



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

ÉPÍTÉSZMÉRNÖKI KAR

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

ELLIPSZOIDOK TÁVOLSÁG-VEZÉRELT ALAKFEJLŐDÉSÉNEK NUMERIKUS VIZSGÁLATA

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA 2018

Készítette: Csallóközi Dániel

Konzulens: Dr. Domokos Gábor



AZ EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTERIUMA ÚNKP-18-1 KÓDSZÁMÚ
ÚJ NEMZETI KIVÁLÓSÁG PROGRAMJÁNAK TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT

ABSZTRAKT

A természetben előforduló élettelen tárgyak (pl. kavicsok) alakfejlődéséről (kopásáról) szóló legrégebbi ismert leírás Arisztotelésztől származik. Az ezen leírás alapján létrehozott matematikai modell ún. sugárirányú távolság-vezérelt modell, melyről tudjuk, hogy a természetben ritkán fordul elő.

Az alakfejlődéstan (morfodinamika) azonban egy ma is élénken kutatott tudományterület. Ezen folyamatok egy lehetséges matematikai leírása az Arisztotelész modelljével rokon, párhuzamos távolság-vezérelt modell, ezen belül a merőleges affinitás.

Szemléletesen egy kavics kopása úgy képzelhető el, hogy a kavics felületén lévő pontok valamilyen szabály szerint a kavics belsejének irányába mozognak. A merőleges affinitás ilyen modell, itt ugyanis időben változatlan, a kezdeti alakzatot metsző síkra merőleges egyeneseken mozognak a test felületi pontjai a sík felé. A pontok mozgása ekkor csak az adott pont síktól való távolságának függvénye.

A geológiában az alakfejlődés leírásához használt leggyakoribb alakjellemzők közé tartoznak a test bizonyos módon meghatározott tengelyeinek arányai, illetve a test izoperimetrikus aránya, mely annak térfogata és felülete között mutat összefüggést.

Az irodalomban ([1]) háromtengelyű ellipszoid tengelyirányú merőleges affinitása esetére már bizonyították a tengelyarányok változását, de az általános irányú affinitás esetére csak sejtéseket fogalmaztak meg. Az izoperimetrikus aránnyal kapcsolatban általános esetre vonatkozó állításokat is bizonyítottak.

Dolgozatom elkészítésével céloom egyrészt a korábban bizonyított állítások illusztrálása, másrészt a sejtések vizsgálata numerikus módszerekkel, valamint az eredmények térbeli megjelenítése.

Dolgozatom elkészítéséhez felhasználtam a „Mechanikai feladatok matematikai modellezése” című szabadon választható tárgyban tanultakat, illetve a 2017. évi TDK dolgozatom anyagát.

([2])

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés.....	4
2. Modellosztályok	5
2.1 Sugaras távolság-vezérelt modellek.....	6
2.2 Párhuzamos távolság-vezérelt modellek	6
3. Morfodinamikai tételek.....	8
3.1 Tengelyarányok.....	8
3.1.1 Speciális eset.....	8
3.1.2 Általános eset.....	9
3.2 Izoperimetrikus arány.....	9
4. Numerikus számítások	10
4.1 Kezdeti alakzat definiálása, koordináta-bázisok ismertetése.....	10
4.2 Affinitás síkjának meghatározása	12
4.3 Affinitás folyamata.....	13
4.4 Tengelyarányok számítása	14
4.5 Izoperimetrikus arány számítása	18
4.6 Térbeli megjelenítés	21
4.7 A numerikus vizsgálat pontatlansága, esetleges hibák	22
5. Az eredmények összegzése	23
Ábrajegyzék	24
Köszönetnyilvánítás	25
Irodalomjegyzék.....	25
Mellékletek jegyzéke.....	25

1. BEVEZETÉS

Az élettelen testek alakfejlődéséről szóló első ismert leírás Arisztotelésztől származik. Az ezen leírás alapján létrehozott matematikai modell a természetben kevés folyamatot ír le. Léteznek azonban később megfogalmazott, más tulajdonságokkal rendelkező, más folyamatokat pontosabban leíró matematikai modellek is. Dolgozatomban ezen modellek egyikét tárgyalom.

Elsőként (a dolgozat 2. pontjában) ismertetem a testek alakfejlődésére vonatkozó matematikai modellek egy osztályának, a távolság-vezérelt modelleknek a tulajdonságait. Ezen belül két alosztályt tárgyalok. Az egyik ilyen alosztályba tartozik Arisztotelész gondolata, melyet sugaras távolság-vezérelt modellnek nevezünk. A másik csoport a párhuzamos távolság-vezérelt alosztály. Dolgozatomban a merőleges affinitás alapú modellt vizsgálom, mely az utóbbi alosztályba tartozik.

Az irodalomban ([1]) a merőleges affinitás modelljének több tulajdonságát vizsgálták analitikus módszerekkel. Az alakfejlődési folyamat leírásához bizonyos (geológiában is használatos) alakjellemzőket, illetve azok változását vizsgálták a kopás során. A 3. pontban definiálom ezeket az alakjellemzőket, és ismertetem az analitikus vizsgálatok eredményeinek egy részét, melyet kutatásom során numerikusan vizsgálok. Az egyik tárgyalt alakjellemző a test tengelyarányai, mely egy $a \geq b \geq c$ tengelyű ellipszoid esetén $0 < y_1 = c/a$, $y_2 = b/a \leq 1$. A tengelyarányokról analitikus vizsgálatok készültek speciális esetekben. A másik tárgyalt alakjellemző a test izoperimetrikus aránya, mely a test térfogata és felszíne közötti összefüggést jellemző, dimenzió nélküli mennyiség. Az izoperimetrikus arányról általános esetben fogalmaztak meg állítást. Dolgozatom elkészítésével céloom a bizonyított esetek illusztrálása, és a további általános esetek vizsgálata.

A 4. pontban ismertetem a fent említett mennyiségeket vizsgáló programok működését. Elsőként egy kiindulási alakzatot és egy azzal meghatározott viszonyban elhelyezkedő affín síkot definiálok. A kiindulási alakzat dolgozatomban minden esetben háromtengelyű ellipszoid. Ezután az affinitás folyamatát (a modell egyenletét) kódolom. Az affinitás paramétere λ (lambda). Sok különböző λ értékhez rendelt ellipszoid geometriai elemzésével közelítő eredményeket kaphatunk a test tengelyarányainak és izoperimetrikus arányának függvényeire. Ezen függvények számítása után összevetem a numerikusan kapott eredményeket a dolgozat 3. pontjában ismertett analitikus vizsgálatok eredményeivel. Ezután térben illusztrálok a folyamatot.

2. MODELLOSZTÁLYOK

A morfodinamika tudományterülete az élettelen testek alakfejlődésének matematikai leírásához bizonyos egyszerűsítéseket, feltételezéseket használ. Ilyen alapvető feltétel a testek anyagának homogenitása, tökéletesen egyenletes eloszlása (sűrűsége). Ezen feltételezés mellett sok esetben tisztán geometriai problémáról beszélhetünk.

Az alakfejlődés elemzésekor nem a testek összes térbeli pontjával, hanem csak azok felületi pontjaival (kontúrponthaival) dolgozunk. Ennek oka, hogy nincsenek olyan, a testen belül elhelyezkedő, kitüntetett pontok, melyek helyzete független lenne a test felületi pontjaitól. Például a test súlypontját meg tudjuk határozni egyértelműen, ha ismerjük a test összes felületi pontját, és tudjuk, hogy az egy véges testet határol (a vizsgált test nem a felületen kívüli, hanem a felületen belüli térrész). A morfodinamikában tehát a testeket zárt felületekkel helyettesítjük.

Egy test (például kavics) kopását a távolság-vezérelt matematikai modellekben úgy képzeljük el, hogy a test P felületi pontja egy, a testen belül elhelyezkedő O objektum (pont, sík) felé mozog valamilyen szabály szerint. Ez a szabály a kopási függvény, mellyel leírható a pont mozgásának sebessége annak minden helyzetében.

Egy folyamat kopási függvénye több, akár a folyamat során időben változó geometriai mennyiség függvénye lehet. A kopási függvény függhet például az $|OP|(t)$ távolságtól, a test felületének első deriváltjától P pontban, a test felületének görbületétől (második deriváltjától) P pontban stb.

Amikor a kopási függvény csak az $|OP|(t)$ távolság függvénye, távolság-vezérelt alakfejlődési modellről beszélünk.

2.1 SUGARAS TÁVOLSÁG-VEZÉRELT MODELLEK

A sugaras távolság-vezérelt alakfejlődési modellekben O objektum egy pont, mely minden esetben, a folyamat egészében a testen belül helyezkedik el. Ez az O pont lehet egy kitüntetett, időben állandó pont, vagy például a test súlypontja (mely a felület ismeretében egyértelműen meghatározható), mely szimmetrikus esetben szintén időben állandó, általános esetben mozog.

Az alakváltozás geometriai megkötése, hogy a test felületi P pontja minden időpillanatban az $OP(t)$ szakasz mentén, O pont felé mozog. Ha O állandó, akkor P egy egyenes mentén halad, ha O nem állandó, akkor P egy görbe mentén halad.

Arisztotelész egy sugaras távolság-vezérelt alakfejlődési modellt fogalmazott meg. Bár mai ismereteink szerint Arisztotelész modellje a természetben nem fordul elő, figyelemreméltó, hogy több, mint kétezer évvel ezelőtt egy olyan modellt fogalmazott meg, mely a kopási folyamatok több alapvető jellemzőjét tükrözi, és a modern matematika eszközeivel vizsgálható ([2], [3]).

2.2 PÁRHUZAMOS TÁVOLSÁG-VEZÉRELT MODELLEK

Abban az esetben, amikor O objektum egy időben állandó, az alakzatot metsző O sík, és a kopási függvény csak $|OP|(t)$ távolság függvénye, párhuzamos távolság-vezérelt alakfejlődési modellről beszélünk.

Legyen $z(t) = |OP|(t)$. A párhuzamos távolság-vezérelt folyamatok matematikai modellje:

$$z_t = f(z)$$

ahol z_t a z távolság idő szerinti deriváltja. E derivált fizikai jelentése a P pont z irányú sebessége.

A párhuzamos modellek speciális esete az affinitás, melyben P felületi pont egy O -val nem párhuzamos egyenes mentén mozog O felé. Az affinitás speciális esete a merőleges affinitás, melyet dolgozatomban részletesen vizsgálok. Merőleges affinitás esetén az alakzat P kontúr-pontja egy O -ra merőleges egyenes mentén mozog O sík felé.

A merőleges affinitási folyamatban bizonyos geometriai feltételek szűkítik a kopási függvények halmazát. Az affinitás olyan geometriai transzformáció, melyben egy egydimenziós, lineáris paraméterrel (például az idővel) minden állapot egyértelműen definiálható. Így lineáris távolság-vezérelt modellről beszélünk, ha a folyamat geometriáját affinitással modellezzük.

A távolság-vezérelt merőleges affinitás modellje:

$$z_t = -c * z$$

ahol z_t a z távolság idő szerinti deriváltja, c nemnegatív valós szám. Az affinitás paramétere ekkor:

$$\lambda(t_i) = \frac{z(t_i)}{z(t_0)} = 1 - \frac{c}{z(t_0)}$$

ahogy $t_0 \leq t_i$. E megfeleltetés alapján a továbbiakban a folyamat vizsgálatához és bemutatásához λ paramétert fogom használni.

Dolgozatomban a merőleges affinitásról szóló, az irodalomban ([1]) analitikus módon bizonyított tételeket és sejtéseket vizsgálom numerikusan. Ezen állítások folytonos síkbeli alakzatról, ellipsziszről, folytonos térbeli alakzatról, vagy háromtengelyű ellipszoidról szólnak. Dolgozatomban minden vizsgálatot háromtengelyű ellipszoidokon végzek.

3. MORFODINAMIKAI TÉTELEK

A merőleges affinitás modelljét dolgozatomban numerikusan vizsgálom, mely vizsgálat alapjai az [1] cikkben bizonyított állítások.

