



Épületek merevítőrendszerének stabilitásvizsgálata az elcsavarodási tönkremenetel
lehetőségének figyelembevételével

BME Építészmérnöki Kar, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
2016. TDK konferencia

Szerző: Tábi Dávid
Konzulens: Vető Dániel

Tartalom

1. Merevítőrendszerek stabilitásvizsgálata.....	3
1.1. Bevezetés.....	3
1.2. A helyettesítő tartó	5
1.3. Síkbeli kihajlás	7
1.4. Elcsavarodó kihajlás.....	9
2. Merevítőrendszerek vizsgálata egyszerű módszerrel (Kollár Lajos nyomán).....	9
2.1. A módszer bemutatása.....	9
2.2. A számítási modell kiterjesztése	11
2.3. Többszintes épületek stabilitásvizsgálata, r_s redukciós tényező.....	15
3. Excel számítási algoritmus	16
3.1. Problémafelvetés	16
3.2. Számítási modell	19
3.3. Eredmények.....	21
4. Összefoglalás.....	25
5. Irodalomjegyzék.....	25

1. Merevítőrendszerek stabilitásvizsgálata

1.1. Bevezetés

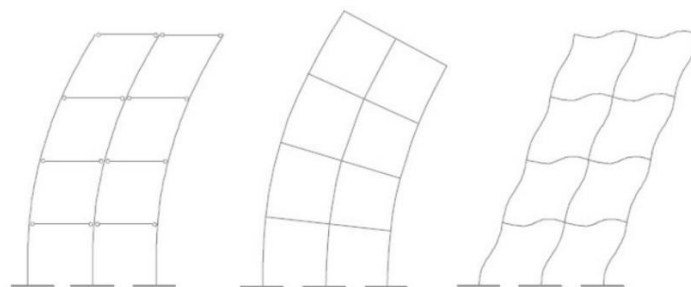
Az épületek tartószerkezeti elemeit tekintve alapvetően két csoportot különböztetünk meg: vízszintes és függőleges teherhordó szerkezeteket. Az épületet érő függőleges terheket (például önsúlyból, hasznos teherből, illetve hőteherből adódó) a vízszintes teherviselő elemek (födémlemez, gerendák) továbbítják a függőleges szerkezeti elemekre (pillérek, teherhordó falak) irányába, onnan pedig az alapokon keresztül a teherhordó talajrétegre. Vízszintes terhek esetében azonban a teher a homlokzati elemek közvetítésével a födémekre adódik át, melyek a függőleges teherhordó elemeken keresztül továbbítják az alapok felé. A vízszintes erők továbbítására alkalmas függőleges teherhordó szerkezeti elemeket merevítőrendszernek nevezzük, melyek jellemzően lehetnek merevítőfalak, keretek, illetve merevítő magok [1]. Vízszintes terhet eredményezhet a szél, földrengés, ugyanakkor származhat építési pontatlanságból adódóan is, melyet fiktív vízszintes terhekként veszünk figyelembe (a vízszintes terhek meghatározása szabványok és előírások alapján szabályozott, melyek időről-időre változhatnak).

Széles körben alkalmaznak merevítőfalakat, mivel erőjátékuk egyszerű, de rúdszerkezetként való modellezésük során gyakran elhanyagolják az esetenként igen jelentős nyírási alakváltozások hatását. Saját síkjukban igen hatékonyak (hajlítómerevségük EI_y , ahol y a fal síkjára merőleges tengely), síkjukra merőlegesen azonban nem rendelkeznek számottevő merevséggel ($EI_y \gg EI_x \approx 0$, ahol x a fal síkjába eső tengelyt jelöli). Külön kategóriát képeznek a nyílással áttört falszerkezetek, melyek viselkedése a következő csoporthoz, a keretekhez áll közelebb. A keretek viselkedése hajlítási és nyírási alakváltozásoknak köszönhetően meglehetősen bonyolult, így méretezésük is komplexebb számításokat igényel. Hatékonyságuk jelentősen növelhető keresztmerezítés beépítésével, helyigényéből adódóan azonban ez funkcionális problémákat vet fel. Egy épületben bizonyos szintszám elérése után a függőleges közlekedés biztosítására és különböző gépészeti vezetékek elhelyezésére külön, erre a célra kialakított, jellemzően vasbeton anyagú magok betervezése jellemző, mely hajlítási merevségükön jelentős csavarási merevséggel rendelkeznek. A merevítőrendszer erőjátéka a közreműködő (rendszerint) nagy számú szerkezeti elem, a közöttük létrejövő kölcsönhatások és a térbeli viselkedés miatt általában igen bonyolult.

A feladat komplexitásából adódóan a globális vizsgálatot szigorúan a merevítőrendszeren hajtjuk végre, és elhanyagoljuk az ún. „másodlagos” (nem teherviselő) szerkezeti elemeket, mint például válaszfalakat, homlokzati elemeket. Egy átfogó vizsgálat három vizsgálati típus végrehajtását foglalja magában, melyek közül a legfontosabb a szilárdsági vizsgálat, ahol bizonyítani kell, hogy a különböző terhekből (vízszintes és függőleges) számított mértékadó igénybevételek minden esetben kisebbek a határjellemzőknél. A dinamikai vizsgálat elvégzésére korábban csak esetenként került sor, hiszen 1998-ig a nemzeti szabványaink nem tartalmaztak földrengésre vonatkozó előírásokat, az akkor életbe lépő építési törvény értelmében azonban kötelező jelleggel ki kell mutatni, hogy az épület rezgései nem okoznak a megengedettnél nagyobb feszültségeket (helyettesítő statikai módszer alkalmazásával a

dinamikai vizsgálat könnyen visszavezethető szilárdsági vizsgálatra). Míg a szilárdsági és dinamikai vizsgálatot minden esetben el kell végezni, addig a stabilitásvizsgálatot a szerkezettervezői gyakorlatban általában el szokták hanyagolni, a dolgozat azonban lényegében ennek a vizsgálati módszernek a jelentőségével foglalkozik.

A stabilitásvizsgálat során azt kell kimutatni, hogy a függőleges teherrel (jellemzően önsúlyból és hasznos teherből adódó) terhelt épület stabil marad, vagyis nem szenved olyan maradandó alakváltozásokat, amelyből szilárdsági tönkremenetel adódhat [1]. Ezen túlmenően azonban a merevítőrendszer stabilitási állapota következményekkel jár a többi függőleges teherviselő elemre is, azokra, amelyek nem részei a merevítőrendszernek (pl. az épület pillérei). Ha a merevítőrendszer megfelelő biztonsággal rendelkezik a stabilitás szempontjából, akkor a többi – a merevítőrendszer által megtámasztott – függőleges szerkezeti elem a „merevített” kategóriába tartozik. A stabilitásvizsgálat során jellemzően kétféle tönkremeneteli módot különböztetünk meg: síkbeli kihajlást (xz és yz síkokban, ahol x és y az épület alaprajzához igazított tengelypár, míg a „z” a függőleges tengelyt jelöli), illetve elcsavarodó kihajlást (a későbbiekben látni fogjuk, hogy síkbeli kihajlás csak egyes speciális esetekben következik be, az épület jellemzően mindkét tehetetlenségi síkban kihajlik, miközben a függőleges tengely körül is elcsavarodik). Alapvetően háromféle alakváltozást végezhet egy épület: lokális hajlítási alakváltozást, globális hajlítási alakváltozást, illetve nyírési alakváltozást (ahogyan az 1.1. ábrán [1] látható a fent említett sorrendben).



1.1. ábra: lokális hajlítási, globális hajlítási, nyírési alakváltozás

A teljes magasságra kiterjedő lokális hajlítási alakváltozás során az épület úgy működik, mintha csak az oszlopai állnának ellen a külső tehernek, a gerendák szerepe csupán arra korlátozódik, hogy csuklós végű rúdként együttműködjenek a pillérekkel. Globális hajlítási alakváltozás során az épület úgy viselkedik, mintha az oszlopok egy képzeletbeli tömör rúd hosszanti szálai volnának, amelyek az alakváltozás során összenyomódást, illetve megnyúlást szenvednek. A nyírési alakváltozás abból a tényből adódik, hogy az oszlopok és gerendák a csomópontok körül meggörbülnek. A dolgozatban bemutatott vizsgálatok során arra törekedtünk, hogy olyan feltételrendszert szabjunk, amelynek eredményeképpen a számítások egyszerűbbé válnak, ugyanakkor az eredmények felhasználhatók az épületek egy – nem túlzottan lehatárolt – csoportjának közelítő vizsgálatához. A következő fejezetekben az alábbi feltételezésekkel élünk:

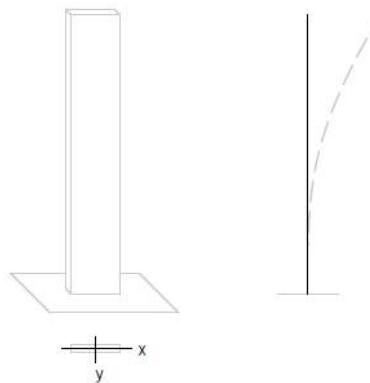
- i) A merevítőrendszer elemei homogén és izotróp anyagúak, lineárisan rugalmasan viselkednek és kis alakváltozásokat végeznek.

