



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
ÉPÍTÉSZMÉRNÖKI KAR
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

EGY KÉTCSÚCSTÉTEL NORMÁLIS CELLA- FELBONTÁSOKRA

Regős Krisztina

Konzulensek:

Dr. Domokos Gábor

Dr. G. Horváth Ákos

MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA 2021

ABSZTRAKT

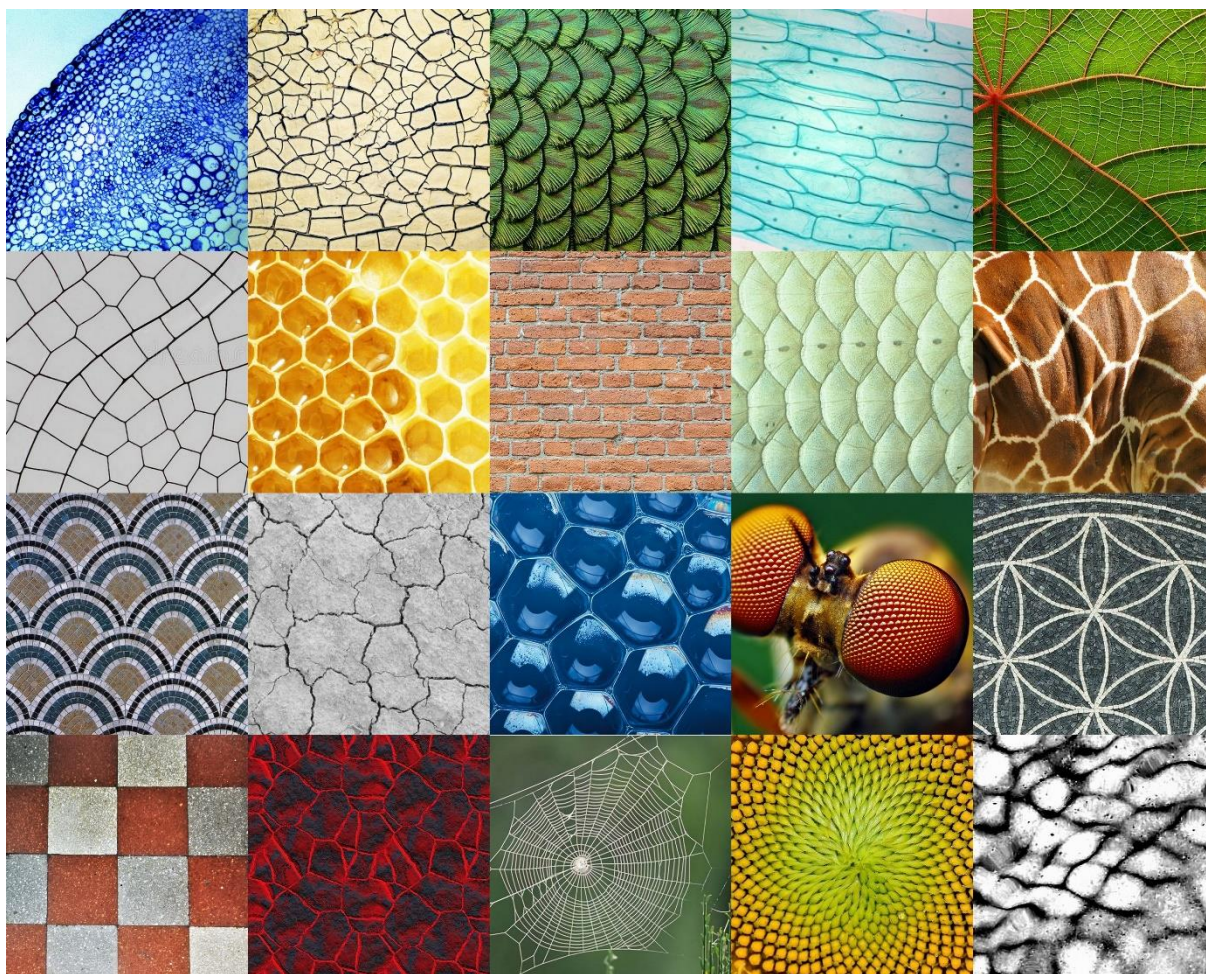
Nagyon sok természeti és mesterséges mintázat modelljeként használhatóak [8] a síma, beágyazott 2D sokaságok úgynevezett *normális cella-felbontásai*, ahol a cellák a körlappal homeomorfak, két cella metszete összefüggő halmaz (vagy az üres halmaz) és a cellák mérete egyenletesen korlátos alulról és felülről is. Ilyen mintázatok megjelennek a biológiában, geológiában és a kémiában is. Az építészetben is gyakran találkozunk ilyen mintázatokkal: nem csak falazott szerkezetek vagy várostérképek modelljeként szolgálhatnak, de a jól ismert mozaik képek matematikai leírására is alkalmasak lehetnek. Ha egy ilyen mintázat celláit nem csak kombinatorikai, hanem metrikus tulajdonságaik alapján is vizsgáljuk, természetes, és az említett alkalmazások szempontjából különösen releváns módon vetődik fel a kérdés, hogy egy cellának átlagosan legalább hány "éles" csúcsa van, ahol az élek nem 180 fokban találkoznak. Megmutatjuk, hogy periodikus mintázatok esetén ez a minimális szám 2, és általános összefüggést adunk a minimális átlag, a hordozó sokaság Euler-karakterisztikája és a vizsgált cella-felbontás éleinek száma között.