Egy alakfejlődési folyamatban a testek számszerűsíthető alakjellemzőit, mint a kopás során időben változó mennyiségeket használjuk. Ilyen mennyiségek a test tengelyarányai (3.1 fejezet), a test izoperimetrikus aránya (3.2 fejezet), és a test egyensúlyi pontjainak száma, típusa és helyzete. Ezen jellemzők segítségével matematikailag precíz állításokat fogalmazhatunk meg a vizsgált testek alakjának változásáról. Dolgozatomban a tengelyarányokat és az izoperimetrikus arányt vizsgálom, ismertetem és illusztrálom.

3.1 TENGELYARÁNYOK

Az egyik geomorfológiai alakjellemző a test tengelyeinek arányai. A geológiában használatos definíció szerint a dolgozatomban vizsgált háromtengelyű ellipszoidok esetében az ellipszoid tengelyeit ($a \geq b \geq c$) használjuk a tengelyarányok számításához. Ekkor a két számított tengelyarány $0 < y_1 = c/a$, $y_2 = b/a \leq 1$, mely alapján $y_1 \leq y_2$.

Megjegyzés: A merőleges affinitás folyamatában ha egy λ -hoz tartozó test ellipszoid (a kiindulási testről tudjuk, hogy az), akkor a test minden λ esetén ellipszoid ([4]).

3.1.1 Speciális eset

A tengelyarányok analitikus vizsgálatakor az [1] cikkben speciális esetet vizsgáltak. A folyamat kezdeti feltételei, hogy a kiindulási test háromtengelyű ellipszoid, az affinitás síkja metszi az ellipszoid súlypontját, és az ellipszoid egyik tengelye merőleges az affinitás síkjára.

(a) tétel: Háromtengelyű ellipszoid tengelyarányai $y_1 \leq y_2$. Speciális esetben y_1 kvázikonkáv függvény, míg y_2 akár több maximummal is rendelkezhet. ([1])

Ezek alapján dolgozatomban háromtengelyű ellipszoidok tengelyarányainak változását vizsgálom. Illusztrálom a speciális esetet, melyben az ellipszoid egyik tengelye merőleges az affinitás síkjára.

3.1.2 Általános eset

A fenti, speciális esetben két kikötéssel éltünk: az affinitás síkja metszi a háromtengelyű ellipszoid súlypontját, és az ellipszoid egyik tengelye merőleges a síkra.

Dolgozatomban általános esetnek nevezem azt az esetet, amikor a második feltételtől eltérünk. Olyan ellipszoidokat vizsgálok, melyeknek az affín síkkal való kölcsönös helyzetére vonatkozó egyetlen kikötés, hogy az affín sík tartalmazza az ellipszoid súlypontját. Ezekben az esetekben keresem a tengelyarány-idő függvények tulajdonságait, és összehasonlítom a speciális esetben, analitikusan bizonyított tulajdonságokkal.

3.2 IZOPERIMETRIKUS ARÁNY

További geomorfológiai alakjellemző a test izoperimetrikus aránya. Az izoperimetrikus arány összefüggést jellemez egy síkbeli alakzat területe és kerülete között, illetve egy térbeli test térfogata és felszíne között. d -dimenziós alakzat izoperimetrikus aránya (I_d):

$$I_2 = \frac{A * 4\pi}{P^2} \qquad I_3 = \frac{V * 6\sqrt{\pi}}{S^{\frac{3}{2}}}$$

ahol A a síkidom területe, P a síkidom kerülete. ahol V a test térfogata, S a test felszíne.

Az izoperimetrikus arány dimenzió nélküli arányszám, $0 < I_d \leq 1$. d -dimenzióban pontosan egy alakzat, az adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza (d -dimenziós gömb) izoperimetrikus aránya 1. Ezen tulajdonságok alapján az izoperimetrikus arány jellemzi az alakzat adott dimenziós gömbtől való eltérését.

Az [1] cikkben az izoperimetrikus arány időbeli változását részletesen vizsgálták merőleges affinitás során.

(b) tétel: Általános esetben tetszőleges dimenziójú, konvex, folytonos test izoperimetrikus aránya $I(t)$ kvázikonkáv függvény. ([1])

Dolgozatomban $I(t)$ függvényt illusztrálok háromtengelyű ellipszoidokon, általános helyzetű affín sík esetén.

4. NUMERIKUS SZÁMÍTÁSOK

Dolgozatomban a 3. pontban megjelölt numerikus vizsgálatokat saját készítésű MATLAB (R2018a verzió) programokkal végzem el. A 4.1 pontban definiálom a koptatandó test kiindulási állapotát, mely egy háromtengelyű ellipszoid. A 4.2 és 4.3 pontban bemutatom azokat a programokat, amelyekkel tetszőlegesen meghatározható az ellipszoid és az affín sík kölcsönös helyzete, és felvehetőek a test koptatott állapotainak koordinátái. A 4.4 pontban a tengelyarányokat, a 4.5 pontban az izoperimetrikus arányt számítom ki az előzőleg meghatározott koptatott állapotokban. A 4.6 pontban a folyamatot számítógépesen, három dimenzióban ábrázolom. Végül a 4.7 pontban a numerikus számítások lehetséges hibáit tárgyalom.

4.1 KEZDETI ALAKZAT DEFINIÁLÁSA, KOORDINÁTA-BÁZISOK ISMERTETÉSE

A folyamatban a $\lambda = 1$ állapothoz tartozó, $K'(1)$ háromtengelyű ellipszoidot nevezem kiindulási állapotnak. Az ezt a testet definiáló program (1. számú melléklet) paraméterei a, b, c és R , ahol a, b és c az ellipszoid tengelyei, hogy $a \geq b \geq c$; R pedig az alakzat felbontása, oly módon, hogy $K'(1)$ felületén létrehozott összes pont száma $(R + 1)^2$. $K'(1)$ testet gömbi koordináta rendszerben definiálom, egyenletes ϕ (phi) és θ (theta) szögekülönbségekkel. $R + 1$ különböző ϕ , és $R + 1$ különböző θ érték kombinációjához rendelek r távolságokat, hogy az a, b, c tengelyű ellipszoid pontjai:

$$r(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \phi \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}}$$

A dolgozatban bemutatok olyan programokat, melyekben a testeknek merőleges illetve gömbi koordinátáit használom a számítások elvégzéséhez. Az átalakítás egyenletei gömbi koordináta-rendszerből merőleges koordináta-rendszerbe (2. számú melléklet):

$$x = r * \sin \theta * \cos \phi$$

$$y = r * \sin \theta * \sin \phi$$

$$z = r * \cos \theta$$

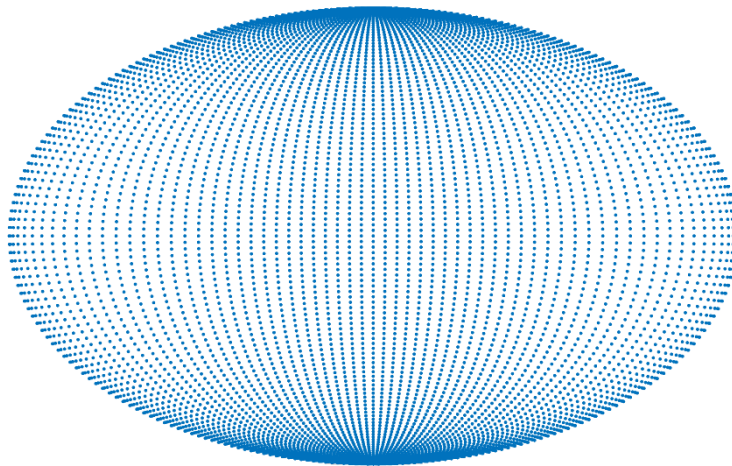
Merőleges koordináta-rendszerből gömbi koordináta-rendszerbe (5. számú melléklet):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r}$$

Az átalakítások egyértelműek, numerikusan tetszőleges pontossággal elvégezhetőek.



*4.1.1. ábra
Háromtengelyű ellipszoid gömbi koordináta rendszerben
egyenletes ϕ és θ szögekülönbségekkel definiálva,
ortogonális nézet*

4.2 AFFINITÁS SÍKJÁNAK MEGHATÁROZÁSA

A 3.1.2 pontban bemutatott módon az ellipszoid és az affin sík kölcsönös helyzetére szóló egyetlen kikötés, hogy az affin sík tartalmazza az ellipszoid súlypontját. A sík és a test viszonya tehát két paraméterrel (egy térbeli szöggel) megadható.

Az ezt a szöveget definiáló program (3. számú melléklet) paraméterei a, b, c, R, α (alfa) és β (béta). a, b, c és R a már ismertetett mennyiségeket jelölik. α és β a $K'(1)$ pozitív x irányú tengelypontja (tengelyének végpontja) és az affin sík által bezárt térbeli szög két paramétere. Dolgozatomban az affin sík az xy sík, az ellipszoidot ehhez képest elforgatom, így az affinitás modellezésekor csak a test pontjainak z koordinátája változik (4.2.1. ábra).

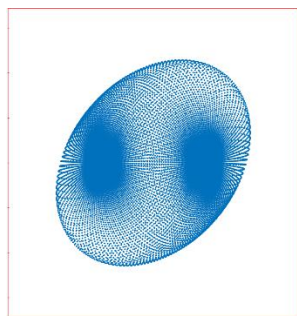
Az ellipszoidot z tengely körül pozitív irányba α szöggel, majd y tengely körül pozitív irányba β szöggel forgatom. Ennek a lineáris transzformációnak a mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha * \cos \beta & -\sin \alpha * \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha * \sin \beta & -\sin \alpha * \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Ekkor:

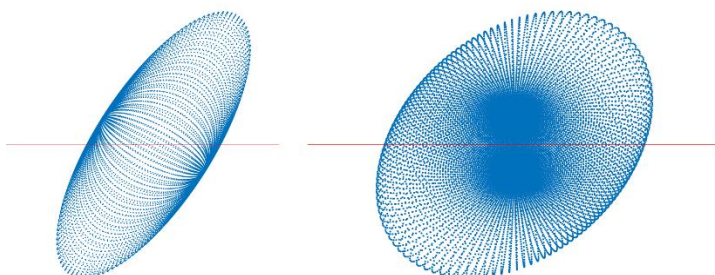
$$\underline{P} = \underline{\underline{A}} * \underline{P}'$$

ahol \underline{P}' az eredeti $K'(1)$ ellipszoid pontjának helyvektora, \underline{P} az elforgatott $K(1)$ ellipszoid pontjának helyvektora, hogy P pont P' elforgatott képe.



4.2.1. ábra

Az affín síkhoz képest $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ szögekkel elforgatott háromtengelyű ellipszoid ortogonális vetületei.



4.3 AFFINITÁS FOLYAMATA

Az időben változó alakjellemzők vizsgálatához a test kopásának folyamatában véges sok koptatott állapotot veszek fel. Minden állapothoz egy λ érték rendelhető egyértelműen. Koptatott állapotnak nevezem a $\lambda \neq 1$ állapotokat.

A később bemutatandó számítások eredménygrafikonjai jellemzően $\lambda = 1 \pm 1$ nagyságrendű paramétereknél tartalmaznak nem monoton tulajdonságú szakaszokat, ezért a vizsgálatot a $0 \leq \lambda \leq 10$ szakaszon végzem el, és λ -t egy logaritmikus skálán osztom el, melynek sűrűbb oldala a 0 értékhez közelebbi. A folyamatot modellező program (4. számú melléklet) paraméterei $a, b, c, R, \alpha, \beta$ és T . Az új paraméter T a felvett koptatott állapotok számát jelöli.

$K(1)$ elforgatott kiindulási ellipszoid $P(1)$ pontjának $P(\lambda)$ affín képeinek koordinátái merőleges koordináta-rendszerben:

$$x_{P(\lambda)} = x_{P(1)}$$

$$y_{P(\lambda)} = y_{P(1)}$$

$$z_{P(\lambda)} = \lambda * z_{P(1)}$$

Ezzel meghatároztam a kiindulási alakzat T darab affín képének, egyenként $(R + 1)^2$ pontjának koordinátáit.