- ii) A merevítőrendszer elemei (merevítőfalak) az alaptestbe befogottak.
- iii) A merevítőfalak alaprajzi elrendezése minden szinten azonos.
- iv) Az épületek földemei saját síkjukban merev tárcsát alkotnak, síkjukra merőlegesen azonban hajlékonyak (azaz a függőleges terheket továbbítják, de a csatlakozó szerkezetek alakváltozásait hajlítómerevségükkel nem gátolják).
- v) A merevítőrendszer csak lokális hajlítási alakváltozást végez.

Globális hajlítási alakváltozássalazért nem foglalkozunk, mivel a pilléreket (illetve falakat) összenyomhatatlannak feltételezzük, a nyírásival pedig egyrészt azért, mert a földémeket a síkjukra merőlegesen hajlékonynak tekintjük, így nem szolgálnak részleges „befogásként” a merevítőrendszer számára, másrészt pedig azért, mert a merevítőrendszer arányai olyanok, hogy a nyírási alakváltozás nem jelentős. Érdeemes megjegyezni, hogy minél magasabb (nagyobb szintszámú) épületet vizsgálunk, annál kisebb hibát eredményez a nyírás alakváltozások elhanyagolása (a merevítőfal magassága annál nagyobb lesz az alaprajzi méretekhez képest). A mérnöki gyakorlatban, ha egyáltalán sor kerül a merevítőrendszer stabilitásvizsgálatára, gyakran csak a síkbeli kihajláshoz tartozó ún. kritikus erő kiszámítása történik meg, az elcsavarodási tönkremenetel lehetőségének vizsgálata elmarad. Ennek oka az lehet, hogy az elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus erő meghatározása általános esetben komplexebb számításokat igényel, míg a síkbeli kihajláshoz kapcsolódó vizsgálat egyszerű, általában kézi számítással könnyen elvégezhető. Felmerül a kérdés, hogy mely esetekben hagyható el ténylegesen az elcsavarodási tönkremenetel vizsgálata, illetve mely esetekben válik mértékadóvá. A dolgozat azokat a geometriai paramétereket, merevítőrendszer-elrendezéseket és szintszámokat kutatja, amelyeknél az elcsavarodási tönkremenetel válik mértékadóvá a síkbeli kihajlással szemben.

1.2. A helyettesítő tartó

Ahogy arról az előző fejezetben már szó esett, a (merevítő)falakat alul befogott rúdszerkezetként modellezzük, melyek hajlítási alakváltozást végző konzolként működnek (1.2. ábra).



1.2. ábra: merevítőfal, hajlítási alakváltozás

A merevítőrendszerek globális vizsgálata viszonylag egyszerűen végrehajtható, ha a merevítőelemeit (falakat) képzeletben egyetlen helyettesítő tartóvá (konzollá) toljuk össze úgy, hogy a helyettesítő tartó mechanikai viselkedés szempontjából egyenértékű legyen az eredeti

merevítőrendszerrel [1]. Ilyen értelemben a merevítőelemek egy fiktív, függőleges tengelyű rúd keresztmetszetének részeit alkotják. A helyettesítő tartó két meghatározó tulajdonságával jellemezhető: merevségével és helyével. Stabilitásvizsgálat során a merevítőrendszer térbeli viselkedését tanulmányozzuk, amely meglehetősen komplex: a külső terhek hatására az épület kétirányú eltolódásokat és elcsavarodást is végezhet. A térbeli viselkedés során fontos szerepet játszik az ún. nyírasközéppont (v. csavarási/merevségi középpont), amely az a pont (rendszerint, de nem feltétlenül az épület kontúrján belül), amelyen áthaladó vízszintes erő hatására az épület födémei eltolódnak, de nem csavarodnak el (a rúdszerkezetek elméletében a keresztmetszetek nyírasközéppontja ezzel analóg módon viselkedik). Amennyiben azt szeretnénk, hogy a helyettesítő tartó egyenértékű legyen a merevítőrendszerrel, akkor a helyettesítő tartónak a merevítőrendszer nyírasközéppontjában kell lennie (a bevezető fejezetben a feltételek között kikötöttük (iii), hogy a merevítőfalak alaprajzi elrendezése minden szinten azonos, így többszintes épületek esetében az egyes szintek nyírasközéppontjai egy függőleges egyenesre esnek). A nyírasközéppont koordinátáit a merevségek súlypontjaként határozzuk meg, célszerűen egy olyan x-y koordinátarendszerben, amelynek koordinátatengelyei az épületet közrefogják. A centrifugális tehetetlenségi nyomatókokat is figyelembe véve a nyírasközéppont koordinátáit az

$$\bar{x}_0 = \frac{I_{xy}(\sum_1^n I_{y,i}\bar{y}_i - \sum_1^n I_{xy,i}\bar{x}_i) - I_y(\sum_1^n I_{xy,i}\bar{y}_i - \sum_1^n I_{x,i}\bar{x}_i)}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$\bar{y}_0 = \frac{I_x(\sum_1^n I_{y,i}\bar{y}_i - \sum_1^n I_{xy,i}\bar{x}_i) - I_{xy}(\sum_1^n I_{xy,i}\bar{y}_i - \sum_1^n I_{x,i}\bar{x}_i)}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

összefüggések adják, ahol $I_{x,i}$, $I_{y,i}$ és $I_{xy,i}$ az i -edik merevítőelem tehetetlenségi nyomatókai az elemek saját súlyponti tengelyeire és I_x , I_y és I_{xy} a tehetetlenségi nyomatókok összegei, azaz:

$$I_x = \sum_1^n I_{x,i}, \quad I_y = \sum_1^n I_{y,i}, \quad I_{xy} = \sum_1^n I_{xy,i}$$

ahol n a merevítőelemek száma. A fenti képletben \bar{x}_i és \bar{y}_i az egyes merevítőelemek saját nyírasközéppontjára vonatkozik. A dolgozatban szereplő merevítőrendszer-típusok esetében az egyes merevítőelemek nem rendelkeznek centrifugális tehetetlenségi nyomatókkal, így a fenti képletek az alábbi összefüggésekre egyszerűsödnek:

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum_1^n I_{x,i}\bar{x}_i}{I_x}, \quad \bar{y}_0 = \frac{\sum_1^n I_{y,i}\bar{y}_i}{I_y}$$

(A nyírasközéppont koordinátáinak ismeretében az eredeti x-y koordinátarendszert áthelyezhetjük a merevségi középpontba, így a későbbiekben az \bar{x} és \bar{y} segédtengelyekre már nem lesz szükség.) A helyettesítő tartó merevségei azonosak kell hogy legyenek a merevítőrendszer merevségeivel, melyeket két csoportban, a hajlítási és a csavarási merevségek csoportjában vizsgálunk. A födéme a saját síkjukban nagy merevségük révén a merevítőrendszer elemeit együttdolgoztatják, így a helyettesítő tartó EI_x , EI_y és EI_{xy} hajlítási merevségeit úgy kapjuk, hogy a merevítőelemek saját hajlítási merevségeit egyszerűen összegezzük:

$$EI_x = E \sum_1^n I_{x,i}, \quad EI_y = E \sum_1^n I_{y,i}, \quad EI_{xy} = E \sum_1^n I_{xy,i}$$

ahol E a rugalmassági modulus. A helyettesítő tartó pontos helyének és merevségének ismeretében már elvégezhető a stabilitásvizsgálat, a merevítőrendszer térbeli viselkedésének elemzése során feltételezzük, hogy a teher függőleges. Az N_{kr} (kritikus teher) az a teher, amelynél az épület elveszti stabilitását (A viselkedés jellege vízszintes teher és szilárdsági, illetve dinamikai vizsgálatnál is megfelel az itt leírtaknak.) A térbeli viselkedés jellemzően attól függ, hogy a külső terhek eredője és a nyírasközéppont hogyan helyezkedik el egymáshoz viszonyítva, ez alapján három alapvető esetet különböztetünk meg:

- i) Kétszeres szimmetria: a függőleges terhek eredője egybeesik a merevítőrendszer nyírasközéppontjával
- ii) Egyszeres szimmetria: a függőleges terhek eredője az egyik tehetetlenségi főtengelyre esik
- iii) Általános eset: a függőleges terhek eredője egyik tehetetlenségi főtengelyre sem esik

A dolgozatban csak kétszeresen szimmetrikus épületekkel foglalkozunk, ekkor három dolog történhet:

- i) A merevítőrendszer kihajlik az xz síkban (ezt az esetet $N_{kr,x}$ jellemzi)
- ii) A merevítőrendszer kihajlik az yz síkban (ezt az esetet $N_{kr,y}$ jellemzi)
- iii) Tiszta elcsavarodó kihajlás jön létre z tengely körül (ezt az esetet $N_{kr,\varphi}$ jellemzi)