TARTALOMJEGYZÉK

Absztrakt	2
1. Bevezetés	4
2. A kombinatorika és geometria kapcsolata	7
3. Az 1. Tétel bizonyítása	11
3.1. Alapfogalmak	11
3.2. A deregularizáló algoritmus	11
3.3. Az 1. Tétel bizonyítása	13
4. Mintázatok a szimbolikus síkon	15
5. Alkalmazások	19
6. Összefoglalás	20
Köszönetnyilvánítás	21
Irodalomjegyzék	21
Ábrajegyzék	23

I. BEVEZETÉS

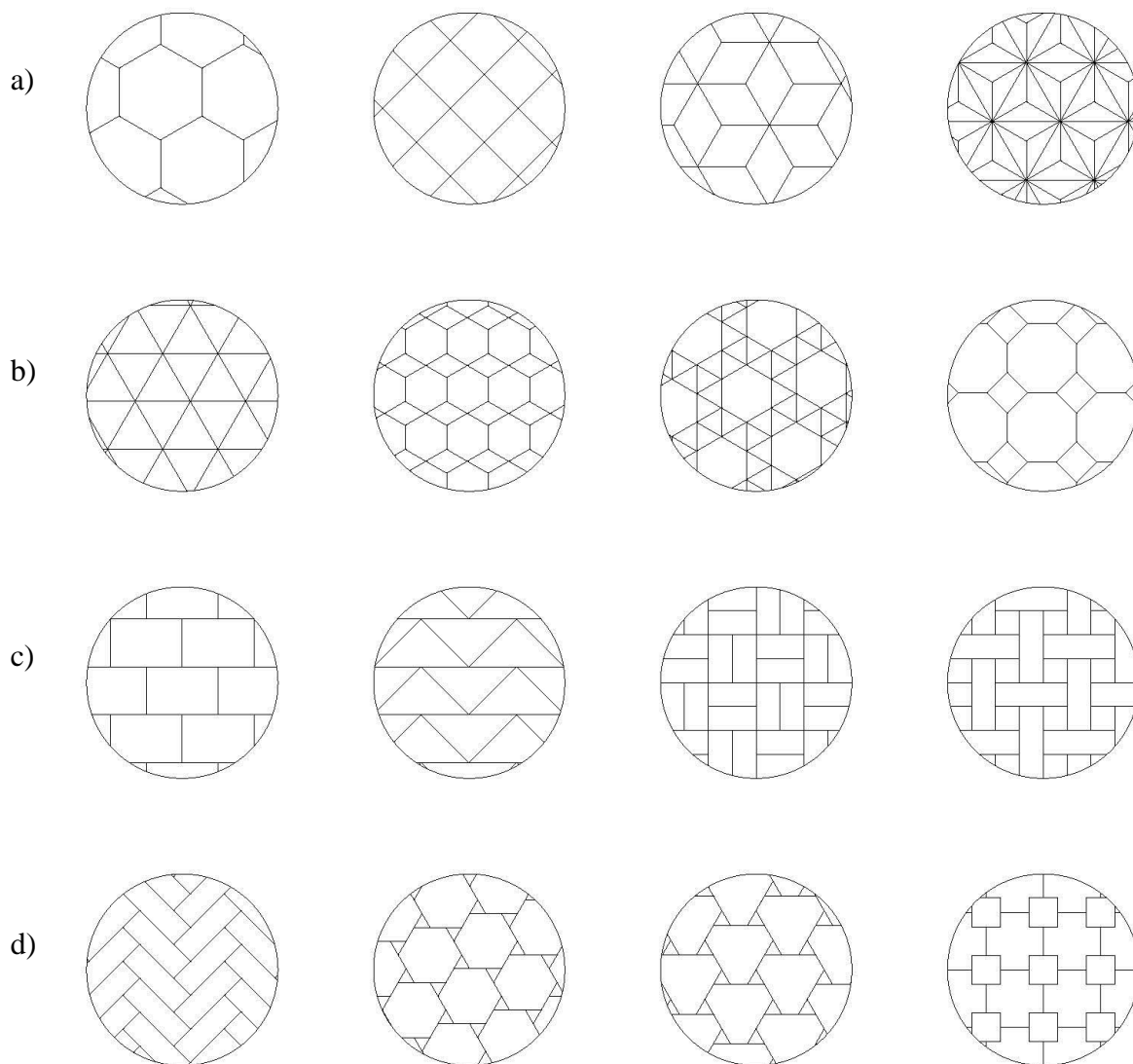
Mind a természetben, mind a mesterséges képződmények esetén találkozunk mintázatokkal, melyek nem átfedő, a teret tökéletesen kitöltő cellákból állnak. Ezeket *mozaikoknak* nevezzük. Ezek a minták megjelennek a természet és az emberi alkotás megannyi területén: a