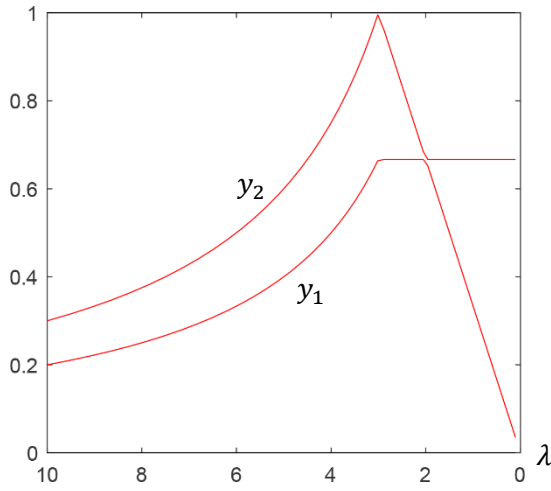
4.4 TENGELYARÁNYOK SZÁMÍTÁSA

A dolgozat 3.1 pontjában definiált tengelyarányokat az összes koptatott állapotban kiszámítva $y_1(\lambda)$ és $y_2(\lambda)$ függvényeket kapjuk, mely függvények közelítik $K(\lambda)$ tengelyarányainak időbeli változását a kopás során. Az ezeket a függvényeket számító program (6. számú melléklet) paraméterei $a, b, c, R, \alpha, \beta$ és T , a 4.3 pontban bemutatott programmal megegyező.

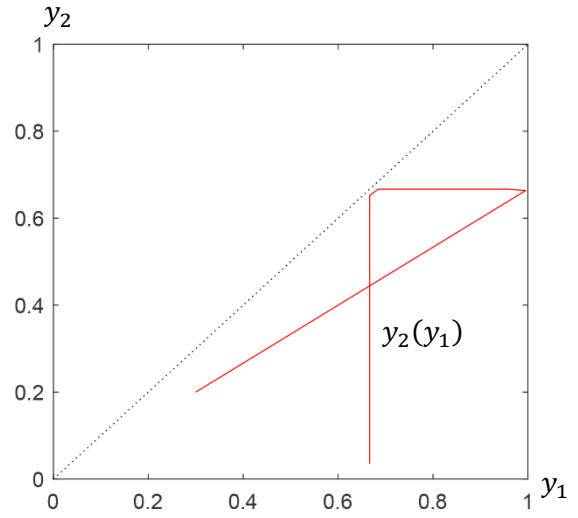
A számítás során felhasználom, hogy az affinitás lineáris transzformáció, ezért a folyamat során $K(\lambda)$ minden λ esetén ellipszoid ([4]). Ez alapján $a(\lambda)$ tengely $K(\lambda)$ bármely két pontja között mérhető legnagyobb távolság, $c(\lambda)$ tengely $K(\lambda)$ bármely két pontja között mérhető legkisebb távolság. Legyen $P_{a(\lambda)}$ $K(\lambda)$ azon pontja, mely $\frac{a(\lambda)}{2}$ távolságra van a test súlypontjától, és z koordinátája pozitív. Hasonlóan $P_{c(\lambda)}$ $K(\lambda)$ azon pontja, mely $\frac{c(\lambda)}{2}$ távolságra van a súlyponttól, és z koordinátája pozitív. $b(\lambda)$ olyan irányba mutat, mely merőleges mind $a(\lambda)$ -ra, mind $c(\lambda)$ -ra. A numerikus számítás pontatlanságából adódóan általános esetben nem találunk olyan $P_{b(\lambda)}$ pontot (a fentiekhez hasonlóan definiálva), melyre $b(\lambda)$ pontosan ilyen irányba mutat, ezért az ehhez legközelebb eső pontot keressük. Ehhez definiálok az ideális irány egység hosszú vektort, mely a $P_{a(\lambda)} \times P_{c(\lambda)}$ vektoriális szorzat irányába mutató egységvektor. Ezt kivonom $K(\lambda)$ összes definiált felületi pontjának egység hosszúra normált helyvektorából. A legkisebb különbséghez tartozó felületi pont lesz a legközelebb az ideális irányhoz. Ezzel definiáltam $K(\lambda)$ mindhárom tengelyét.

Ezek alapján a tengelyarányok: $y_1(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{a(\lambda)}$ és $y_2(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}$.

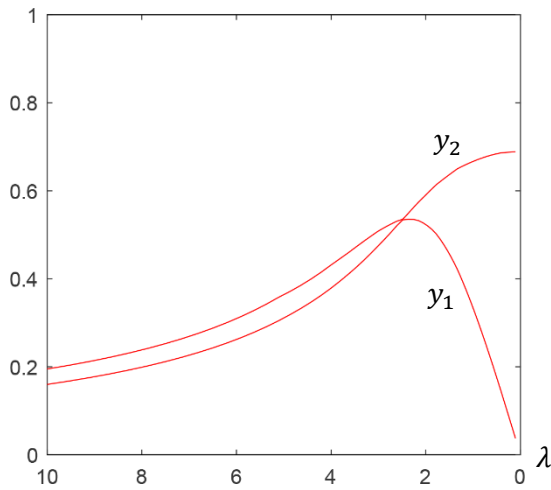
Az alábbi grafikonokon (4.4.1. – 4.4.6. ábrák) ábrázolom $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ kiindulási tengelyű $K(\lambda)$ test néhány $y_1(\lambda)$ és $y_2(\lambda)$ függvényét a bal oldalon, illetve a λ paraméterű $y_2(y_1)$ görbét a jobb oldalon.



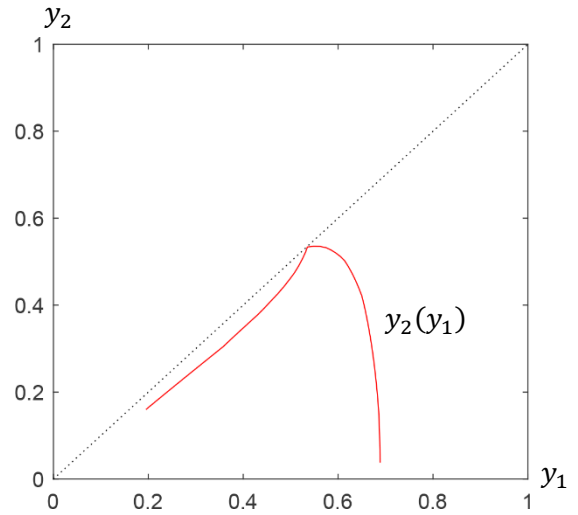
4.4.1. ábra
 $y_1(\lambda), y_2(\lambda)$ függvények, $\alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$



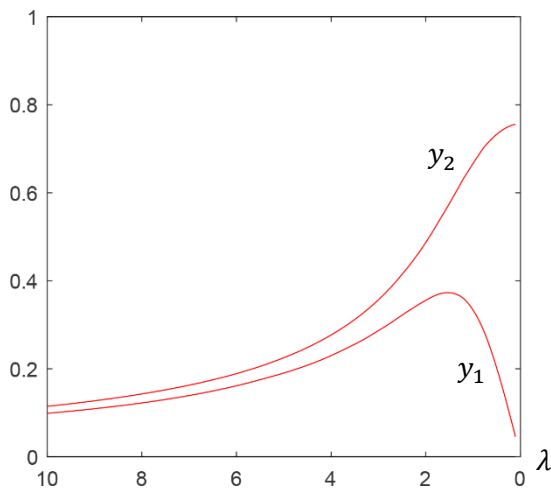
4.4.2. ábra
 $y_2(y_1)$ görbe, $\alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$



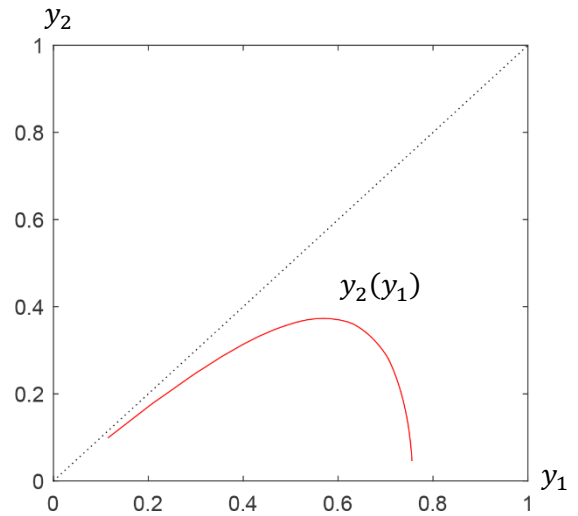
4.4.3. ábra
 $y_1(\lambda), y_2(\lambda)$ függvények, $\alpha = 0^\circ, \beta = 15^\circ$



4.4.4. ábra
 $y_2(y_1)$ görbe, $\alpha = 0^\circ, \beta = 15^\circ$

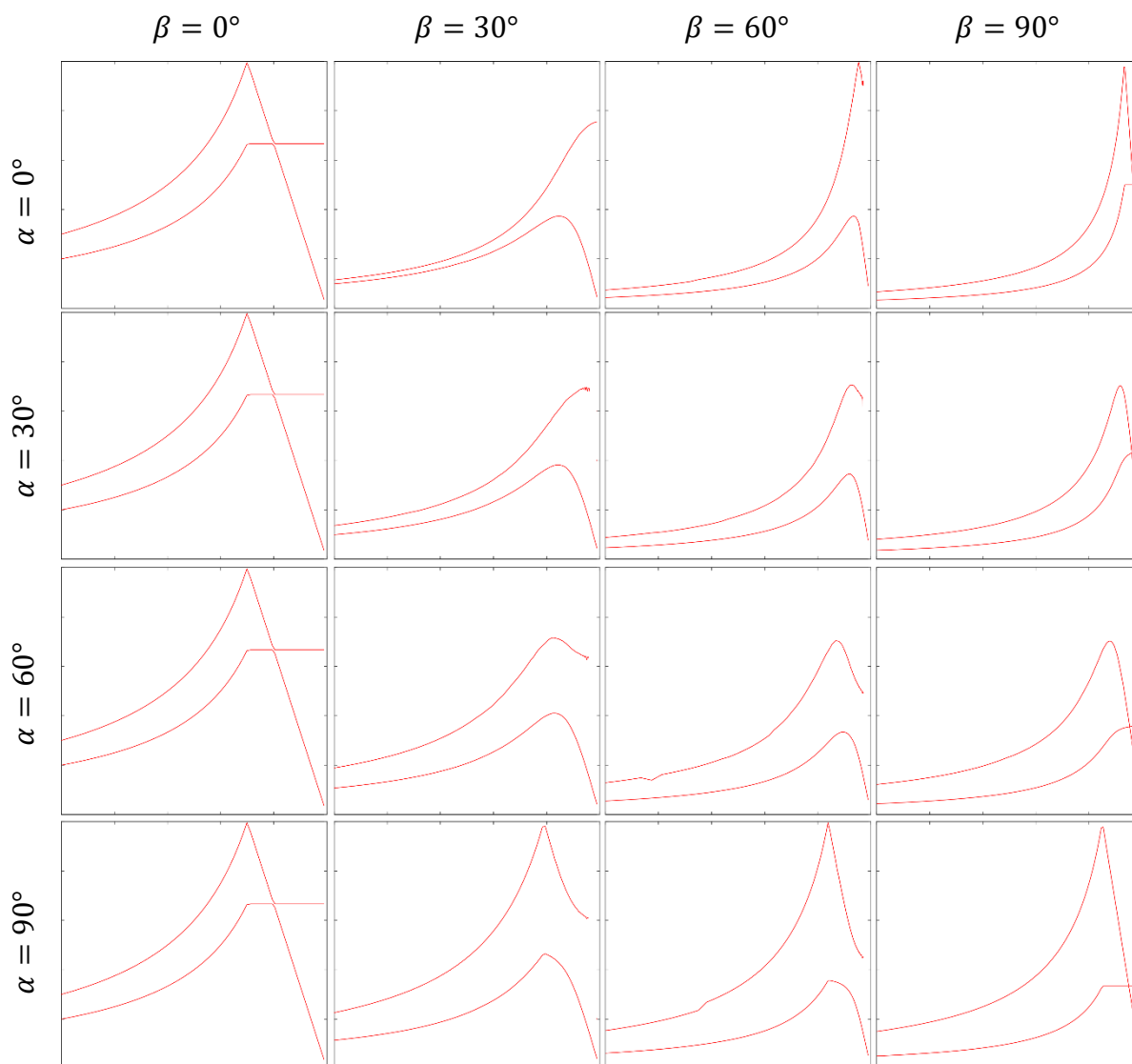


4.4.5. ábra
 $y_1(\lambda), y_2(\lambda)$ függvények, $\alpha = 0^\circ, \beta = 30^\circ$



4.4.6. ábra
 $y_2(y_1)$ görbe, $\alpha = 0^\circ, \beta = 30^\circ$

Az alábbi grafikonokon (4.4.7. ábrásor) $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ kiindulási tengelyű $K(\lambda)$ test $y_1(\lambda)$ és $y_2(\lambda)$ függvényeinek jellegét mutatom be általános esetben. Az alábbi ábrák feliratozása a fentebb bemutatott (4.4.1., 4.4.3., 4.4.5.) ábrákéval azonos, a feliratokat az átláthatóság kedvéért ebben az esetben eltávolítottam. Részletesebben kótázott és feliratozott ábrásor a 10. számú mellékletben megtekinthető.