A három jelenség egymástól elkülönített módon, „tisztán” jöhet létre, és közülük az következík be, amelyikhez a legkisebb kritikus erő tartozik, vagyis felírható az alábbi összefüggés:

$$N_{kr} = \min(N_{kr,x}; N_{kr,y}; N_{kr,\varphi})$$

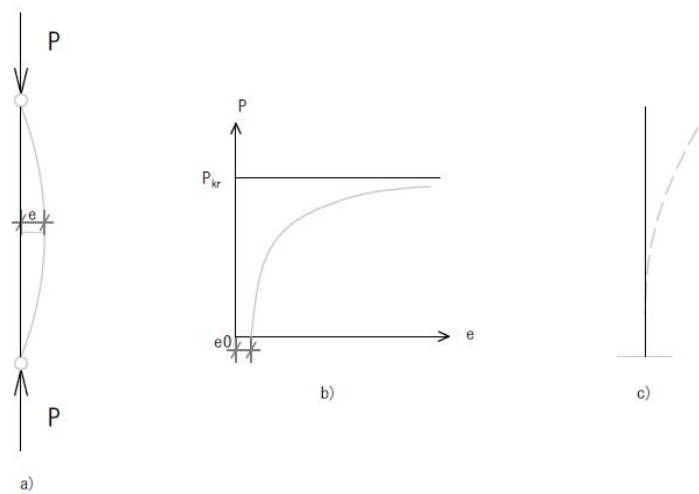
A későbbi fejezetekben azokat az eseteket vizsgáljuk, melyekben az elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus erő mértékadóvá válik a síkbeli kihajláshoz tartozó kritikus erővel szemben, vagyis az alábbi két feltétel egyidejűleg teljesül:

$$N_{kr,\varphi} < N_{kr,x}, \quad N_{kr,\varphi} < N_{kr,y}$$

1.3. Síkbeli kihajlás

Ahogy az előző (1.2.) fejezetben láthattuk, az épület merevítőrendszerét egyetlen helyettesítő tartóvá „tolhatjuk össze”, és így a vizsgálatot egyetlen oszlopon hajthatjuk végre [1]. Tekintsük az 1.3./a ábrán látható, alul-felül csuklós rudat, melyet a tetőpontján P koncentrált erő terhel. Abban az esetben, ha az erő tökéletesen központos, a nyomott rúd kis P értékek esetében összenyomódik, alakját viszont nem változtatja (egyenes marad). Ha azonban P értékét folyamatosan növeljük, egy bizonyos P_{kr} terhelőerő elérésekor a rúd hirtelen nagy alakváltozásokat szenved, s oldalirányban kihajlik (elveszti stabilitását). Ezt a P_{kr} erőt kritikus erőnek nevezzük. A kritikus erő értéke független a konzol kezdeti görbeségétől, ahogyan az 1.3./b ábrán látható kezdeti e_0 görbeség esetén. Az épület merevítőrendszerét „helyettesítő”

tartó alul befogott konzolként (rúdként) modellezhető, melynek kihajlási görbéje az 1.3./c ábrán látható:



1.3. ábra: központosan nyomott oszlop kihajlása

Az 1.1. fejezetben alkalmazott peremfeltételek v) pontja alapján az épület kizárólag lokális hajlítási alakváltozást végezhet: a függőleges terhelés hatására a merevítőfalak kihajlanak (alakváltozást szenvednek), az őket összekötő gerendák (födémek) vízszintesek maradnak, szerepük az egyes szerkezeti elemek együttdolgoztatására korlátozódik. A kihajlás jellegéből adódóan kétféle stabilitásvesztési tönkremenetelt különböztetünk meg: síkbeli kihajlást, illetve elcsavarodó kihajlást. Síkbeli kihajlás esetén a rúd alakja síkgörbe, a jelenséget leíró differenciálegyenlet Zalka levezetése [1] alapján:

$$y'''' + \frac{\alpha}{H^3}zy' = 0$$

, ahol $\alpha = \frac{qH^3}{EI}$ dimenziótlan mennyiség, H a magasság, q pedig a tartó mentén függőlegesen „elkent” teher. Abban a koordináta-rendszerben, amelyiknek az origója a konzol tetőpontjához van rögzítve, a következő peremfeltételek tartoznak:

- i) A tartó tetőponti eltolódása (a tetőponttal együtt mozgó koordináta-rendszerben vizsgálva) zérus, azaz:

$$y(0) = 0$$

- ii) Az érintő függőleges a befogási keresztmetszetnél:

$$y'(H) = 0$$

- iii) A tartó tetőpontjánál a nyomaték zérus:

$$y''(0) = 0$$

iv) A tartó befogási keresztmetszeténél a nyíróerő zérus:

$$y'''(H) = 0$$

A kritikus erő értéke hatványsoros megoldás alapján:

$$P_{kr} = \frac{7,837EI}{H^2}$$

1.4. Elcsavarodó kihajlás

Elcsavarodó kihajlás esetében az épület merevítőrendszerét jelképező helyettesítő tartó (konzol) kihajlási alakja térgörbe, vagyis mindkét (tehetlenségi) síkban kihajlik, miközben a függőleges tengely körül el is csavarodik. A levezetést mellőzve a jelenséget - koncentrált tetőteher esetén – leíró differenciálegyenlet-rendszer Zalka [1] alapján:

$$EI_y u'''' + F_u'' + F_{y_c} \varphi'' = 0$$

$$EI_x \vartheta'''' + F_v'' - F_{x_c} \varphi'' = 0$$

$$EI_\omega \varphi'''' - (GJ - Fi_p^2) \varphi'' - F_{x_c} \vartheta'' + F_{y_c} u'' = 0$$

,ahol i_p az inerciasugár. A differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó peremfeltételek az oszlop tetejéhez rögzített origójú koordinátarendszerben a következők:

- i) Az oszlop tetőpontjának eltolódása és elcsavarodása zérus
- ii) A befogási keresztmetszetnél az érintő függőleges és nem keletkezik öblösödés
- iii) A tartó szabad végén a hajlítónyomatékok zérus értékűek és nem ébrednek öblösödési feszültségek
- iv) A befogási keresztmetszetnél a nyíróerők és a csavarónyomatékok értéke zérus

Amennyiben a merevítőrendszer kétszeresen szimmetrikus, a kritikus erő értéke:

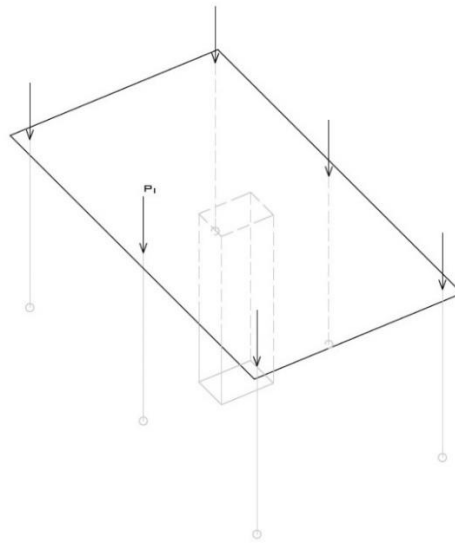
$$P_{kr,\varphi} = \frac{1}{i_p^2} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{4H^2} + GJ \right)$$

2. Merevítőrendszerek vizsgálata egyszerű módszerrel (Kollár Lajos nyomán)

2.1. A módszer bemutatása

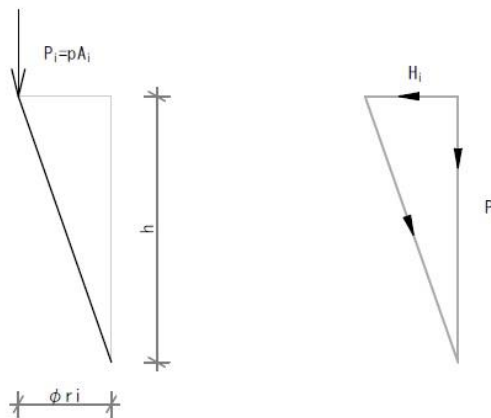
Az 1.4. fejezetben említett elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus terhet – Kollár Lajos levezetését alkalmazva [2] - egy sokkal egyszerűbb és szemléletesebb módon is meg lehet határozni. Tekintsük a 2.1. ábrán vázolt egyszintes épülettípust, amelynek gerendái és pillérei csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz, így önmagukban nem állékonyak. Ezeket a szerkezeteket külön maggal kell merevíteni, amely kettős funkciót lát el: egyrészt fel kell vennie a szélteherből és építési pontatlanságból (esetleg földrengésből) adódó vízszintes terheket

(szilárdsági követelmény), másfelől viszont biztosítani kell az épület stabilitását (merevségi követelmény).