biológiában (sejtek mikroszkopikus képe [9, 13]), a kémiában (molekulák kapcsolódása), a geológiában (kőzetek repedezése [1, 3, 5, 6, 15]), a földrajzban [7] vagy akár a mérnöki tudományokban és az építészetben (falazatok, burkolatok, várostérképek [2, 11, 16]).



1. ábra (soronként)

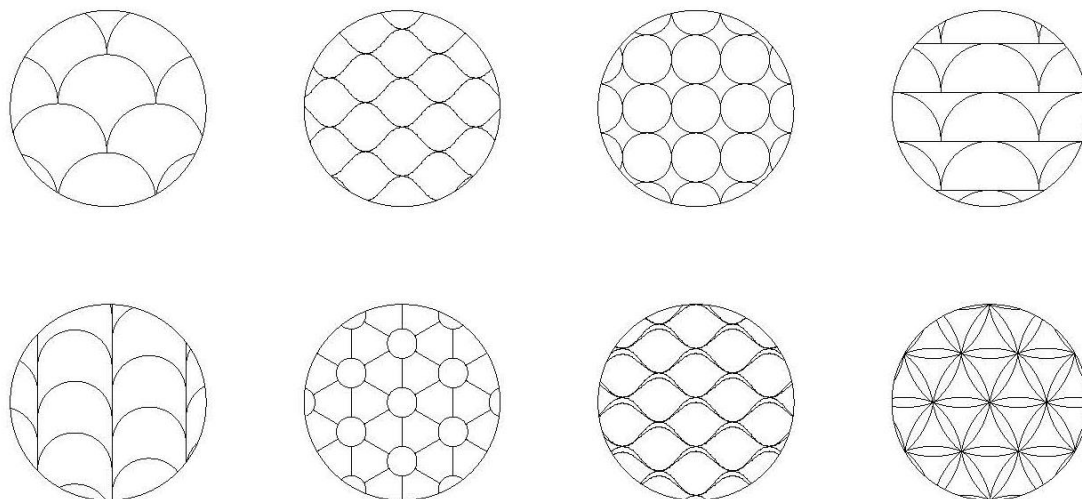
1. növényi sejtek
2. repedezett talaj
3. pávatollak
4. növényi sejtek
5. levélerezet
6. szitakötő szárnya
7. méhkaptár
8. téglafal
9. halpikkely
10. zsiráf mintázata
11. padlómozaik
12. repedezett talaj
13. szappanbuborékok
14. légy szem
15. padlómozaik
16. padló csempe
17. láva
18. pókháló
19. napraforgó magjai
20. víz hullámszála