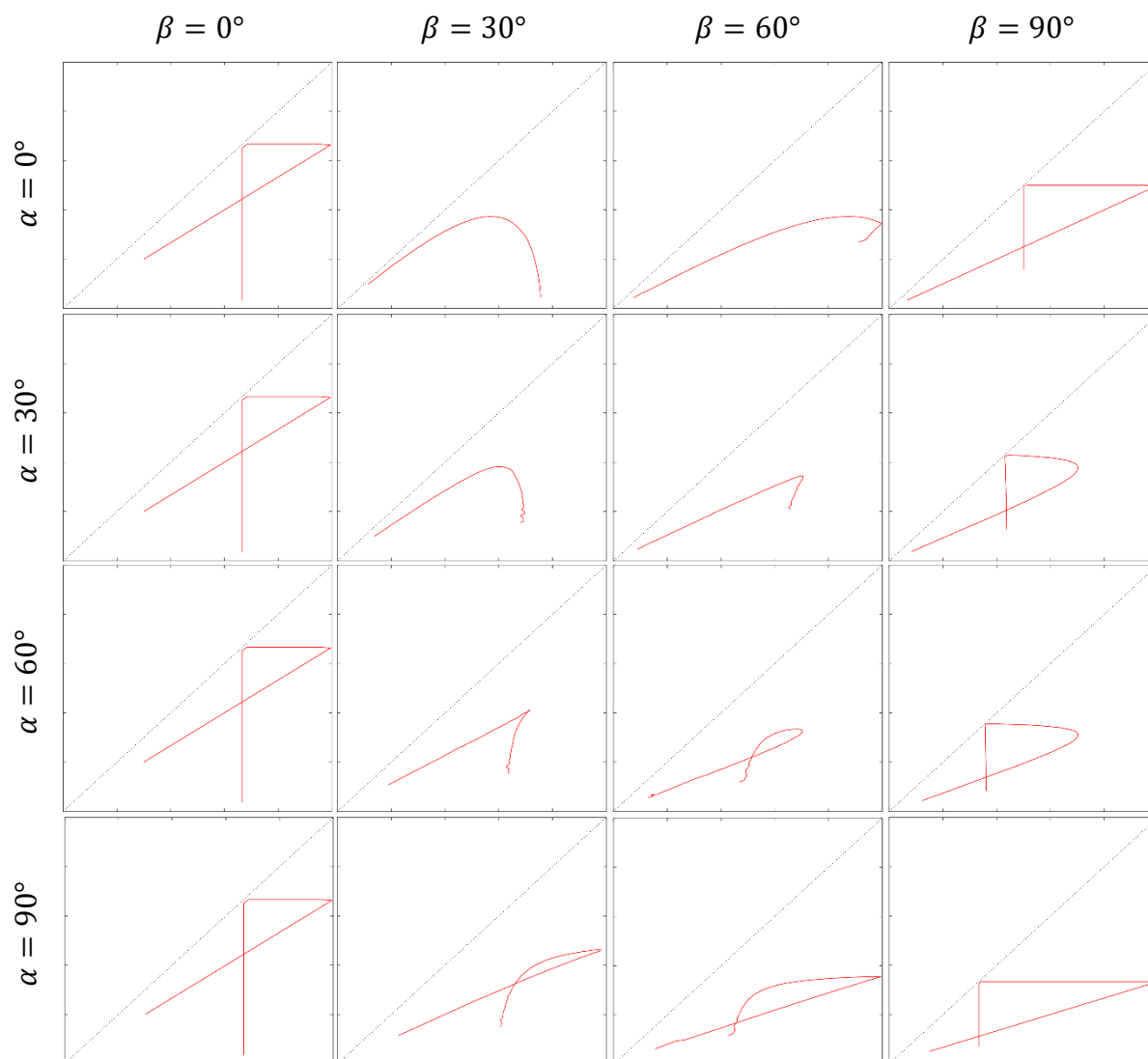


4.4.7. ábrásor

α, β szögekkel elforgatott, $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ tengelyű ellipszoid $y_1(\lambda)$, $y_2(\lambda)$ függvényei

Látható, hogy speciális esetben ($\beta = 0^\circ$) (a) tétel minden numerikusan vizsgált esettel egybevág. Általános esetben szintén elmondható, hogy a számításhoz használt összes α és β értékre y_1 kvázikonkáv függvény, míg y_2 esetenként több maximummal is rendelkezik.

Az alábbi grafikonokon (4.4.8. ábrásor) $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ kiindulási tengelyű $K(\lambda)$ test λ paraméterű $y_2(y_1)$ görbéinek jellegét mutatom be általános esetben. Az alábbi ábrák feliratozása a fentebb bemutatott (4.4.2., 4.4.4., 4.4.6.) ábrákéval azonos, a feliratokat az átláthatóság kedvéért ebben az esetben eltávolítottam. Részletesebben kótázott és feliratozott ábrásor a 11. számú mellékletben megtekinthető.



4.4.8. ábrásor

α, β szögekkel elforgatott, $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ tengelyű ellipszoid $y_2(y_1)$ görbéi

Ezen az ábrásoron (4.4.8.) y_2 tengelyarányt ábrázolom y_1 függvényében. Mikor a görbe érinti a pontozott vonallal jelölt $y_2(y_1) = y_2$ egyenest, $b(\lambda) = c(\lambda)$, tehát $K(\lambda)$ forgásellipszoid.

4.5 IZOPERIMETRIKUS ARÁNY SZÁMÍTÁSA

A dolgozat 3.2 pontjában definiált izoperimetrikus arányt az összes koptatott állapotban kiszámítva $I(\lambda)$ függvényt kapjuk, mely közelíti $K(\lambda)$ izoperimetrikus arányának időbeli változását a kopás során. Az ezt a függvényt számító program (7. számú melléklet) paraméterei $a, b, c, R, \alpha, \beta$ és T , a 4.3 pontban bemutatott programmal megegyező.

$K(1)$ felületén definiált pontok egy, a felületre feszített derékszögű négyszögháló rácspontjaiban helyezkednek el (gömbi koordináta-rendszerben ϕ és θ szerint egyenletesen elosztva). Az affinitás során ez a rendszer általános $K(\lambda)$ esetben csak derékszögű tulajdonságát veszti el, a négyszögháló minden $\lambda \neq 0$ állapotban fellelhető.

A felületi négyszögek egy-egy átlójának megrajzolásával háromszögekre bontottam a felületet. $K(\lambda)$ felszíne közelíthető ezen háromszögek a területösszegével:

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sqrt{(s_i - l_{1i})(s_i - l_{2i})(s_i - l_{3i})}$$

ahol $S(\lambda)$ a test felszínének közelítő értéke; $N = (R + 1)^2$ (a felszínen definiált pontok száma), ha R a test felbontása (4.1 fejezetben definiálva); l_{1i}, l_{2i}, l_{3i} az i indexű háromszög oldalai; s_i az i indexű háromszög félkerülete.

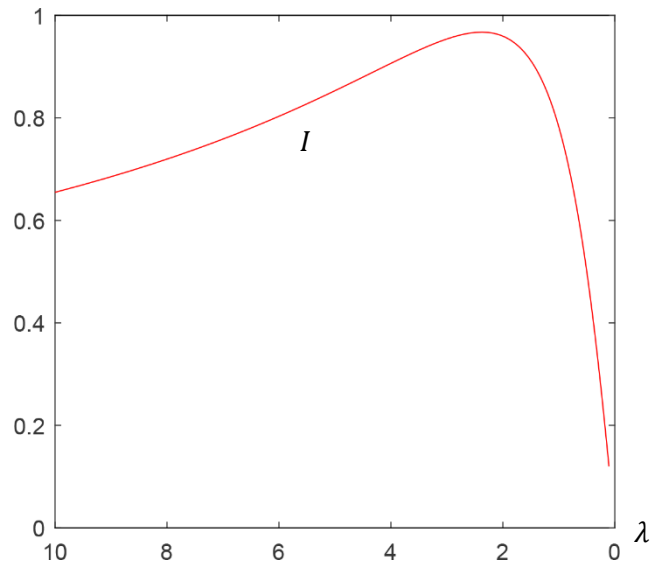
A felületi háromszögekhez tetraédereket rendelek, melyek egyik lapja a felületi háromszög, negyedik csúcsa az origó. $K(\lambda)$ térfogata közelíthető ezen tetraéderek térfogatösszegével:

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{6} * \left| \det \begin{bmatrix} \underline{m}_{1i} \\ \underline{m}_{2i} \\ \underline{m}_{3i} \end{bmatrix} \right|$$

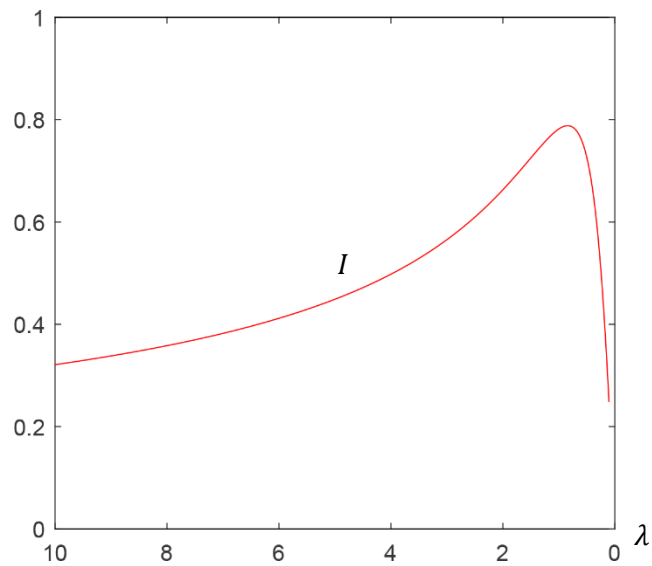
ahol $V(\lambda)$ a test térfogatának közelítő értéke; $N = (R + 1)^2$ (a felszínen definiált pontok száma), ha R a test felbontása (4.1 fejezetben definiálva); $\underline{m}_{1i}, \underline{m}_{2i}, \underline{m}_{3i}$ az i indexű tetraéder nem nulla csúcsainak helyvektorai. Ekkor $K(\lambda)$ izoperimetrikus aránya:

$$I(\lambda) = \frac{V(\lambda) * 6\sqrt{\pi}}{S(\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

Az alábbi grafikonokon (4.5.1., 4.5.2. ábrák) ábrázolom $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ kiindulási tengelyű $K(\lambda)$ test néhány $I(\lambda)$ függvényét. 4.5.1 ábra a speciális, míg 4.5.2 ábra egy általános esetet mutat be.