2.1. ábra

Az épületet a födémen egyenletesen megoszló p intenzitású teher terheli, a merevítőmag kizárólag GJ tiszta csavarási merevséggel rendelkezik ($EI_{\omega, mag} = 0$). A függőleges teher – a merevítőmagon kívül – alul-felül csuklós pillérek segítségével adódik át az alapozásra, az i -edik oszlopra $P_i = pA_i$ teher jut, ahol A_i az oszlop terhelő mezője. Az i -edik oszlop a függőleges erő hatására a nyírasközépponttól mért r_i távolsággal arányos $\frac{r_i \theta}{h}$ elferdülést szenved, a rá ható P_i erőt tehát fel kell bontanunk egy, az oszloptengelybe eső, és egy vízszintes komponensre. E vízszintes komponens értéke arányos háromszögek felhasználásával a 2.2. ábra szerint:



2.2. ábra

$$\frac{H_i}{P_i} = \frac{r_i \theta}{h} \rightarrow H_i = P_i \frac{r_i \theta}{h}$$

nagyságú lesz, s r_i karral fejt ki csavarónyomatékot a nyírasközéppont körül, amely az épület elcsavaródását okozza. A teljes külső csavarónyomaték értéke:

$$M_k = \sum_i P_i \frac{r_i^2 \theta}{h} = \sum_i p A_i \frac{r_i^2 \theta}{h}$$

Az egyszerűség kedvéért korábban feltételeztük, hogy a mag csupán GJ csavarási merevséggel rendelkezik (EI_ω öblösödési merevsége nincs), mivel az ellenállás hatékonysága egyenesen arányos az elcsavarodás θ szögével, és fordítottan arányos a mag h magasságával, a teljes belső nyomaték így:

$$M_b = GJ \frac{\theta}{h}$$

Egyenlővé téve a külső és belső csavarónyomatékokat az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$M_k = M_b \rightarrow \sum_i p A_i \frac{r_i^2 \theta}{h} = GJ \frac{\theta}{h}$$

$$p_{kr} = \frac{GJ}{\sum_i A_i r_i^2} = \frac{GJ}{\sum_i A_i (x_i^2 + y_i^2)} = \frac{GJ}{I_x + I_y} = \frac{GJ}{I_p}$$

ahol p_{kr} a födémteher kritikus intenzitása. A nevezőben szereplő I_p a födém alapterületének a mag nyírasközéppontjára vett poláris inercianyomatékát adja meg, ha az oszlopok száma kellően nagy (A_i elég kicsi). megszorozva mind a két oldalt a födém teljes területével megkapjuk a P_{kr} kritikus összterhet:

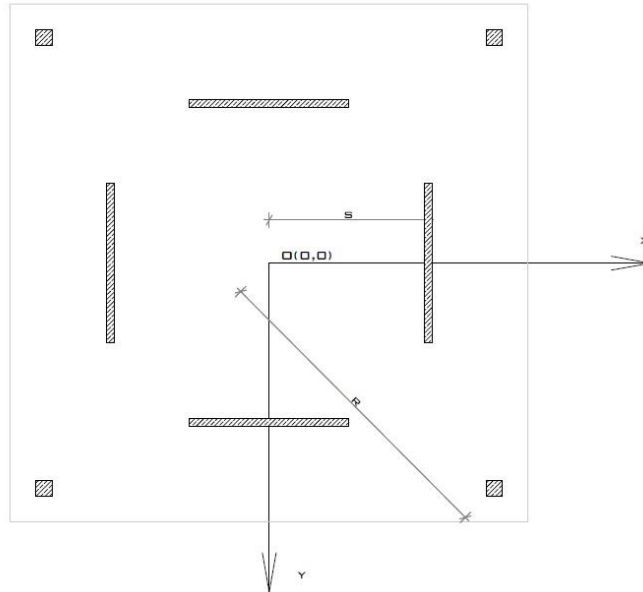
$$P_{kr} = p_{kr} A = \frac{GJ}{\frac{I_p}{A}} = \frac{GJ}{i_p^2}$$

ahol $i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}}$ az épület alapterületének a mag nyírasközéppontjára vett poláris inerciasugara.

Ugyanezt az eredményt kapjuk az (1.4. fejezetben levezetett) elcsavarodó kihajlás differenciálegyenletének megoldásakor (amennyiben ugyanígy feltételezzük, hogy $EI_\omega = 0$). A módszer természetesen kiterjeszhető több födém és EI_ω -val bíró mag esetére is.

2.2. A számítási modell kiterjesztése

Az előző (2.1.) fejezetben ismertetett szemléletesebb megközelítéssel nem csak az elcsavarodó kihajlás, hanem a síkbeli kihajlás esetét is leírhatjuk. Tekintsük a 2.3. ábrán vázolt egyszintes épületet, melynek merevségét a korábban vizsgált esettől eltérően a nyírasközépponttól egyenlő s távolságra elhelyezett merevítőfalak biztosítják, az ingaoszlopok (pillérek) nyírasközépponttól mért távolsága r nagyságú. Az épületet a födémeken egyenletesen megoszló p intenzitású teher terheli, melynek P eredőjének támadáspontja a merevítőrendszer merevségi (nyírési) középpontjával egybeesik, vagyis a rendszer kétszeresen szimmetrikusnak tekinthető (korábban definiálva).



2.3. ábra

Terjesszük ki a 2.1. fejezetben leírt számítási modellt a fentebb vázolt szerkezet típusra! Az ingaoszlopok a függőleges terhelés hatására elferdülnek, s mivel az erő a ferde oszlopból nem tud kilépni, az egyensúly biztosításához szükség van egy H_i vízszintes erőre, melynek nagysága az előző fejezethez hasonlóan:

$$H_i = P_i \frac{r_i \varphi}{h}$$

ahol $r_i = r$. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a falakra és az oszlopokra egyenlő nagyságú függőleges terhek jutnak, így az egyenlet a következőképpen módosul:

$$H_i = \frac{P r \varphi}{8 h}$$

Az egyes ingaoszlopok r nagyságú karral fejtenek ki csavarónyomatékokat a nyírasközéppont körül, amely az épület elcsavaródását okozza. A teljes külső csavarónyomaték értéke ebben az esetben:

$$M_k = \sum H_i r_i = 4 \frac{P r \varphi}{8 h} r = \frac{P r^2}{2 h} \varphi$$

Vizsgáljuk meg, hogy az egyes merevítőfalak mekkora merevséggel tartanak ellen az ingaoszlopok elferdüléséből származó M_k külső nyomatéknak: ahogy már korábban megemlítettük, tetőpontján terhelt konzol hajlítással szembeni merevsége $k = \frac{3EI}{h^3}$, így az egy merevítőfalra jutó erő nagysága:

$$F_i = k f_i = \frac{3EI}{h^3} \varphi s$$

A teljes belső ellenállás a négy merevítőfal nyírési középpontra vonatkoztatott nyomatékösszegével jellemezhető, amely a következőképpen áll elő:

$$M_b = \sum F_i s_i = \frac{12EIs^2}{h^3} \varphi$$

, egyensúly esetén:

$$M_k = M_b$$

így:

$$\frac{Pr^2}{2h} \varphi = \frac{12EIs^2}{h^3} \varphi$$

$$P_{kr,\varphi} = \frac{24EIs^2}{h^3} = \frac{24EIs^2}{r^2 h^2}$$

ahol $P_{kr,\varphi}$ az elcsavarodó kihajlásához tartozó kritikus erő. Hasonlóképpen határozzuk meg a síkbeli kihajlásához tartozó kritikus terhet! Az ingaoszlopok f eltolódásából származó vízszintes erők eredője a korábban alkalmazott hasonló háromszögek elve alapján meghatározható:

$$F_k = \sum H_i = 4 \frac{P f}{8 h} = \frac{P}{2h} f$$

,melynek a merevítőfalakban az elmozdulás hatására ébredő erők eredője tart ellen:

$$F_b = \sum F_i = \sum k_i f_i = 2 \frac{3EI}{h^3} f = \frac{6EI}{h^3} f$$

(Az egyes irányokban két-két merevítőfal játszik szerepet). Az egyensúlyi egyenletet felírva:

$$F_k = F_b$$

$$\frac{P}{2h} f = \frac{6EI}{h^3} f$$

$$P_{kr,x} = P_{kr,y} = 2h \frac{6EI}{h^3} = \frac{12EI}{h^2}$$

összefüggéshez jutunk, ahol az egyes síkokhoz (xz, valamint yz) tartozó kritikus terhek egyenlő nagyságúak, a merevítőfalak szimmetrikus elrendezéséből adódóan. A számítások alapján az alábbi következtetések vonhatók le egyszintes épülettípus esetén:

Tiszta elcsavarodó kihajlás - $P_{kr,\varphi}$

- a kritikus erő nagysága egyenesen arányos a merevítőfalak hajlítási merevségével
- a kritikus erő nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
- a kritikus erő nagysága nagyban függ a merevítőelemek helyétől (r, s)

Síkbeli kihajlás - $P_{kr,x}, P_{kr,y}$

- a kritikus erő nagysága egyenesen arányos a merevítőfalak hajlítási merevségével
- a kritikus erő nagysága fordítottan arányos a magasság négyzetével
- a kritikus erő nagyságát nem befolyásolja a merevítőelemek helye

