyanakkor tudjuk, hogy az anyagok viselkedése csak kis elmozdulások esetén lineáris, ha a potenciálban köbös, így erőben kvadratikus tagokat is figyelembe vesszük, akkor a rezgések nem lesznek harmonikusak [Ild. anharmonikus rezgések: dr. Nagy 1989, Landau-Lifsic 1974].

Fontos megemlíteni mérnöki jellegű továbblépéseket is, mely részint a reológia területét érinti. A modellben például a lemez peremfeltétele befogást írt elő, mely az érintő befogásbeli értékének eltűnését követelte meg. Viszont, ha belegondolunk, a rezonátorlemez a keretre hagyományosan enyves ragasztással kapcsolódott, mely az időben nem végtelenül merev befogást jelent, bizonyos kúszási folyamatok következnek be. A húr ezenkívül nem végtelenül

vékony, valamelyest érvényesül annak is a hajlítási merevsége, ebből következően például a hangolószegekre történő ráhurkolódásnál is a gradiensre tehetünk korlátozó előírásokat. Továbbá az akusztika területéről érdemes megjegyezni, hogy a rezgési módusok a tulajdonképpeni spektrumnak a legnagyobb intenzitással megjelenő frekvenciái, viszont más hangok is megjelennek. Ezen kívül egy rendes hangszeren több húr van, illetve több alkatrész, melyek torzítják a hangszínt, rezonanciák, csillapítások jelennek meg.

BIBLIOGRÁFIA

L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika. I. kötet. Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika. VII. kötet. Rugalmasságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

Dr. Nagy Károly: Elméleti mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

V. Sz. Vlagyimirov: Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

Budó Ágoston: Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

Dr. Gáspár Gyula: Mátrixszámítás. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1963.

Pach Zs. Pálné – Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1960.

R. Critescu – G. Marinescu: Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásába. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1969.

Dr. Farkas Miklós: Speciális függvények. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1964.

Dr. Nagy Károly: Elméleti fizikai példatár I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Láncos Kornél: A geometriai térfogalom fejlődése. Gondolat, Budapest, 1976.

Dr. Nagy Károly: Elektrodinamika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

Szőkefalvi – Gehér – Nagy: Differenciálgeometria. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.

Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

Dr. Pelle Béla: Geometria. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

Dr. Dávid Gyula: Rezgések és hullámok. Előadássorozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikus Szak, 2020. tanév

Dr. Fekete István: Matematika és számítástechnika 2. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

R. P. Feynman – Mai Fizika. 1., 4., 5., 6. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.

Császár Ákosné: Vektoranalízis. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997.

Fazekas Ferenc: Többváltozós függvények és differenciálásuk. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

Fazekas Ferenc: Taylor-sorok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953. Fazekas Ferenc: Többváltozós függvények integrálása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

Fazekas Ferenc: Parciális differenciálegyenletek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni

Hegyi Dezső

Sipos András Árpád

Solymos József

Friedrich Rezső

Parragh Levente

Dávid Gyula

Domokos Gábor

Takács Bálint Máté

Vitai Ákos

Pálfy Péter

Kiss Márton

Korpás Klaudia

Fata Hortenzia

szakmai, illetve nyelvészeti segítségét, mely a kutatás, és az azt bemutató dolgozat elkészülését lehetővé tette.

FÜGGELÉK

Csillapítatlan oszcillátor kezdeti feltételeinek algebrai (nem-trigonometrikus) tárgyalása

(dr. Dávid Gyula előadása alapján)

legyen

$$\frac{d}{dt} = D,$$

és I identikus operátor! Az oszcillátor differenciálegyenlete

$$L(D)u(t) = 0,$$

azaz

$$(D^2 + \omega_0^2 I)u(t) = 0.$$

Tegyük fel, hogy

$$u(t) = e^{ct}, \quad c \in \mathbb{C}$$

$L(D)$ sajátérték-problémája:

$$L(D)e^{ct} = L(c)e^{ct} \equiv 0,$$

mely akkor, és csak akkor teljesül, ha

$$L(c) = c^2 + \omega_0^2 \equiv 0.$$

Az algebrai egyenlet megoldása:

$$c_i = \pm i\omega_0$$

A homogén differenciálegyenlet általános megoldása a megoldások konstanssal szorzott összege:

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}, \text{ ahol}$$

$$A, B \in \mathbb{C}$$

A dolgozatban a kezdeti feltételekhez illesztés már a valós számtesten történt, trigonometrikus alakban, most a számítás az izomorf, komplex kitevőjű exponenciális függvényeken történik.

$$a.) \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$$

$$b.) \quad \dot{u}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$$

A második feltételhez képezzük $u(t)$ időderiváltját!

$$\dot{u}(t) = Ai\omega_0 e^{i\omega_0 t} - Bi\omega_0 e^{-i\omega_0 t}$$

A kezdeti feltételeket a vonatkozó egyenletekbe helyettesítve az alábbi inhomogén, lineáris egyenletrendszer kapjuk:

$$u(0) = A + B = u_0$$

$$\dot{u}(0) = Ai\omega_0 - Bi\omega_0 = v_0$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{1}{i} = -i,$$

és a két egyenletet összeadva,

$$A = \frac{1}{2} \left(u_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right),$$

a másik konstansra a helyettesítés után pedig

$$B = \frac{1}{2} \left(u_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right),$$

azaz B konstans A konstansnak a komplex konjugáltja,

$$B = A^*$$

így

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + A^*e^{-i\omega_0 t}$$

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + A^*(e^{i\omega_0 t})^*$$

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + (Ae^{i\omega_0 t})^*$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(u_0 + i\frac{v_0}{\omega_0}\right)e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}\left(u_0 + i\frac{v_0}{\omega_0}\right)e^{-i\omega_0 t}$$

$$u(t) = u_0\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right) - i\frac{v_0}{\omega_0}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right)i$$

Figyelembe véve a vonatkozó Euler-féle azonosságokat, illetve, hogy a képzetes egység négyzete egyenlő a multiplikatív inverzzel,

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$