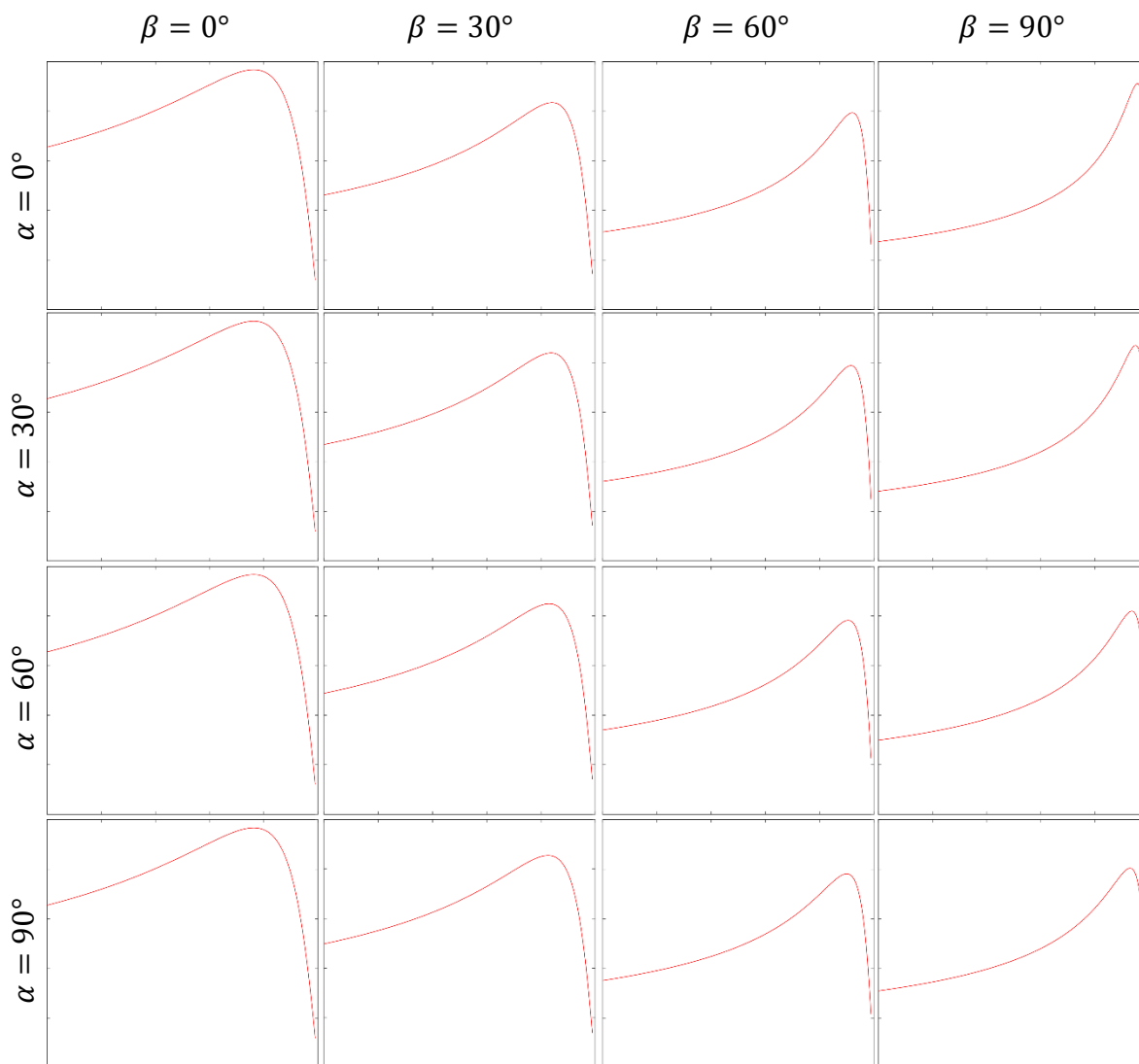


4.5.1. ábra
 $I(\lambda)$ függvények, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$



4.5.2. ábra
 $I(\lambda)$ függvények, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$

Az alábbi grafikonokon (4.5.3. ábrásor) $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ kiindulási tengelyű $K(\lambda)$ test $I(\lambda)$ függvényeinek jellegét mutatom be általános esetben. Az alábbi ábrák feliratozása a fentebb bemutatott (4.5.1., 4.5.2.) ábrákéval azonos, a feliratokat az átláthatóság kedvéért ebben az esetben eltávolítottam. Részletesebben kótázott és feliratozott ábrásor a 12. számú mellékletben megtekinthető.



4.5.3. ábrásor

α, β szögekkel elforgatott, $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ tengelyű ellipszoid $I(\lambda)$ függvényei

Látható, hogy $I(\lambda)$ a számításhoz használt összes α és β értékre kvázikonkáv függvény. A numerikus vizsgálat egybevág (b) tétellel.

4.6 TÉRBELI MEGJELENÍTÉS

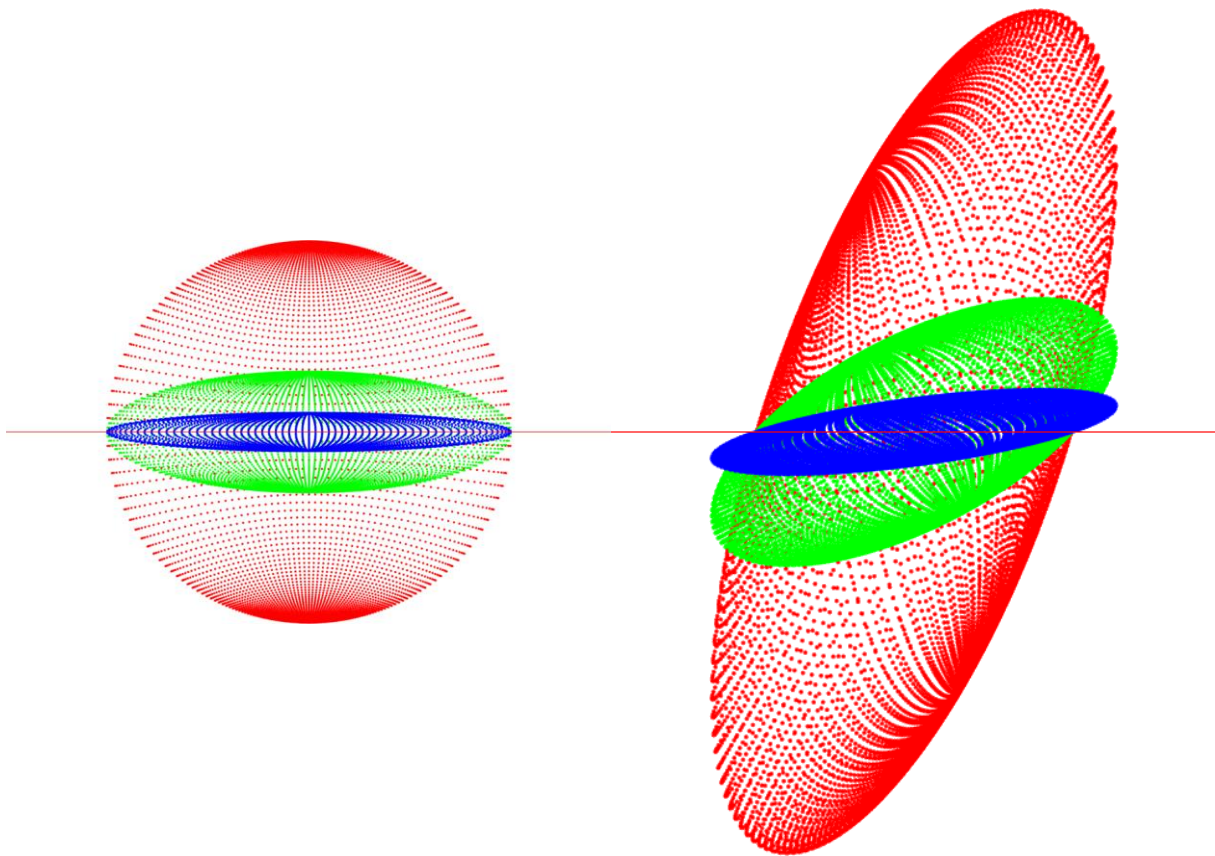
A folyamat háromdimenziós számítógépes illusztrálásához (8. számú melléklet) az átláthatóság érdekében $K(\lambda)$ három állapotát jelenítem meg egy ábrán. A megjelenített állapotok paramétereit:

$$\lambda_1 = 3,1632 = 10^{0,5}$$

$$\lambda_2 = 1 = 10^0$$

$$\lambda_3 = 0,3162 = 10^{-0,5}$$

Az alábbi ábrákon (4.6.1., 4.6.2. ábrák) $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ tengelyű $K(1)$ ellipszoid néhány merőleges affinitásának folyamatát illusztrálom λ_1 (piros), λ_2 (zöld) és λ_3 (kék) állapotokban, $R = 128$ felbontás mellett (a testeknek kb. 16 ezer pontjával).



4.6.1. ábra

$\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$ szögekkel elforgatott
 $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ ellipszoid merőleges affinitása, a testeknek kb. 16 ezer pontját ábrázolva, ortogonális nézet

4.6.2. ábra

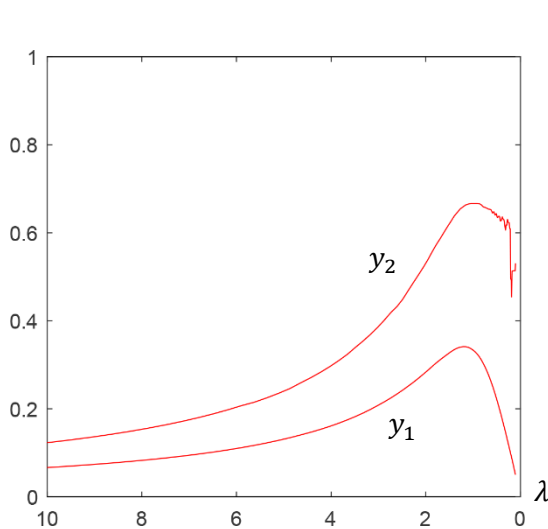
$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ szögekkel elforgatott
 $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ ellipszoid merőleges affinitása, a testeknek kb. 16 ezer pontját ábrázolva, ortogonális nézet

4.7 A NUMERIKUS VIZSGÁLAT PONTATLANSÁGA, ESETLEGES HIBÁK

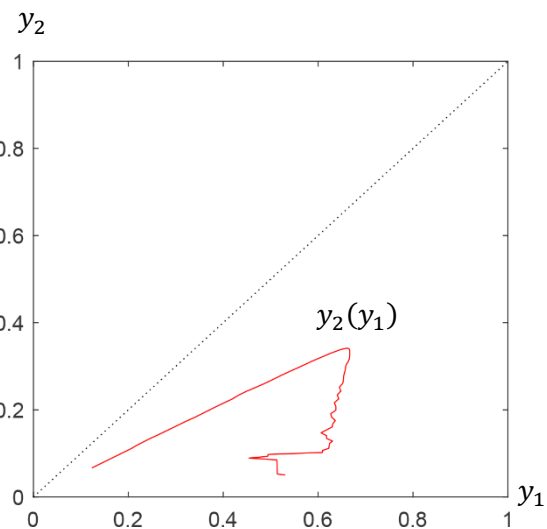
Dolgozatom részét képezik a 4.4 és 4.5 pontban megjelölt, részletesen diszkutált, feliratozott és kótázott ábrások, melyek (10., 11., 12. számú) mellékletként szerepelnek. Ezeket az ábrásokat saját készítésű MATLAB program (9. számú melléklet) segítségével állítottam elő, melylyel a folyamatot vizsgáló programok által készített ábrákat automatizálva elmentettem.

A 10. és 11. számú mellékletek tartalmaznak olyan ábrákat, melyeknek $\lambda = 0$ körüli értékei a grafikonok többi részének látszólagos folytonosságát nem tartják (4.7.1., 4.7.2. ábrák). Ennek okának azt feltételezem, hogy – numerikus vizsgálat lévén – a testek véges számú pontjával dolgozom. A $\lambda = 1$ kiindulási testen valamilyen rendszer szerint definiált pontok közti távolságok nagyságrendileg azonosak, ám ezek a távolságok az elfajuló esetek közelében ($\lambda = 0$, $\lambda = \infty$) több nagyságrenddel is eltérhetnek. Az általam írt programok a tengelyárnyok esetében az ideális (analitikusan definiált) irányokhoz legközelebb eső pontokat választják a számítások elvégzéséhez, és az elfajuló esetekben ezek a pontok viszonylag távol esnek az ideális helyzetüktől.