Vizsgáljuk meg, hogy az egyszintes épület adott alaprajzi elrendezése mellett milyen geometriai arányok mellett válik mértékadóvá az elcsavarodási tönkremenetel a síkbeli kihajlással szemben. Ehhez az alábbi feltételnek kell teljesülnie:

$$P_{kr,\varphi} < P_{kr,x} = P_{kr,y}$$

$$\frac{P_{kr,\varphi}}{P_{kr,y}} = \frac{P_{kr,\varphi}}{P_{kr,x}} < 1$$

Az egyszerűbb kezelhetőség érdekében vezessük be a $\beta = \frac{12EI}{h^2}$ értéket, így az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$\frac{2\beta s^2}{\beta r^2} < 1$$

$$\frac{2s^2}{r^2} < 1$$

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $r=2s$ feltétel teljesül, ekkor:

$$\frac{2s^2}{(2s)^2} < 1$$

$$\frac{2s^2}{4s^2} < 1$$

$$\frac{1}{2} < 1$$

, vagyis ebben az alaprajzi elrendezésben az elcsavarodási tönkremenetel vált mértékadóvá a síkbeli kihajlással szemben. Vizsgáljuk meg azonban, hogy valós méreteket feltételezve hogyan viszonyul egymáshoz az épület önsúlyából adódó függőleges eredő teher az elcsavarodó kihajlást jellemző kritikus erőhöz! Közelítésként vegyük fel az alábbi kiindulási adatokat:

$$E = 10^7 \frac{kN}{m^2}$$

$$r = 5,0 \text{ m}$$

$$t = 0,2 \text{ m}$$

$$I = \frac{0,2 \times 3^3}{12} = 0,45 \text{ m}^4$$

$$h = 3,0 \text{ m}$$

$$P_{kr,\varphi} = \frac{24EIs^2}{r^2h^2} = \frac{24EI(2r)^2}{r^2h^2} = \frac{96EIr^2}{r^2h^2} = \frac{96EI}{h^2} = \frac{96 \times 10^7 \times 0,45}{3^2} = 1,44 \times 10^8 \text{ kN}$$

Amennyiben a födém szerkezet illeszkedik a pillérek raszteréhez, befoglaló méretének $2\sqrt{2}r \approx 2,828r$ adódik, melyet közelítsünk $3r$ -rel, így $p_{Ed} = 20 \frac{kN}{m^2}$ függőleges terhelést feltételezve a terhelőerő:

$$P_{Ed} = (3r)^2 P_{Ed} = 4,5 \times 10^3 \text{ kN}$$

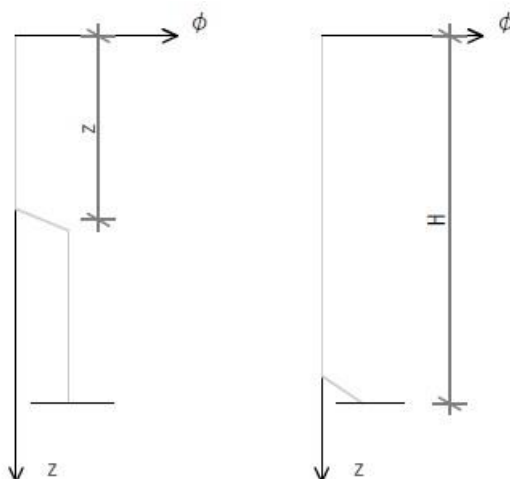
A fenti számításokból egyértelműen látható, hogy a valóságot jól közelítő anyagjellemzőkből és alaprajzi elrendezésből számított függőleges terhelőerő öt nagyságrenddel tér el az elcsavarodási tönkremenetelhez szükséges kritikus erőtől, így egyszintes, közel hasonló geometriai adatokkal jellemezhető épülettípus esetén egyáltalán nincs is szükség stabilitásvizsgálatra, a tervezői gyakorlatban a legkritikábban sem kerül rá sor. A későbbi fejezetekben azonban láthatjuk, hogy magasházak esetén, a szintszám jelentős növelésével a teherből származó erő már jelentős mértékben közelíti a stabilitási tönkremenetelhez tartozó kritikus erőket.

2.3. Többszintes épületek stabilitásvizsgálata, r_s redukciós tényező

A 2.1. és 2.2. fejezetben vizsgált egyszintes épületeknél lényegesen bonyolultabb esetet képviselnek a többszintes épületek. Több szint esetén a tiszta (Saint Venant-féle) csavarási és az öblösödési merevség hatása az elcsavarodási kritikus teherre különböző [1]. Ha a többszintes épületnek csak GJ-vel jelölt tiszta csavarási merevsége van ($EI_\omega = 0$), akkor a kritikus erő:

$$P_{kr,GJ} = \frac{GJ}{i_p^2}$$

,ahol i_p az épület alaprajzi befoglaló síkidomának poláris inerciasugarát jelöli. A fenti képlet által számított kritikus erő értéke nem függ az épület magasságától. Ez igen meglepő, ahogy az ehhez a stabilitásvesztési módhoz tartozó kihajlási alak is (2.5. ábra).



2.4. ábra

Ha ellenben a többszintes épületnek csak EI_ω -val jelölt öblösödési merevsége van ($GJ = 0$), akkor a kritikus erő:

$$P_{kr,EI_\omega} = \frac{7,837 r_s EI_\omega}{i_p^2 H^2}$$

,ahol $r_s = \frac{n}{n+1,588}$ szintszám-tényező. Látható, hogy - az előző esetnél kevésbé meglepő módon - a kritikus erő függ az épületmagasságtól. Ha egyik, csavaráshoz kapcsolódó merevség értéke

sem tekinthető nullának, akkor a többszintes épület elcsavarodási kritikus erejének épületmagasságtól való függése nehezen áttekinthető, számítása is ennek megfelelően viszonylag bonyolult. Azonban a gyakorlatban megvalósított épületmerevítő rendszerekről elmondható, hogy gyakran az egyik típusú merevség a másik típusúhoz képest elhanyagolható. Például a vékony falakból álló, alaprajzilag zárt merevítőmagok általában jelentős tiszta csavarási merevséggel, ugyanakkor közel nulla öblösödési merevséggel rendelkeznek. Ha viszont különálló, vékony falakból megvalósított merevítőrendszert vizsgálunk, akkor éppen fordított a helyzet: a tiszta csavarási merevség általában elhanyagolható az öblösödési merevség mellett. Az általunk vizsgált, a 3. fejezetben részletesen bemutatott épülettípusra jellemző, hogy tiszta csavarási merevsége az öblösödési merevségéhez képest zérusnak tekinthető.

Többszintes épületek esetén az 1.2. fejezetben tett feltételezések szerepe meghatározó. Az épületek födémei saját síkjukban merev tárcsát alkotnak, síkjukra merőlegesen azonban hajlékonyak. Ennek következtében - feltételezéseink szerint - a merevítőrendszer csak lokális hajlítási alakváltozást végez. A 2.1. és a 2.2. fejezetben az egyszintes épületekre vonatkozó, hajlítási alakváltozások alapján számítható $\frac{3EI}{H^3}$ eltolási merevséget használtuk. Ez a tetőpontján terhelt konzol eltolási merevsége. A többszintes épületek esetén azt a közelítést tehetjük, hogy az egyes födémeik által átadott teher a merevítőrendszer magassága mentén egyenletesen megoszló. Ez annál pontosabb közelítés, minél több szintes az épület. Ekkor az eltolási merevség értéke $\frac{8EI}{H^3}$.

Az irodalomban [1] található, szintszámot figyelembe vevő tényező analógiájára bevezethetünk mi is egy szintszám-tényezőt. Ennek szerepe, hogy 1-nél nagyobb szintszám esetén módosítsa a konzol, mint épületmerevítő rendszer mentén értelmezett tehereloszlás függvényében az eltolási merevség értékét. A tényező:

$$r_s = \frac{n}{n + \frac{5}{3}}$$

,ahol n az épület szintjeinek száma.

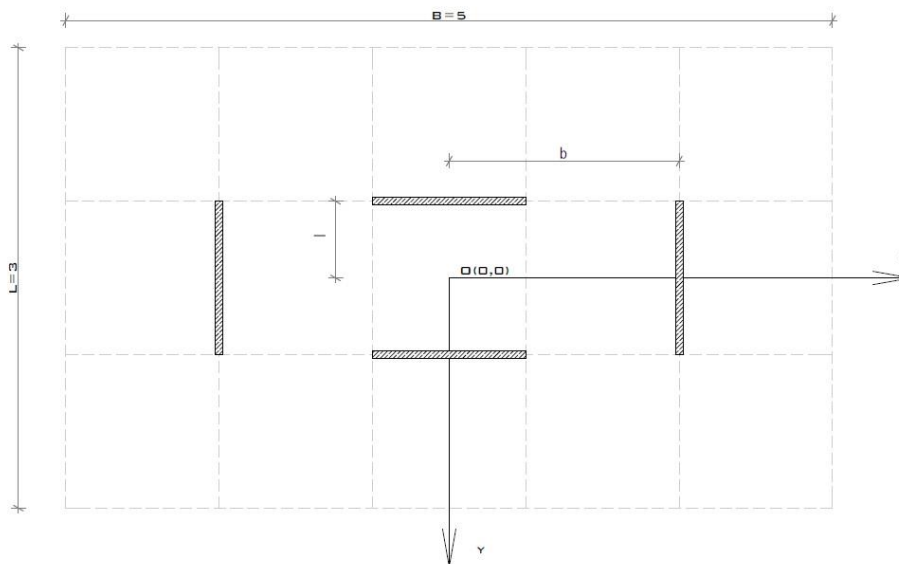
Ha egy (egész épület magassága mentén végigfutó) merevítőfal eltolási merevségét $k = r_s \frac{8EI}{H^3}$ kifejezéssel vesszük számításba, akkor ez $n = 1$ esetén visszaadja a $k = \frac{3EI}{H^3}$ értéket, $n \rightarrow \infty$ esetén pedig a $k = \frac{8EI}{H^3}$ értéket. Fontos megjegyezni, hogy az r_s tényezőt Zalkától eltérően definiáltuk. Definíciónk az elemi szilárdságtani ismereteink alapján levezethető, már említett $\frac{3EI}{H^3}$ és $\frac{8EI}{H^3}$ eltolási merevségeken alapszik. Zalka [1] pedig a födémeik által a merevítőrendszerre átadódó terhek eloszlása alapján határozza meg a tényezőt. A kétféleképpen definiált r_s tényező közötti eltérés - a különböző megközelítések ellenére - számszakilag igen csekély.