Léteznek olyan mozaikok, melyek poligonokból épülnek fel. Ezek lehetnek azonos poligonok, - ezeket a mintákat (és egyúttal minden, azonos cellából felépülő mintát) *monohedrálisnak* nevezzük, - de lehet véges, vagy akár végtelen különböző cella-típus is. Ha egy részlet ismétlődik, azaz a mozaik periodikus, akkor könnyen ábrázolható. Ilyen példák láthatóak a 2. ábrán.



2. ábra Poligonális periodikus mintázatok

Látjuk tehát, hogy egy ilyen poligonális mozaik *cellákból, csomópontokból és egyenes szakaszokból, mint élekből* áll. De nem csak olyan cella-felbontások léteznek, amelyek sokszögekből állnak. Készíthetünk ilyen mintákat részben görbe élekkel is. Ezekből néhány példát bemutatok a 3. ábrán.



3. ábra Periodikus mintázatok görbe éllel

Nyilvánvaló, hogy poligonális mozaikok esetén a cellák átlagos csúcs-száma legalább 3. Az is nyilvánvalónak tűnik, hogyha megengedünk görbe éleket, akkor ez az átlag csökkenthető.

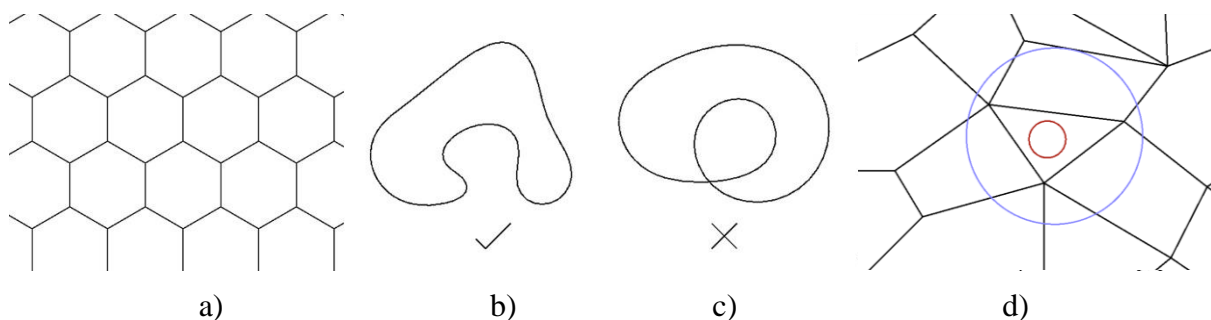
A 2. fejezetben bemutatok egy tételt, melyből többek között az is következik, hogy az Euklideszi síkon periodikus mintázatoknál ez az átlag legalább 2. A tételt a 3. fejezetben fogom bizonyítani. A bizonyítás lényeges eleme az úgynevezett *deregularizáló algoritmus*, mely egy mintázatok közötti, az említett átlagot monoton módon csökkentő evolúciós folyamatot definiál.

A 4. fejezetben osztályozom az illusztrált példákat, és elhelyezem őket egy koordinátarendszerben, melyet szimbolikus síknak fogunk nevezni. Az 5. fejezetben néhány lehetséges alkalmazást mutatok be. A 6. fejezetben összefoglalom a kutatásom eredményeit.