A dolgozatomban közölt eredmények ennek a hibaforrásnak a figyelembevételével igazak.



4.7.1. ábra
 $y_1(\lambda)$, $y_2(\lambda)$ függvények, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 a függvény elveszti látszólagos folytonosságát
 $\lambda = 0$ közelében



4.7.2. ábra
 $y_2(y_1)$ görbe, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 a görbe elveszti látszólagos folytonosságát
 $\lambda = 0$ közelében

5. AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEGZÉSE

Dolgozatomban távolság-vezérelt alakfejlődési modellek, ezen belül a merőleges affinitás folyamatát vizsgálom numerikus módszerekkel ellipszoidokon. A vizsgálatok alapjaként az [1] cikkben bizonyított tételek, illetve megfogalmazott sejtések szolgálnak.

Elsőként (a dolgozat 2. pontjában) ismertetem az alakfejlődést leíró távolság-vezérelt modelleket. Ezen modellek szemléletesen egy test (pl. kavics) felületén lévő pontoknak a test belseje felé tartó mozgásának szabályát írják le. Egy bizonyos modellosztály, a párhuzamos távolság-vezérelt modellek tulajdonsága, hogy ekkor a test felületi pontjai egy sík felé mozognak egy egyenes mentén. A merőleges affinitás modelljében további feltétel, hogy a pontok által leírt egyenes merőleges az affinitás síkjára. Az affinitás lineáris transzformáció, a folyamat egyenlete: $z_t = -c * z$.

A dolgozat 3. pontjában ismertetem a geomorfológiában használatos alakjellemzőket, melyek olyan számszerűsíthető tulajdonságai egy szabálytalan testnek, melyeket matematikai pontossággal leírhatunk és nyomon követhetünk a kopási folyamatban. Ilyen alakjellemzők a test tengelyarányai, illetve izoperimetrikus aránya. Továbbá ismertetem azokat a tételeket, melyeket az [1] cikkben kutatók analitikus eszközökkel bizonyítottak, illetve a sejtéseket, melyeket megfogalmaztak.

A dolgozat 4. pontjában ismertetem a kutatás részeként megírt MATLAB programok működését, és a numerikus vizsgálat eredményeit. Speciális esetben, mikor az ellipszoid egyik tengelye merőleges az affinitás síkjára, a kisebbik tengelyarányfüggvény kvázikonkávnak adódik, a nagyobbik tengelyarányfüggvény akár több maximummal is rendelkezhet mind (az [1] cikkben bizonyított) analitikus vizsgálatok, mind (a dolgozatomban elvégzett) numerikus vizsgálatok alapján. Általános esetben a speciális esetre vonatkozó állítás a numerikusan végzett összes vizsgálat esetében igaznak bizonyult. Az izoperimetrikus arányra vonatkozó tétel, miszerint általános esetben e függvény kvázikonkáv, szintén igaznak mutatkozik az összes numerikusan vizsgált esetben. Végül a folyamatot három dimenzióban számítógépesen modellezem, az eredményekről vetületi ábrákat mutatok be, és az eltérések lehetséges okát tárgyalom.

A kutatásom során elkészített programok, illetve az általuk kapott eredmények megbízhatóságát alátámasztják az analitikus vizsgálatokkal egybevető eredmények. Reményeim szerint az általános esetek numerikus eredményei jövőbeli analitikus vizsgálatok alapjául szolgálhatnak.

ÁBRAJEGYZÉK

A dolgozatomban szereplő valamennyi ábra saját készítésű. Elkészítésükhöz a mellékelt MATLAB (R2018a verzió) programozású, saját készítésű programokat használtam (Mellékletek jegyzéke).

Ábra	Program parancs (paraméterek)
<i>4.1.1. ábra:</i>	<code>m2_std(3,2,2,128)</code>
<i>4.2.1. ábra:</i>	<code>m3_rot(3,2,1,128,30,60)</code>
<i>4.4.1. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64, 0, 0,96)</code>
<i>4.4.2. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64, 0, 0,96)</code>
<i>4.4.3. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64, 0,15,96)</code>
<i>4.4.4. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64, 0,15,96)</code>
<i>4.4.5. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64, 0,30,96)</code>
<i>4.4.6. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64, 0,30,96)</code>
<i>4.4.7. ábrasor:</i>	<code>m9_sav(3,2,1, 64,96, 1)</code>
<i>4.4.8. ábrasor:</i>	<code>m9_sav(3,2,1, 64,96, 1)</code>
<i>4.5.1. ábra:</i>	<code>m7_ipr(3,2,1, 64, 0, 0,96)</code>
<i>4.5.2. ábra:</i>	<code>m7_ipr(3,2,1, 64,30,60,96)</code>
<i>4.5.3. ábrasor:</i>	<code>m9_sav(3,2,1, 64,96, 2)</code>
<i>4.6.1. ábra:</i>	<code>m8_vis(3,2,1,128, 0, 0, 12)</code>
<i>4.6.2. ábra:</i>	<code>m8_vis(3,2,1,128,60,30, 12)</code>
<i>4.7.1. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64,45,45,96)</code>
<i>4.7.2. ábra:</i>	<code>m6_arc(3,2,1, 64,45,45,96)</code>
10. számú melléklet:	<code>m9_sav(3,2,1, 64,96, 1)</code>
11. számú melléklet:	<code>m9_sav(3,2,1, 64,96, 1)</code>
12. számú melléklet:	<code>m9_sav(3,2,1, 64,96, 2)</code>

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton fejezem ki köszönetemet konzulensemnek, Dr. Domokos Gábornak a dolgozat elkészítése során nyújtott folyamatos segítségéért és támogatásáért.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Domokos, G. & Lángi, Z., The Evolution of Geological Shape Descriptors Under Distance Driven Flows, Math Geosci (2018) 50: 337.
<https://doi.org/10.1007/s11004-017-9723-9>
- [2] Csallóközi D., Távolság-vezérelt alakfejlődési modellek vizsgálata és megjelenítése, BME ÉPK Tudományos Diákköri Konferencia 2017.
<http://tdk.bme.hu/EPK/DownloadPaper/Tavolsagvezerelt-alakfejlodesi-modellek>
- [3] A Mechanikai feladatok matematikai modellezése című szabadon választható tárgyban tanultak alapján (BME ÉPK Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék)
- [4] Konzulensem, Dr. Domokos Gábor szóbeli közlése alapján

MELLÉKLETEK JEGYZÉKE

A dolgozat mellékletei saját készítésű, .m kiterjesztésű fájlok, melyek dolgozatomban szöveges mellékletként szerepelnek. További mellékelt képek ezen programok eredményábrái.

1. számú melléklet:	m1_ini.m	10. számú melléklet:	képfájl
2. számú melléklet:	m2_std.m	11. számú melléklet:	képfájl
3. számú melléklet:	m3_rot.m	12. számú melléklet:	képfájl
4. számú melléklet:	m4_aff.m		
5. számú melléklet:	m5_dts.m		
6. számú melléklet:	m6_arc.m		
7. számú melléklet:	m7_ipr.m		
8. számú melléklet:	m8_vis.m		
9. számú melléklet:	m9_sav.m		

```

% KIINDULASI ALAKZAT 3D

function [sph]=m1_ini(a,b,c,R)

phi0=0;
tth0=0;
dphi=2*pi/R;
dtth= pi/R;
n=2;

% PHI ES THT EGYENLETES FELOSZTASA, R ERTEKEK HOZZARENDELESE

phi=zeros(1,R+1);
tth=zeros(1,R+1);
r=zeros(R+1,R+1);

for i=1:R+1
    for j=1:R+1
        phi(i)=phi0+(i-1)*dphi;
        tth(j)=tth0+(j-1)*dtth;

r(i,j)=1/(nthroot(((cos(phi(i)))^n*sin(tth(j)))^n/a^n)+(sin(phi(i))^n*sin(tth
(j))^n/b^n)+(cos(tth(j))^n/c^n)),n));
        end
    end

% ADATOK SOROKBA RENDEZESE

r_row=zeros(1,(R+1)^2);
phi_row=zeros(1,(R+1)^2);
phi=repmat(phi,[R+1,1]);

for i=1:R+1
    for j=1:R+1
        r_row(1,((i-1)*(R+1)+j))=r(i,j);
    end
end

for i=1:R+1
    for j=1:R+1
        phi_row(1,(i+(j-1)*(R+1)))=phi(i,j);
    end
end

tth_row=repmat(tth,[1,R+1]);

sph=[r_row;phi_row;tth_row];

%plot3(phi_row,tth_row,r_row,'r.')

end

```

```
% KONVERTALAS GOMBI --> DESCARTES 3D

function [des]=m2_std(a,b,c,R)

[sph]=m1_ini(a,b,c,R);

    r=sph(1,:);
    phi=sph(2,:);
    tht=sph(3,:);

x=zeros(1,max(size(r)));
y=zeros(1,max(size(r)));
z=zeros(1,max(size(r)));

for i=1:(R+1)^2
    x(i)=r(i)*sin(tht(i))*cos(phi(i));
    y(i)=r(i)*sin(tht(i))*sin(phi(i));
    z(i)=r(i)*cos(tht(i));
end

des=[x;y;z];

plot3(des(1,:),des(2,:),des(3,:),'.')
view([0,0])

end
```

```

% SULYPONTI SIK FELVETELE 3D

function [desrot]=m3_rot(a,b,c,R,alfa,beta)

[des]=m2_std(a,b,c,R);

% FORGATAS LINEARIS TRANSZFORMACIO

alf=(alfa/360)*2*pi;
bet=(beta/360)*2*pi;

% lekepezei matrix
lm=[cos(alf)*cos(bet), -sin(alf)*cos(bet), -sin(bet);
    sin(alf)           , cos(alf)           , 0       ;
    cos(alf)*sin(bet), -sin(alf)*sin(bet),  cos(bet)];

desrot=zeros(3,(R+1)^2);

for i=1:(R+1)^2
    desrot(:,i)=lm*des(:,i);
end

desrot=round(desrot,8);

% GRAFIKON

axxmin=1.5*min(min(desrot(1,:)));
axxmax=1.5*max(max(desrot(1,:)));
axymin=1.5*min(min(desrot(2,:)));
axymax=1.5*max(max(desrot(2,:)));

axx=[axxmin,axxmin,axxmax,axxmax,axxmin];
axy=[axymin,axymax,axymax,axymin,axymin];
axz=zeros(1,5);

figure (1)
plot3(axx,axy,axz,'r',desrot(1,:),desrot(2,:),desrot(3,:),'.')
view([0,0])
title1=sprintf('Elölnézet \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title1)

figure (2)
plot3(axx,axy,axz,'r',desrot(1,:),desrot(2,:),desrot(3,:),'.')
view([90,0])
title2=sprintf('Oldalnézet \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title2)

figure (3)
plot3(axx,axy,axz,'r',desrot(1,:),desrot(2,:),desrot(3,:),'.')
view([0,90])
title3=sprintf('Felülnézet \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title3)

end

```

```

% AFFINITAS XY SIKRA 3D

function [xaff,yaff,zaff]=m4_aff(a,b,c,R,alfa,beta,T)

[desrot]=m3_rot(a,b,c,R,alfa,beta);

x=desrot(1,:);
y=desrot(2,:);
z=desrot(3,:);

% LAMBDA ERTEKEK FELVETELE

%lambda=linspace(0,10,T+1); % linearis skala 0 es 10 kozott
%lambda=linspace(0,1,T+1); % linearis skala 0 es 1 kozott
lambda=logspace(-1,1,T+1); % logaritmus skala 0 es 10 kozott, 0 fele
surubb

lambda=fliplr(lambda);

% KOPTATOTT X, Y ES Z ERTEKEK TABLAZATBAN

xaff= repmat(x, [T+1,1]);
yaff= repmat(y, [T+1,1]);

zaff=zeros(1,T+1);

for i=1:T+1
    for j=1:(R+1)^2
        zaff(i,j)=lambda(1,i)*z(1,j);
    end
end

% ADATOK SOROKBA RENDEZESE

xaff_row=zeros(T, (R+1)^2);
yaff_row=zeros(T, (R+1)^2);
zaff_row=zeros(T, (R+1)^2);

for i=1:T
    for j=1:(R+1)^2
        xaff_row(1, (i-1)*(R+1)*(R+1)+j)=xaff(i,j);
        yaff_row(1, (i-1)*(R+1)*(R+1)+j)=yaff(i,j);
        zaff_row(1, (i-1)*(R+1)*(R+1)+j)=zaff(i,j);
    end
end

%xaff
%yaff
%zaff

% GRAFIKON

axxmin=1.5*min(min(xaff));
axxmax=1.5*max(max(xaff));
axymin=1.5*min(min(yaff));
axymax=1.5*max(max(yaff));