3. Excel számítási algoritmus

3.1. Problémafelvetés

A korábbi fejezetekben bemutatott alaprajzi elrendezések esetében láthattuk, hogy jellemzően két tényezővel írhatjuk le az épületet: egyrészt a merevítőfalak nyírasközépponttól mért

távolságával (s), másrészt pedig a pillérek helyzetével, melyet ugyancsak a merevségi középponttól mért távolságával jellemeztünk (r). Az egyes épületek merevítőrendszerei nagy mértékben különbözhetnek egymástól: alaprajzi elrendezéstől, tartó szerkezeti kialakítástól, épületszerkezettani szempontoktól és számos egyéb tényezőtől függően, így aligha találunk általános, vagy gyakran tekinthető merevítőfal-elrendezést. Vizsgáljuk meg azonban, hogy hogyan algoritmizálhatóak az épületek merevségi viszonyait leíró geometriai paraméterek, amelyek segítségével a merevítőrendszerek stabilitásvizsgálatát minél szélesebb épületállomány esetében el tudjuk végezni. Vizsgálatunk kizárólag pillérváz szerkezeti rendszerű épületekre terjeszhető ki, ahol az ingaoszlopként modellezhető pillérek hozzájárulnak mind a síkbeli kihajláshoz, mind pedig az elcsavarodási tönkremenetelhez (ahogy ezt a 2. fejezetben láthattuk). Tekintsük a képen (3.1. ábra) feltüntetett, egyenletes rászterhálót, amely a kétszeresen szimmetrikus épület leegyszerűsített alaprajzának értelmezhető: a szimmetriaközépponttól (mely az épület geometriai és nyírasközéppontja is egyben) a b , illetve l távolságra elhelyezkedő (raszterponttól rászterpontig terjedő) mezők az épület merevítőfalai, míg a B , illetve L paraméterek az épület befoglaló méreteit írják le.



3.1. ábra

Az egyes paraméterek dimenziótlan mennyiségek, a rászterben szereplő távolságok és a valós fizikai méretek között az alábbi összefüggések teremtenek kapcsolatot:

$$B' = eB$$

$$L' = eL$$

$$b' = eb$$

$$l' = el$$

, ahol l két szomszédos rászterpont közötti távolságot fejezi ki méterben (értéke szabja meg a rászterháló valós fizikai méretét). Minden egyéb rászterpontban ingaoszlopként modellezhető pillérek helyezkednek el, melyek a merevítőfalakkal együtt az épület függőleges terheit hordják. Az épületre vonatkozóan az alábbi peremfeltételek határozhatók meg:

- i) A befoglaló méreteket leíró B , illetve L paraméterek kizárólag páratlan értékeket vehetnek fel (az egyszerűbb algoritmizálhatóság miatt)
- ii) $b \leq \frac{B}{2}$, illetve $l \leq \frac{L}{2}$, máskülönben a merevítőfalak az épület kontúrján kívül helyezkednének el (továbbá b és l is $N+0,5$ alakúak, ahol N pozitív egész szám)
- iii) ha olyan paramétereket veszünk fel, hogy az egymásra merőleges merevítőfalak végei összeérnek, akkor ebben az esetben is azt feltételezzük, hogy az egyes merevítőfalak egymástól függetlenül működnek, azaz a (függőleges) csatlakozóél mentén nem adódik át igénybevételek

Terjesszük ki a 2.2. fejezetben levezetett számítási modellünket a fenti szerkezettípusra, ahol ismeretlenként a szintszám, anyagjellemzőkön és merevségeken túl az imént bevezetett B , L , b , illetve l paraméterek is feltűnnek. Belátható, hogy a külső (csavaró) nyomaték meghatározásához szükségünk van az ingaoszlopok számára, így először az n_o értéket határozzuk meg (az ellenállási nyomatékot kifejtő merevítőfalak száma a paraméterektől függetlenül minden elrendezésben azonosan négy, azaz $n_f = \text{konst}$):

$$n_r = (B + 1)(L + 1)$$

a raszterpontok száma, melyből a merevítőfalak által „elfoglalt” raszterpontokat kivonva (elemenként kettőt) megkapjuk a pillérek számát:

$$n_o = n_r - 8 = (B + 1)(L + 1) - 8$$

dimenziótlan mennyiség (darabszám). (Megjegyzés: A képlet némi finomításra szorul, amelyről a következő, 3.2. fejezetben lesz bővebben szó.) Vizsgáljuk meg, hogy a 2.2. fejezetben levezetett (Kollár Lajos számítási modelljén alapuló) kritikus erők értékei hogyan módosulnak az újonnan bevezetett paraméterek függvényében!

$$P_{kr,\varphi} = \frac{24EIs^2}{r^2h^2}$$

$$P_{kr,x} = P_{kr,y} = \frac{12EI}{h^2}$$

A síkbeli kihajláshoz tartozó $P_{kr,x}$ illetve $P_{kr,y}$ értékek meghatározása során négy darab ingaoszlopot vettünk figyelembe, n_o db ingaoszlop esetében az egyenletek az alábbiaképpen módosulnak (a kétszeres szimmetriából adódóan a két síkhoz kapcsolódó kritikus erők most is azonosan egyenlők):

$$F_k = \sum H_i = n_o \frac{P}{n_r} \frac{f}{h}$$

(Megjegyzés: Valójában egy ingaoszlopra $\frac{P}{n_o+4}$ teher jutna, közelítésként azonban tekintsük úgy, mintha az egyes raszterpontokra egyenlő terhek jutnának, így egy fal lényegében két pillérel egyenértékű erőt vesz föl, amely nagy n_o esetén nem okoz jelentős eltérést.) Az ellenállás-érték a 2.3. fejezetben levezetett, szintszám függvényében korrigáló r_s tényezőt figyelembe véve:

$$F_b = \sum F_i = \sum k_i f_i = 2 \frac{8EI}{h^3} r_s f = \frac{16EI}{h^3} r_s f$$

Egyenlőség esetén:

$$F_k = F_b$$

$$n_o \frac{P f}{n_r h} = \frac{16EI}{h^3} r_s$$

$$P_{kr} = \frac{16EI r_s n_r}{h^2 n_o}$$

ahol n_r , illetve n_o L és B paraméterektől függő értékek, így belátható, hogy a síkbeli kihajláshoz tartozó kritikus erők az ingaoszlopok számától igen, a merevítőfalak helyzetétől azonban nem függenek. Hasonló eljárással vizsgáljuk meg az elcsavarodó kihajláshoz tartozó nyomatékokat:

$$M_k = \sum H_i r_i = \frac{P}{n_r} \frac{\varphi}{h} \sum r_i^2$$

$$M_b = \sum F_i s_i = \frac{8EI r_s}{h^3} \varphi \sum s_i^2 = \frac{8EI r_s}{h^3} \varphi \sum s_i^2$$

$$M_k = M_b$$

$$P_{kr, \varphi} = \frac{n_r}{n_o} \frac{8EI r_s}{h^2} \frac{\sum s_i^2}{\sum r_i^2}$$

Vizsgáljuk meg az utolsó tagban szereplő szummás értékeket! Az egyes merevítőfalak helyzetének függvényében a $\sum s_i^2$ értéke könnyedén meghatározható az egyes távolságok (l , illetve b) négyzetösszegeként, azaz:

$$\sum s_i^2 = 2(l^2 + b^2)e^2$$

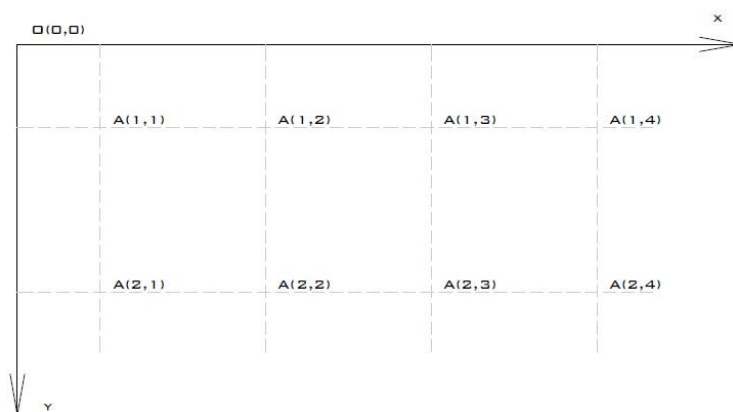
$\sum r_i^2$ esetében azonban már lényegesen nehezebb a dolgunk, hiszen az egyes ingaoszlopok száma változó, ennek diszkrét függvényeként határozható meg az összes pillér nyírasközépponttól mért távolsága. A rendszer kétszeres szimmetriájából adódóan elegendő csupán a pontok negyedének a távolságát meghatározni, hiszen az egyes szimmetriatengelyekre vonatkoztatott „párjaik” nyírasközépponttól mért távolsága megegyező, így az egyenlet az alábbiképpen módosul:

$$P_{kr, \varphi} = \frac{n_r}{n_o} \frac{8EI r_s}{h^2} \frac{2(l^2 + b^2)e^2}{4 \sum_{i=1}^{\frac{n_o}{4}} r_i^2 e^2} = \frac{n_r}{n_o} \frac{4EI r_s}{h^2} \frac{(l^2 + b^2)}{\sum_{i=1}^{\frac{n_o}{4}} r_i^2}$$

Feladatunk tehát a $\sum_{i=1}^{\frac{n_o}{4}} r_i^2$ értékének meghatározása, amely sok rászterpont esetén kézi számítással meglehetősen időigényes, egy Excel táblázat segítségével azonban a probléma könnyen algoritmizálható.