2. A KOMBINATORIKA ÉS GEOMETRIA KAPCSOLATA

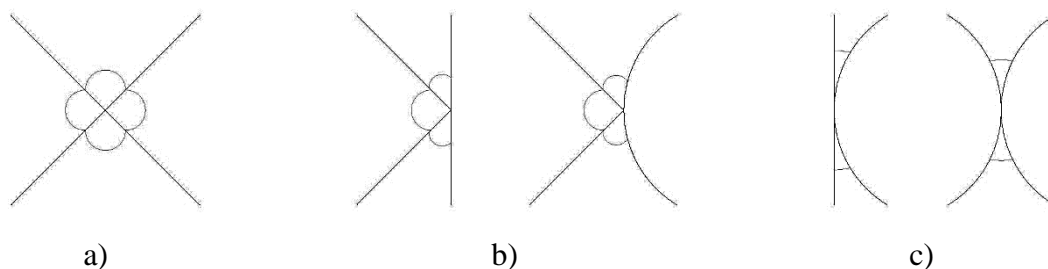
1. Definíció

Normál cella-felbontásoknak nevezzük azokat a síkbeli cella-felbontásokat, ahol minden cella topológiailag egy lemeznek felel meg, minden két cella metszete egyszeresen összefüggő, vagy az üres halmaz és a cellák alulról és felülről is egyenletesen korlátosak.



4. ábra Normál cella-felbontások tulajdonságai: a) síkbeli cella-felbontás, b) körlemezzel homeomorf cella, c) körlemezzel nem homeomorf cella, d) az egyenletes alsó (piros) és felső (kék) méret-korlát illusztrációja

A normális cella-felbontásokat korábban már sok szempontból tanulmányozták és születtek érdekes eredmények [8, 10, 12, 14], azonban ezekben a munkákban főként a kombinatorikai tulajdonságaik alapján vizsgálták őket. Ahogy azonban a bevezetésben is írtam, vannak olyan tulajdonságok is, amelyeket a kombinatorikai jellemzők nem különböztetnek meg: például egy csúcsnál lehet 180° két szomszédos él által bezárt szög. Egy ilyen csomópont (melyet a fizikus szakirodalomban „T” csomópontnak is szoktak nevezni [18],[19],[20]) kombinatorikai szempontból az adott cella csúcsának számít ugyan, a cella belsejéből nézve azonban ez nem érzékelhető. Ezt a jelenséget illusztrálja az 5. ábra, ahol kombinatorikai szempontból azonos csomópontokat mutatok be, melyek ugyanakkor már első ránézésre is merőben eltérő geometriát hordoznak. Ilyen és hasonló jelenségek miatt érdemes a mozaikokat metrikus tulajdonságaik alapján is szemügyre venni.



5. ábra a) X-csomópont b) T-csomópont egy 180°-os élpárral c) csomópont két 180°-os élpárral

2. Definíció

Legyen S egy sima 2-dimenziós sokaság, legyen M az S sokaság egy normál-cellafelbontása, és jelölje M lapjainak, éleinek és csúcsainak számát rendre F , E , V . Jelölje n_i az i -edik ($i = 1, 2, \dots, V$) csúcsban található élek számát. Ezt nevezzük *kombinatorikai csúcs-fokszámnak*.

Jelölje v_k a k -adik ($k = 1, 2, \dots, F$) lap körvonalán található élek számát. Ezt nevezzük *kombinatorikai lap-fokszámnak*.

A kombinatorikai csúcs-fokszámot úgy is értelmezhetjük, hogy az i -edik csúcsban található éleket az óramutató járásával megegyezően megjelöljük ($e_{i,j}$, $i = 1 \dots V$, $j = 1 \dots n_i$) és $e_{i,j}$, $e_{i,j+1}$ párokba állítjuk (tehát a szomszédos élek alkotnak párokat). Ezen élpárok száma a kombinatorikai csúcs-fokszám.

Annak érdekében, hogy metrikus szempontból is leírassuk ezeket a mintázatokat, bevezetünk egy új fogalmat.

3. Definíció

Legyen S egy sima 2-dimenziós sokaság, legyen M az S sokaság egy normál-cellafelbontása, és jelöljük M lapjainak, éleinek és csúcsainak száma rendre F , E , V . Tekintsük az i -edik csúcsban található $e_{i,j}$, $e_{i,j+1}$ ($e_{i,j}$, $i = 1 \dots V$, $j = 1 \dots n_i$) élpárok által bezárt szögeket. Jelölje n_i^* azon élpárok számát, melyek közötti szög nem 180°-os. Ezt a számot nevezzük a csúcs *törésfokszámának*.