```

```
axx=[axxmin,axxmin,axxmax,axxmax,axxmin];  
axy=[axymin,axymax,axymax,axymin,axymin];  
axz=zeros(1,5);  
  
%plot3(axx,axy,axz,'r',xaff_row,yaff_row,zaff_row)  
  
end
```

```
% KONVERTALAS DESCARTES --> GOMBI 3D

function [raff,phiaff,thtaff]=m5_dts(a,b,c,R,alfa,beta,T)

[xaff,yaff,zaff]=m4_aff(a,b,c,R,alfa,beta,T);

raff=zeros(T+1,(R+1)^2);
phiaff=zeros(T+1,(R+1)^2);
thtaff=zeros(T+1,(R+1)^2);

for i=1:T+1
    for j=1:(R+1)^2
        raff(i,j)=sqrt((xaff(i,j))^2+(yaff(i,j))^2+(zaff(i,j))^2);
        if (xaff(i,j)==0 && yaff(i,j)>=0)
            phiaff(i,j)=pi/2;
        elseif (xaff(i,j)==0 && yaff(i,j)<0)
            phiaff(i,j)=3*pi/2;
        else
            phiaff(i,j)=atan(yaff(i,j)/xaff(i,j));
        end
        if (zaff(i,j)==0 && raff(i,j)==0)
            thtaff(i,j)=0;
        else
            thtaff(i,j)=acos(zaff(i,j)/raff(i,j));
        end
    end
end

%raff
%phiaff
%thtaff

end
```

```

% TENGELYARANYOK VIZSGALATA 3D

function [arbig,arsml]=m6_arc(a,b,c,R,alfa,beta,T)

[raff,phiaff,thtaaff]=m5_dts(a,b,c,R,alfa,beta,T);
[xaff,yaff,zaff]=m4_aff(a,b,c,R,alfa,beta,T);

    raff=round( raff,8);
    phiaff=round(phiaff,8);
    thtaaff=round(thtaaff,8);

% LEGNAGYOBB TAVOLSAGOK

raff=raff';
rmax_v=max(raff)';
raff=raff';

indeximax=zeros(T+1,(R+1)^2);
indexjmax=zeros(T+1,(R+1)^2);

for i=1:T+1
    for j=1:(R+1)^2
        indeximax(i,j)=i;
        indexjmax(i,j)=j;
        if (rmax_v(i,1)==raff(i,j))
            indeximax(i,j)=indeximax(i,j);
            indexjmax(i,j)=indexjmax(i,j);
        else
            indeximax(i,j)=inf;
            indexjmax(i,j)=inf;
        end
    end
end

indeximax=min(indeximax)';
indexjmax=min(indexjmax)';

% LEGKISEBB TAVOLSAGOK

raff=raff';
rmin_v=min(raff)';
raff=raff';

indeximin=zeros(T+1,(R+1)^2);
indexjmin=zeros(T+1,(R+1)^2);

for i=1:T+1
    for j=1:(R+1)^2
        indeximin(i,j)=i;
        indexjmin(i,j)=j;
        if (rmin_v(i,1)==raff(i,j))
            indeximin(i,j)=indeximin(i,j);
            indexjmin(i,j)=indexjmin(i,j);
        else
            indeximin(i,j)=inf;
            indexjmin(i,j)=inf;
        end
    end
end

```



```

end

indeximin=min(indeximin)';
indexjmin=min(indexjmin)';

% MAX & MIN TENGELYPONTOK R-PHI ES X-Y-Z KOORDINATAI

indexmax=[indeximax,indexjmax];
indexmin=[indeximin,indexjmin];

axmax =zeros(3,T+1);
axmin =zeros(3,T+1);
axmaxd=zeros(3,T+1);
axmind=zeros(3,T+1);

for i=1:T+1
    axmax (1,i)= raff(indexmax(i,1),indexmax(i,2));
    axmax (2,i)=phiaff(indexmax(i,1),indexmax(i,2));
    axmax (3,i)=thtaff(indexmax(i,1),indexmax(i,2));
    axmin (1,i)= raff(indexmin(i,1),indexmin(i,2));
    axmin (2,i)=phiaff(indexmin(i,1),indexmin(i,2));
    axmin (3,i)=thtaff(indexmin(i,1),indexmin(i,2));
    axmaxd(1,i)= xaff(indexmax(i,1),indexmax(i,2));
    axmaxd(2,i)= yaff(indexmax(i,1),indexmax(i,2));
    axmaxd(3,i)= zaff(indexmax(i,1),indexmax(i,2));
    axmind(1,i)= xaff(indexmin(i,1),indexmin(i,2));
    axmind(2,i)= yaff(indexmin(i,1),indexmin(i,2));
    axmind(3,i)= zaff(indexmin(i,1),indexmin(i,2));
end

% KOZEPSO HOSSZUSAGU TENGELY (VEKTORIALIS SZORZATTAL)

cp=zeros(3,T+1);

for i=1:T+1
    cp(:,i)=cross(axmaxd(:,i),axmind(:,i)); % max-min vektorok
    vektorialis szorzata
    cp(:,i)=cp(:,i)/sqrt(cp(1,i)^2+cp(2,i)^2+cp(3,i)^2); % -||- lenormalva
end

% osszes pont helyvektoranak lenormalasa

xnorm=zeros(T+1,(R+1)^2);
ynorm=zeros(T+1,(R+1)^2);
znorm=zeros(T+1,(R+1)^2);

for i=1:T+1
    for j=1:(R+1)^2
        xnorm(i,j)=xaff(i,j)/sqrt(xaff(i,j)^2+yaff(i,j)^2+zaff(i,j)^2);
        ynorm(i,j)=yaff(i,j)/sqrt(xaff(i,j)^2+yaff(i,j)^2+zaff(i,j)^2);
        znorm(i,j)=zaff(i,j)/sqrt(xaff(i,j)^2+yaff(i,j)^2+zaff(i,j)^2);
    end
end

sp=zeros(T+1,(R+1)^2);

for i=1:T+1

```

```

    for j=1:(R+1)^2
    %     sp(i,j)=dot([xnorm(i,j),ynorm(i,j),znorm(i,j)],cp(:,i));
        sp(i,j)=xnorm(i,j)*cp(1,i)+ynorm(i,j)*cp(2,i)+znorm(i,j)*cp(3,i);
    end
end

sp=abs(sp-1);
sp=sp';
spm=min(sp)';
sp=sp';

indeximed=zeros(T+1,(R+1)^2);
indexjmed=zeros(T+1,(R+1)^2);

for i=1:T+1
    for j=1:(R+1)^2
        indeximed(i,j)=i;
        indexjmed(i,j)=j;
        if (spm(i,1)==sp(i,j))
            indeximed(i,j)=indeximed(i,j);
            indexjmed(i,j)=indexjmed(i,j);
        else
            indeximed(i,j)=inf;
            indexjmed(i,j)=inf;
        end
    end
end

indeximed=min(indeximed)';
indexjmed=min(indexjmed)';

% MED TENGYELYPONTOK R-PHI KOORDINATAI

indexmed=[indeximed,indexjmed];

    rmed=zeros(1,T+1);
    phimed=zeros(1,T+1);
    thtmed=zeros(1,T+1);

for i=1:T+1
    rmed(1,i)=raff(indexmed(i,1),indexmed(i,2));
    phimed(1,i)=phiaff(indexmed(i,1),indexmed(i,2));
    thtmed(1,i)=thtaff(indexmed(i,1),indexmed(i,2));
end

axmed=[rmed;phimed;thtmed];

% TENGYELYARANYOK MEGHATAROZASA

arbig=zeros(1,T);
arsml=zeros(1,T);

for i=1:T
    arbig(i)=axmed(1,i)/axmax(1,i);
    arsml(i)=axmin(1,i)/axmax(1,i);
end

%arbig

```

```

%arsml

% GRAFIKONOK

%lambda=linspace(0,10,T+1);
%lambda=linspace(0,1,T+1);
lambda=logspace(-1,1,T+1);
lambda=fliplr(lambda);
lambda=lambda(1,1:T);

line0=zeros(1,T);
line1=ones(1,T);
dline=[0,0;1,1];

figure(1)
plot(lambda,axmax(1,1:T),'b',lambda,axmed(1,1:T),'b',lambda,axmin(1,1:T),'b')
set(gca,'xdir','reverse')
title1=sprintf('Tengelyhosszak \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title1)
xlabel('lambda')

figure(2)
plot(lambda,arbig,'r',lambda,arsml,'r',lambda,line0,'k',lambda,line1,'k')
set(gca,'xdir','reverse')
title2=sprintf('Tengelyarányok \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title2)
xlabel('lambda')

figure(3)
plot(arbig,arsml,'r',dline(:,1),dline(:,2),'k:')
title3=sprintf('y_2(y_1) \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title3)
xlabel('y_1')
ylabel('y_2')

end