3.2. Számítási modell

Tekintsük a 3.2. ábrán látható ponthálót, ahol az egyes $A_{n,m}$ rászterpontok indexében szereplő n , illetve m tényezők egyértelműen meghatározzák az adott pont hálóban elfoglalt pozícióját (n : sorszám, m : oszlopszám).



3.2. ábra

Jelölje x és y az épület nyírasközéppontjára (O) illesztett tengelypárost, az előző fejezethez hasonlóan az egyes raszterpontokban a merevítőfalak pozíciójától függően vagy ingaoszlop, vagy pedig két raszterpontot összekötő falak helyezkednek el. Az egyes pontok függőleges vagy vízszintes tengely mentén értelmezett szomszédjukhoz viszonyított távolsága egységnyi (dimenziótlan mennyiség), így egy raszter területe is egységnyinek tekinthető ($l^2=1$).

Ekkor:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n_0}{4}} r_i^2 = (r_{A_{1,1}}^2 + r_{A_{1,2}}^2 + \dots + r_{A_{\frac{L}{2}, \frac{B}{2}}}^2), \text{ ahol}$$

$$r_{A_{n,m}} = \sqrt{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2}$$

dimenziótlan mennyiség. Vizsgáljuk meg, hogy milyen peremfeltételeket szükséges támasztanunk a felírt képlettel szemben, hogy a probléma algoritmizálhatóvá váljon:

- i) $n < \frac{L}{2}$, illetve $m < \frac{B}{2}$, máskülönben az egyes raszterpontok az épület kontúrján kívülre esnének.
- ii) Amennyiben az adott raszterpontba merevítőfal esik, a pont nyírasközépponttól mért távolsága nullának tekinthető ($r_{A_{n,m}} = 0$), ha az alábbi két feltétel közül legalább az egyik teljesül (hiszen az előző fejezetben levezetett összefüggés alapján a keresett $\sum_{i=1}^{\frac{n_0}{4}} r_i^2$ összeg kizárólag ingaoszlopokra vonatkozik):

$$(1) \quad n = b + 0,5$$

$$(2) \quad m = l + 0,5$$

Érdeemes megjegyezni, hogy a feltétel csak az $\{A_{1,1}; A_{1,2}; \dots; A_{1,n}\}$, illetve $\{A_{2,1}; A_{3,1}; \dots; A_{m,1}\}$ ponthalmazokat érinti, hiszen az alaprajz jellegéből adódóan egyéb pontba merevítőfal nem eshet.) $A_{1,1}$ pont kitüntetett helyzetben van, esetében

ugyanis előfordulhat olyan alaprajzi elrendezés, hogy két merevítőfal is részét képezi, ekkor a két feltétel egyidejűleg teljesül.

iii) Ahogy arról már az előző fejezetben szó volt, az ingaoszlopok számára felírt:

$$n_o = n_r - 8 = (B + 1)(L + 1) - 8$$

összefüggés némi kiegészítésre szorul, mégpedig az ii) alpontban említett A_{1,1} pont kitüntetett helyzetéből adódóan. Abban az esetben, ha az alábbi két feltétel

$$b = 0,5$$

$$l = 0,5$$

egyidejűleg teljesül, az A_{1,1} pontban egyidejűleg két darab merevítőfal foglal helyet, így az n_o -ra felírt egyenlet az alábbiaképpen módosul:

$$n_o = n_r - 4 = (B + 1)(L + 1) - 4$$

Érdemes megjegyezni, hogy kis B, illetve L értékek esetében a különbség jelentős (B=L=5 esetében 12,5%-os), a két értéket növelve azonban az eltérés elhanyagolhatóvá válik (már B=L=7 esetében is 7% alatti, tovább növelve az értékeket pedig 5%-os határ alá esik). A $\sum_{i=1}^{n_o} r_i^2$ -re felírt összefüggés, a kiegészítő peremfeltételek figyelembevételével már egyszerűen programozható (akár egy Excel-es táblázat segítségével is), így a feltételeknek eleget tevő B, L, b, illetve l bemeneti (input) adatok esetén az anyagjellemzők és geometriai paraméterek rögzítésével megkaphatjuk a kritikus erők (síkbeli és elcsavarodó kihajlási) számszerű értékeit. Amennyiben becsléssel közelítjük az épület függőleges terheit, a program nem csupán a két érték összehasonlításán alapuló vizsgálatra alkalmas, hanem segítséget nyújthat az épületek stabilitásvizsgálatára kiterjedő részletes tervezést megelőző előtervezési fázisban is.

3.3. Eredmények

A program segítségével lényegében előállnak az egyes merevítőfal-elrendezésekhez fűződő kritikus erők értékei, melyek alapján vizsgálhatjuk, hogy az elcsavarodási tönkremenetel mely esetekben válik mértékadóvá a síkbeli kihajlással szemben, vagyis mikor teljesül az alábbi feltétel:

$$P_{kr,\varphi} < P_{kr,x} (= P_{kr,y})$$

A 3.1. fejezetben levezetett összefüggések alapján a kritikus terhek az alábbiaképpen állnak elő:

$$P_{kr,\varphi} = \frac{n_r 4EI r_s (l^2 + b^2)}{n_o h^2 \sum_{i=1}^{n_o} r_i^2}$$

$$P_{kr,x} = P_{kr,y} = \frac{16EI r_s n_r}{h^2 n_o}$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a $\rho = \frac{n_r 4EI r_s}{n_o h^2}$ tényezőt, ekkor:

$$\frac{P_{kr,\varphi}}{P_{kr,x}} = \frac{P_{kr,\varphi}}{P_{kr,y}} = \frac{\rho}{4\rho} \frac{(l^2 + b^2)}{\sum_{i=1}^{n_0} r_i^2} = \frac{(l^2 + b^2)}{4 \sum_{i=1}^{n_0} r_i^2} = \frac{(l^2 + b^2)}{4(r_{A1,1}^2 + r_{A1,2}^2 + \dots + r_{A_{\frac{L}{2}, \frac{A_B}{2}}^2})}$$

a vonatkozó peremfeltételek figyelembevételével. Az összefüggés alapján belátható, hogy a két erő egymáshoz viszonyított értéke lényegében a merevítőfalak épületen belüli helyzetétől függ, azaz a $\frac{b}{B}$, illetve $\frac{l}{L}$ tényezők függvényeként jellemezhető. Vizsgáljuk meg, hogy a B=L=15 befoglaló méretű, $\frac{b}{B}$ illetve $\frac{l}{L}$ diszkrét hányadosok esetében melyik tönkremeneteli mód válik mértékadóvá:

$\frac{b/l}{B/L}$	0,5/15	1,5/15	2,5/15	3,5/15	4,5/15	5,5/15	6,5/15	0,5
0,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$
1,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$
2,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$
3,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$
4,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$
5,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$
6,5/15	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$
0,5	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$

Az egyszerűség kedvéért legyen $\frac{b}{B} = \frac{l}{L}$, ekkor:

$\frac{b/l}{B/L}$	0,5/15	1,5/15	2,5/15	3,5/15	4,5/15	5,5/15	6,5/15	0,5
m.a.	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,\varphi}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$	$P_{kr,x}$