Egy lap kombinatorikai fokszámát is értelmezhetjük élpárok számaként. A k -adik lapot határoló éleket az óramutató járásával megegyezően megszámozzuk ($e_{k,l}$, $k = 1 \dots F$, $l = 1 \dots v_k$), és $e_{k,l}$, $e_{k,l+1}$ párokba állítjuk (a szomszédos élek alkotnak párokat). Ezen élpárok száma a kombinatorikai lap-fokszám.

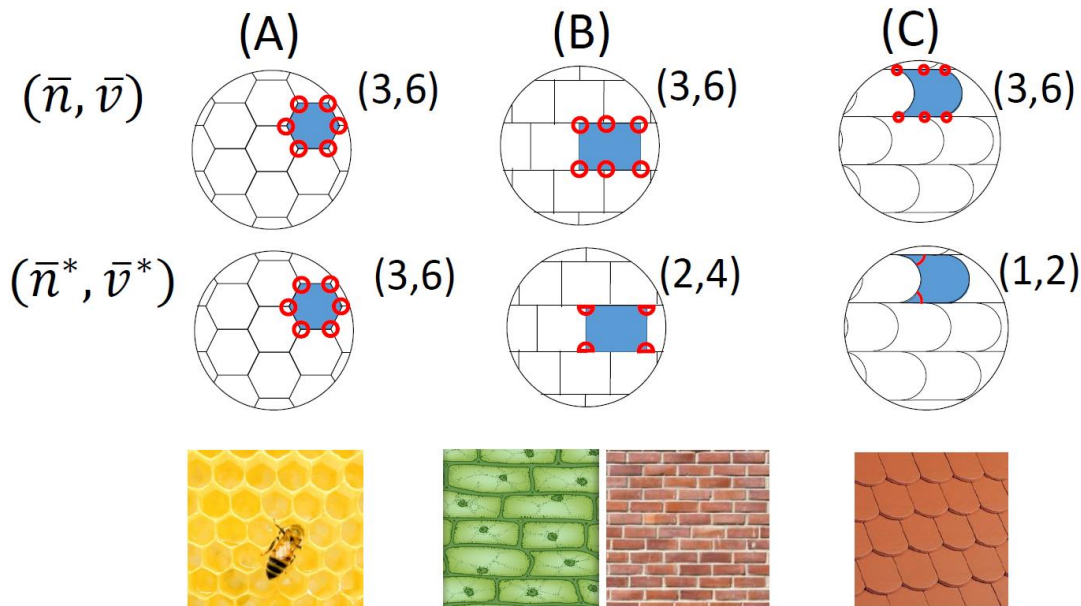
4. Definíció

Legyen S egy sima 2-dimenziós sokaság normál-cella-felbontása M , és M lapjainak, éleinek és csúcsainak száma rendre F, E, V . Tekintsük a k -adik lapot határoló $e_{k,l}, e_{k,l+1}$ ($e_{k,l}, k = 1 \dots F, l = 1 \dots v_k$) élpárok által bezárt szögeket. Jelölje v_k^* azon élpárok számát, melyek által bezárt szög nem 180° -os. Ezt a számot nevezzük a lap *törés-fokszámának*.

Ezen mennyiségek véges és periodikus mozaikokon könnyen átlagolhatóak, azonban általános normál cella-felbontásokra is könnyen értelmezhetjük a fokszámok átlagát. Kijelölünk egy X középpontú, ρ sugarú $B(X, \rho)$ gömböt, és ezen belül kiszámoljuk az átlagokat melyeket rendre $\bar{n}(X, \rho), \bar{v}(X, \rho), \bar{n}^*(X, \rho)$ és $\bar{v}^*(X, \rho)$ módon jelölünk. Ezek után ρ sugarat a végtelenbe növeljük. Azt mondjuk, hogy a mozaikot jellemző kombinatorikai és törés-fokszámokat jellemző $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*$ és \bar{v}^* átlagok akkor létezhetnek, ha $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{n}(X, \rho), \lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{v}(X, \rho), \lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{n}^*(X, \rho)$ és $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{v}^*(X, \rho)$ határértékek léteznek és X -től függetlenek. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező cella-felbontásokat nevezzük *kiegyensúlyozott* [8] felbontásoknak.