```

```
% IZOPERIMETRIKUS ARANY 3D
```

```
function [iprv]=m7_ipr(a,b,c,R,alfa,beta,T)
```

```
[xaff,yaff,zaff]=m4_aff(a,b,c,R,alfa,beta,T);
```

```
% ELEMI HAROMSZOGEK ES TETRAEDEREK GEOMETRIAJA
```

```
e1=zeros(T+1,(R+1)^2); % #1 oldal hossza
e2=zeros(T+1,(R+1)^2); % #2 oldal hossza
e3=zeros(T+1,(R+1)^2); % #3 oldal hossza
e4=zeros(T+1,(R+1)^2); % #4 oldal hossza
e5=zeros(T+1,(R+1)^2); % atlo hossza
s1=zeros(T+1,(R+1)^2); % egyik 3szog felkerulete = (#1 + #2 + atlo) / 2
s2=zeros(T+1,(R+1)^2); % masik 3szog felkerulete = (#3 + #4 + atlo) / 2
a1=zeros(T+1,(R+1)^2); % egyik 3szog terulete
a2=zeros(T+1,(R+1)^2); % masik 3szog terulete
v1=zeros(T+1,(R+1)^2); % egyik tetraeder terfogata
v2=zeros(T+1,(R+1)^2); % masik tetraeder terfogata
```

```
for i=1:T+1
```

```
    for j=1:(R+1)^2
```

```
        if ((j/(R+1))-floor(j/(R+1)))~=0)
```

```
            if (j<(R+1)^2-(R+1))
```

```
                % kis negyszogek oldalainak es egy atlonak hosszai
```

```
                e1(i,j)=sqrt((xaff(i,j)-xaff(i,j+1))^2+(yaff(i,j)-yaff(i,j+1))^2+(zaff(i,j)-zaff(i,j+1))^2);
```

```
                e2(i,j)=sqrt((xaff(i,j+1)-xaff(i,j+1+R+1))^2+(yaff(i,j+1)-yaff(i,j+1+R+1))^2+(zaff(i,j+1)-zaff(i,j+1+R+1))^2);
```

```
                e3(i,j)=sqrt((xaff(i,j)-xaff(i,j+1+R+1))^2+(yaff(i,j)-yaff(i,j+1+R+1))^2+(zaff(i,j)-zaff(i,j+1+R+1))^2);
```

```
                e4(i,j)=sqrt((xaff(i,j)-xaff(i,j+R+1))^2+(yaff(i,j)-yaff(i,j+R+1))^2+(zaff(i,j)-zaff(i,j+R+1))^2);
```

```
                e5(i,j)=sqrt((xaff(i,j+R+1)-xaff(i,j+1+R+1))^2+(yaff(i,j+R+1)-yaff(i,j+1+R+1))^2+(zaff(i,j+R+1)-zaff(i,j+1+R+1))^2);
```

```
            else
```

```
                % kis negyszogek oldalainak es egy atlonak hosszai (utolso phi-re)
```

```
                e1(i,j)=sqrt((xaff(i,j)-xaff(i,j+1))^2+(yaff(i,j)-yaff(i,j+1))^2+(zaff(i,j)-zaff(i,j+1))^2);
```

```
                e2(i,j)=sqrt((xaff(i,j+1)-xaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2+(yaff(i,j+1)-yaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2+(zaff(i,j+1)-zaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2);
```

```
                e3(i,j)=sqrt((xaff(i,j)-xaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2+(yaff(i,j)-yaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2+(zaff(i,j)-zaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2);
```

```
                e4(i,j)=sqrt((xaff(i,j)-xaff(i,j+R+1-(R+1)^2))^2+(yaff(i,j)-yaff(i,j+R+1-(R+1)^2))^2+(zaff(i,j)-zaff(i,j+R+1-(R+1)^2))^2);
```

```
                e5(i,j)=sqrt((xaff(i,j+R+1-(R+1)^2)-xaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2+(yaff(i,j+R+1-(R+1)^2)-yaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2+(zaff(i,j+R+1-(R+1)^2)-zaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))^2);
```

```
            end
```

```
            % 1 kis negyszog = 2 kis 3szog --> haromszogek felkeruletei es teruletei Heron kepletel
```

```
            s1(i,j)=(e1(i,j)+e2(i,j)+e3(i,j))/2;
```

```
            s2(i,j)=(e3(i,j)+e4(i,j)+e5(i,j))/2;
```

```
            a1(i,j)=sqrt(s1(i,j)*(s1(i,j)-e1(i,j))*(s1(i,j)-e2(i,j))*(s1(i,j)-e3(i,j)));
```

```

    a2(i,j)=sqrt(s2(i,j)*(s2(i,j)-e3(i,j))*(s2(i,j)-e4(i,j))*(s2(i,j)-
e5(i,j)));
    if (j<(R+1)^2-(R+1))
        % kis 3szog alapu gulak terfogatai
        v1(i,j)=(1/6)*(xaff(i,j)*(yaff(i,j+ 1)*zaff(i,j+1+R+1)-zaff(i,j+
1)*yaff(i,j+1+R+1))-yaff(i,j)*(xaff(i,j+ 1)*zaff(i,j+1+R+1)-zaff(i,j+
1)*xaff(i,j+1+R+1))+zaff(i,j)*(xaff(i,j+ 1)*yaff(i,j+1+R+1)-yaff(i,j+
1)*xaff(i,j+1+R+1)));
        v2(i,j)=(1/6)*(xaff(i,j)*(yaff(i,j+R+1)*zaff(i,j+1+R+1)-
zaff(i,j+R+1)*yaff(i,j+1+R+1))-yaff(i,j)*(xaff(i,j+R+1)*zaff(i,j+1+R+1)-
zaff(i,j+R+1)*xaff(i,j+1+R+1))+zaff(i,j)*(xaff(i,j+R+1)*yaff(i,j+1+R+1)-
yaff(i,j+R+1)*xaff(i,j+1+R+1)));
    else
        % kis 3szog alapu gulak terfogatai (utolso phi-re)
        v1(i,j)=(1/6)*(xaff(i,j)*(yaff(i,j+ 1 )*zaff(i,j+1+R+1-
(R+1)^2)-zaff(i,j+ 1 )*yaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))-
yaff(i,j)*(xaff(i,j+ 1 )*zaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2)-zaff(i,j+ 1
)*xaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))+zaff(i,j)*(xaff(i,j+ 1 )*yaff(i,j+1+R+1-
(R+1)^2)-yaff(i,j+ 1 )*xaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2)));
        v2(i,j)=(1/6)*(xaff(i,j)*(yaff(i,j+R+1-(R+1)^2)*zaff(i,j+1+R+1-
(R+1)^2)-zaff(i,j+R+1-(R+1)^2)*yaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))-
yaff(i,j)*(xaff(i,j+R+1-(R+1)^2)*zaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2)-zaff(i,j+R+1-
(R+1)^2)*xaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2))+zaff(i,j)*(xaff(i,j+R+1-
(R+1)^2)*yaff(i,j+1+R+1-(R+1)^2)-yaff(i,j+R+1-(R+1)^2)*xaff(i,j+1+R+1-
(R+1)^2)));
    end
else
    % utolso alakzat ertekei (utolso sorban) (lambda=0)
    e1(i,j)=0;
    e2(i,j)=0;
    e3(i,j)=0;
    e4(i,j)=0;
    e5(i,j)=0;
    s1(i,j)=0;
    s2(i,j)=0;
    a1(i,j)=0;
    a2(i,j)=0;
    v1(i,j)=0;
    v2(i,j)=0;
end
end
end

S=sum(abs(a1')+abs(a2'));
V=sum(abs(v1')+abs(v2'));

% gomb felszine es terfogata analitikusan
s_s=4*pi
v_s=4*pi/3
err_s=100*abs(S(ceil(2*T/4)+1)-s_s)/s_s
err_v=100*abs(V(ceil(2*T/4)+1)-v_s)/v_s

iprv=zeros(1,T);

for i=1:T
    iprv(i)=6*sqrt(pi)*V(i)/S(i)^(3/2);
end

```

```
% GRAFIKON

%lambda=linspace(0,10,T+1);
%lambda=linspace(0,1,T+1);
lambda=logspace(-1,1,T+1);
lambda=fliplr(lambda);
lambda=lambda(1,1:T);

line0=zeros(1,T);
line1=ones(1,T);

plot(lambda,iprv,'r',lambda,line0,'k',lambda,line1,'k')
set(gca,'xdir','reverse')
title1=sprintf('Izoperimetrikus arány \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title1)
xlabel('lambda')

end
```

```

% MEGJELENITES 3D

function m8_vis(a,b,c,R,alfa,beta,T)

[xaff,yaff,zaff]=m4_aff(a,b,c,R,alfa,beta,T);

% lambda_1 = 3,1623 = 10^0.5
st1x=xaff(ceil(1*T/4)+1,:);
st1y=yaff(ceil(1*T/4)+1,:);
st1z=zaff(ceil(1*T/4)+1,:);

% lambda_2 = 1 = 10^0
st2x=xaff(ceil(2*T/4)+1,:);
st2y=yaff(ceil(2*T/4)+1,:);
st2z=zaff(ceil(2*T/4)+1,:);

% lambda_3 = 0,3162 = 10^(-0.5)
st3x=xaff(ceil(3*T/4)+1,:);
st3y=yaff(ceil(3*T/4)+1,:);
st3z=zaff(ceil(3*T/4)+1,:);

% GRAFIKON

axxmin=1.5*min(min(st1x));
axxmax=1.5*max(max(st1x));
axymin=1.5*min(min(st1y));
axymax=1.5*max(max(st1y));

axx=[axxmin,axxmin,axxmax,axxmax,axxmin];
axy=[axymin,axymax,axymax,axymin,axymin];
axz=zeros(1,5);

figure (1)
plot3(axx,axy,axz,'r',st1x,st1y,st1z,'r.', st2x,st2y,st2z,'g.',
st3x,st3y,st3z,'b.')
title1=sprintf('Axonometrikus nézet \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title1)

figure (2)
plot3(axx,axy,axz,'r',st1x,st1y,st1z,'r.', st2x,st2y,st2z,'g.',
st3x,st3y,st3z,'b.')
view([0,0])
title2=sprintf('Ortogonalis nézet \n alpha=%d° \n beta=%d°',alfa,beta);
title(title2)

end

```

```

% ABRASOROK MENTESE 3D

function m9_sav(a,b,c,R,T,mode)

deg=[0,5,15,30,45,60,75,85,90];

switch (mode)

% CASE 1: TENGELYARANYOK
case 1

    %lambda=linspace(0,10,T+1);
    %lambda=linspace(0,1,T+1);
    lambda=logspace(-1,1,T+1);
    lambda=fliplr(lambda);
    lambda=lambda(1,1:T);

    line0=zeros(1,T);
    line1=ones(1,T);
    dline=[0,0;1,1];

    for i=1:9
        for j=1:9
            alfa=deg(i);
            beta=deg(j);

            [arbig,arsml]=m6_arc(a,b,c,R,alfa,beta,T);

            figure (1)

            plot(lambda,arbig,'r',lambda,arsml,'r',lambda,line0,'k',lambda,line1,'k')
            set(gca,'xdir','reverse')
            title2=sprintf('Tengelyarányok \n alpha=%d° \n
beta=%d°',alfa,beta);
            title(title2)
            xlabel('lambda')
            filename2=sprintf('ar_%d_%d_a.pdf',alfa,beta);
            print(filename2,'-dpdf')

            figure (2)
            plot(arbig,arsml,'r',dline(:,1),dline(:,2),'k:')
            title3=sprintf('y_2(y_1) \n alpha =%d° \n beta =%d°',alfa,beta);
            title(title3)
            xlabel('y_1')
            ylabel('y_2')
            filename3=sprintf('ar_%d_%d_b.pdf',alfa,beta);
            print(filename3,'-dpdf')

        end
    end

% CASE 2: IZOPERIMETRIKUS ARANY
case 2

    %lambda=linspace(0,10,T+1);

```



```

%lambda=linspace(0,1,T+1);
lambda=logspace(-1,1,T+1);
lambda=fliplr(lambda);
lambda=lambda(1,1:T);

line0=zeros(1,T);
line1=ones(1,T);

for i=1:9
    for j=1:9
        alfa=deg(i);
        beta=deg(j);

        [iprv]=m7_ipr(a,b,c,R,alfa,beta,T);

        figure(1)
        plot(lambda,iprv,'r',lambda,line0,'k',lambda,line1,'k')
        set(gca,'xdir','reverse')
        title1=sprintf('Izoperimetrikus arány \n alpha=%d° \n
beta=%d°',alfa,beta);
        title(title1)
        xlabel('lambda')
        filename2=sprintf('ipr_%d_%d.pdf',alfa,beta);
        print(filename2,'-dpdf')

    end
end

% CASE 3: TERBELI MEGJELENITES
case 3

for i=1:9
    for j=1:9
        alfa=deg(i);
        beta=deg(j);

        [xaff,yaff,zaff]=m4_aff(a,b,c,R,alfa,beta,T);

        % lambda_1 = 3,1623 = 10^0.5
        st1x=xaff(ceil(1*T/4)+1,:);
        st1y=yaff(ceil(1*T/4)+1,:);
        st1z=zaff(ceil(1*T/4)+1,:);

        % lambda_2 = 1 = 10^0
        st2x=xaff(ceil(2*T/4)+1,:);
        st2y=yaff(ceil(2*T/4)+1,:);
        st2z=zaff(ceil(2*T/4)+1,:);

        % lambda_3 = 0,3162 = 10^(-0.5)
        st3x=xaff(ceil(3*T/4)+1,:);
        st3y=yaff(ceil(3*T/4)+1,:);
        st3z=zaff(ceil(3*T/4)+1,:);

        axxmin=1.5*min(min(st1x));
        axxmax=1.5*max(max(st1x));
        axymin=1.5*min(min(st1y));
        axymax=1.5*max(max(st1y));

        axx=[axxmin,axxmin,axxmax,axxmax,axxmin];

```

```
axy=[axymin, axymax, axymax, axymin, axymin];
axz=zeros(1,5);

figure (2)
plot3(axx,axy,axz,'r',st1x,st1y,st1z,'r.', st2x,st2y,st2z,'g.',
st3x,st3y,st3z,'b.')
view([0,0])
title2=sprintf('Ortogonalis nézet \n alpha=%d° \n
beta=%d°',alfa,beta);
title(title2)
filename2=sprintf('vis_%d_%d.pdf',alfa,beta);
print(filename2, '-dpdf')
end
end
end
end
```