A táblázatok értékeiből egyértelműen látszik, hogy minél nagyobbak az arányok, annál inkább a síkbeli kihajlás válik mértékadóvá (ez nem meglepő, hiszen minél nagyobb az arány, az egyes merevítőfalak annál távolabb helyezkednek el a nyírasközépponthoz viszonyítva, így nagyobb erőkarokkal dolgoznak az elcsavarodással szemben, míg a síkbeli kihajlásnál a kritikus erők függetlenek a merevítőrendszer pozíciójától). A keresett arány matematikai értelemben 0,3 és 0,37 közé esik, az egyes értékek diszkrét természetéből adódóan azonban az arányuk is csak diszkrét értékeket vehet fel, ezért a hozzá legközelebbi érték válik mértékadóvá. A 3.3. fejezetben láthattuk, hogy az egyes kritikus erők értékei arányosak az építmény szintszámával (arányossági tényező: r_s), ennek függvényében vizsgáljuk meg, hogy az említett B=L=15 befoglaló méretű alaprajz esetében az egyes stabilitásvesztési módok mekkora n szintszám esetén okoznak tönkremenetelt, $\frac{l_i}{L} = \frac{b_i}{B}$ feltétel teljesülése mellett. Az előző vizsgálatától eltérően itt nem az egyes értékek egymáshoz viszonyított arányát vizsgáljuk, hanem konkrét, számszerű adatokat, amelyhez szükséges rögzítenünk bizonyos kiindulási adatokat, így:

$$e = 6,0 \text{ m}$$

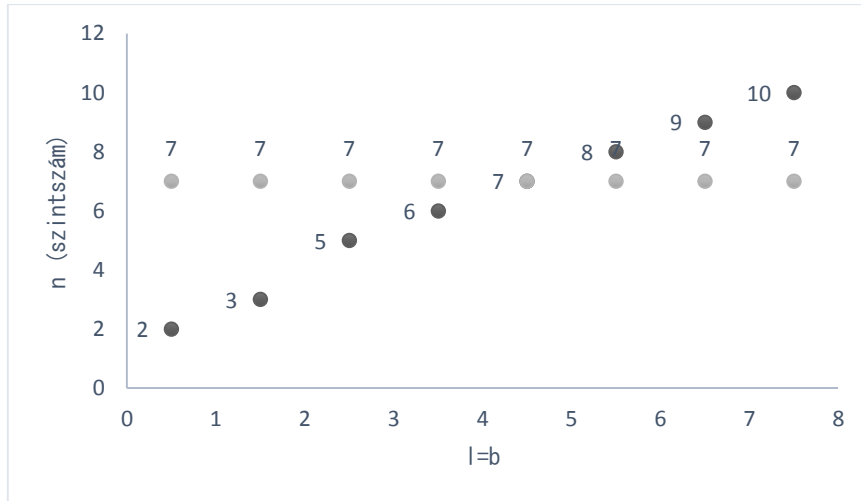
$$h = 3,0 \text{ m}$$

$$t = 0,2 \text{ m}$$

$$E = 10^7 \frac{kN}{m^2}$$

$$p_{Ed} = 20 \frac{kN}{m^2}$$

Tekintsük az alábbi diagramot (3.3. ábra), amely a meghatározott peremfeltételek mellett azt az egyes tönkremeneteli módokhoz tartozó n szintszámot ábrázolja, amelynél a kihajlás stabilitásvesztést okoz ($l=b$ függvényében):



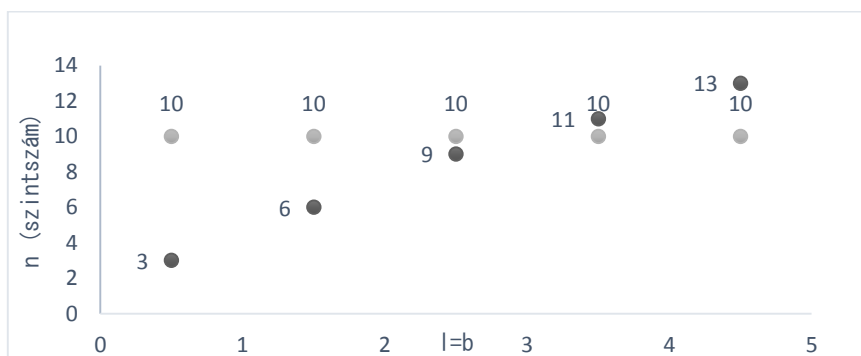
3.3. ábra: $B=L=15$

A diagramon ábrázolt pontok tendenciája a kezdeti „kilengéstől” eltekintve lineárisnak tekinthető, ez azonban az egyes értékek eloszlásának „durvaságából” adódik, ezért célszerű finomítani a pontok eloszlását, melyet a befoglaló méretek csökkentésével érhetünk el (ekkor ugyanis a szintszám növelésével kisebb Δp_{Ed} értékek adódnak). A kezdeti kilengés lényegében az $l=b=0,5$ értékpár kitüntetett szerepéből adódik, ekkor ugyanis egy rászterponthoz két merevítőfal is tartozik, amely esetében az ingaoszlopok számára felírt n_0 tényező is módosul, ahogyan arról már a 3.2. fejezet iii) pontjában szó esett (az eredeti számítással ebben az esetben már $n=1$ szintszám esetében sem felelt volna meg az épület). Érdeemes megemlíteni, hogy az $n=7$ szintszám a merevítőrendszer egyfajta optimumának tekinthető, az ehhez tartozó $l=b=4,5$ értékpárnál ugyanis a kritikus terhek eltérése olyan minimális, hogy azonos szintszám esetén okoznak tönkremenetelt (így $l=b=4,5$ érték esetében lesz leginkább „kihasznált” a szerkezet anélkül, hogy stabilitásvesztés jönne létre). Vizsgáljuk meg, hogy hogyan módosul a fenti diagram $L=B=11$ befoglaló méretek esetében (3.4. ábra):



3.4. ábra: $B=L=11$

Az egyes pontok tendenciáját tekintve exponenciális csökkenés figyelhető meg, az értékek diszkrét jellegéből adódóan azonban a pontokat nem köthetjük össze, ugyanis bizonyos $l(=b)$ értékeket a raszteres elrendezés miatt nem vehet fel a rendszer. Az előző esethez hasonlóan a diagram itt is felveszi a függvény optimumát, $l=b=3,5$ értékpárnál azonos szintszám esetén következik be tönkremenetel, így a merevítőrendszer szempontjából ekkor a legnagyobb a kihasználtság. $B=L=9$ esetében az alábbi eloszláshoz jutunk (3.5. ábra):



3.5. ábra: $B=L=9$

Az előző esetektől eltérően nincs a függvénynek optimuma (pontosabban fogalmazva a függvény optimumát a diszkrét eloszlásból adódóan nem veszi fel a diagram). A fenti diagramokat alaposabban szemügyre véve látható, hogy az épület befoglaló méreteit csökkentve arányosan nő a rendszer síkbeli kihajlással szembeni ellenállása (ami logikus, hiszen a kritikus teher független a merevítőrendszer helyzetétől, a kisebb önsúly nagyobb ellenállást eredményez), az elcsavarodó kihajlásból adódó tönkremenetel karcsúbb épületek esetében kevésbé válik mértékadóvá ($l = \frac{L}{2}, b = \frac{B}{2}$ szélső pozíciókat vizsgálva). Az egyes paraméterek változtatásából eltérő diagramok adódhatnak, a probléma komplexitásából kifolyólag azonban bonyolult lenne ezen függvények egyidejű ábrázolása (elsősorban a magas dimenziószám okán), a tendenciák azonban jellemzően azonosak a fent vázolt esetek mintájára.

4. Összefoglalás

A dolgozatban felvázolt számítási módszer viszonylag könnyen programozható, amely lehetőséget teremt egy adott épülettípus gyors stabilitásvizsgálatára, továbbá a szintszám, szintmagasság, alaprajzi méretek és merevítőfal-elrendezés függvényében való viselkedést is tanulmányozhatjuk. Megfigyelhető, hogy megfelelő merevítőfal-elrendezések esetében jellemzően a mérnöki gyakorlatban is ellenőrzött síkbeli kihajlás válik mértékadóvá, szélsőségesebb paraméterek esetében azonban az elcsavarodási kihajláshoz tartozó kritikus akár már egy (!) szintes épület esetében is mértékadó lehet. Előállhatnak olyan bemeneti paraméterek, melyek esetében a vízszintes terhekre vonatkoztatott méretezés, illetve a síkbeli kihajlás stabilitásvizsgálata alapján az építmény megfelel, az elcsavarodó kihajlás azonban tönkremenetelt okoz (ekkor szükség lehet az építés közbeni, vagy utólagos szerkezetmegerősítésre). A vizsgálatok alapján elmondható, hogy reális adatokkal jellemezhető épületek esetén az elcsavarodási tönkremenetel jellemzően 10-nél nagyobb szintszám esetén kezd problémát okozni. A módszer jól használható eszközt jelenthet a szerkezettervezés kezdeti fázisában. Továbblépési lehetőségként a modell fejleszthető, egyszerűen szimmetrikus, vagy akár általános helyzetű merevítőfalakra kiterjesztve, illetve többféle épülettípust vizsgálva, eltérő alaprajzi elrendezéssel. A vizsgálatok során a könnyebb programozhatóság érdekében számos egyszerűsítéssel éltünk (kétszeres szimmetria feltételezése, tiszta csavarási ellenállás elhanyagolása, nyírási és globális hajlítási alakváltozások elhanyagolása), melyek figyelembevételével a számítás általánosabbá tehető, pontossága növelhető.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom konzulensemnek, Vető Dánielnek (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), akinek kitartó munkája és segítsége nélkül ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

5. Irodalomjegyzék

[1] Zalka K.: *Épületek komplex statikai vizsgálata*. e-kiadás, 2015.

[2] Kollár L.: *Épületek merevítése elcsavarodó kihajlás ellen*. Magyar Építőipar, 1977, pp. 150-154.