5. Definíció

Az $[\bar{n}, \bar{v}]$ síkot (*kombinatorikai*) *szimbolikus síknak*, az $[\bar{n}^*, \bar{v}^*]$ síkot (*metrikus*) *szimbolikus síknak* nevezzük.



6. ábra Három példa a kombinatorikus és törés-fokszámok összehasonlítására, és megjelenésük a természetben / építészetben. (A) Méhsejt-mintázat (B) Kötésben rakott téglafalra emlékeztető mintázat (C) cserépfedésre emlékeztető mintázat. 1. sor: kombinatorikai fokszám értelmezése 2. sor: Törés-fokszám értelmezése 3. sor: a rajzolt mintákra emlékeztető természeti/épített mozaikok

Mielőtt kimondanám a fő állítást, néhány egyszerű, hétköznapi példán illusztrálom az alapfogalmakat. A 6. ábrán három periodikus mintázat látható (A, B és C, oszlopokban). A harmadik sorban valóságban fellelhető példák jelennek meg, amelyek közelítőleg az A, B és C mintáknak felelnek meg. Ezen minták kombinatorikai (\bar{n}, \bar{v}) és törés-fokszámait (\bar{n}^*, \bar{v}^*) számoltam ki és jelöltem az ábrán. Ezek pontosan megegyeznek a cellák és csúcsok fokszámainak átlagaival, mert a minták azonos cellákból állnak. A három lerajzolt mintázat kombinatorikailag teljesen megegyezik, azonban geometriai tulajdonságaikban jelentősen eltérnek. A (B) esetben minden csomópontban két 90 és egy 180 fokos szög van, (C) esetben pedig már 2 darab 180 fokos szög is megjelenik egy csúcsban. Ez is szemlélteti, hogy a két érték (a kombinatorikai és törés-fokszám) különböző esetekben mennyire közel vagy mennyire távol eshet egymástól. Az nyilvánvalóan látszik, hogy a törés-fokszám csak kisebb vagy egyenlő lehet a kombinatorikainál, azonban nem egyértelmű, hogy mekkora lehet ez a különbség. A célunk belátni a következő tételt:

1. Tétel

Legyen S egy sima 2-dimenziós sokaság, melynek Euler-karakterisztikája χ , és legyen M egy E éllel, \bar{v}, \bar{n} kombinatorikai fokszámokkal és \bar{v}^*, \bar{n}^* törés-fokszámokkal rendelkező normál cellafelbontása S -nek.

Ekkor

$$\bar{v}^* \geq 2 - \frac{2\chi\bar{n}}{E(\bar{n} - 2) + \chi\bar{n}}.$$

Az 1. Tételből következik, hogy ha $E \rightarrow \infty$ (ami például periodikus mintázatoknál mindig teljesül) vagy $\chi = 0$ (ami például a tóruszon teljesül), akkor

$$\bar{v}^* \geq 2.$$

A 3. fejezetben definiálok néhány alapfogalmat és bebizonyítom a tételt.

3. AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA

3.1. Alapfogalmak

Véges M -re felírható az Euler-formula

$$F - E + V = \chi$$

alakban, ahol F , E és V rendre a lapok, élek és csúcsok számát, χ pedig a felület Euler-karakterisztikáját jelöli.

Átalakítva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$(1) \quad \frac{F}{2E} + \frac{V}{2E} = \frac{E + \chi}{2E}$$

Mivel egy normál-cellafelbontás minden éle pontosan két cellához tartozik, és minden éle pontosan két csúcshoz tartozik, ezért, ha kétszer összeszámoljuk az élek számát és elosztjuk a csúcsok számával, akkor megkapjuk a kombinatorikai csúcs-fokszámot, ha a lapok számával, akkor a kombinatorikai cella-fokszámot.

$$(2) \quad \bar{n} = \frac{2E}{V}$$

$$(3) \quad \bar{v} = \frac{2E}{F}$$

3.2. A deregularizáló algoritmus

A kombinatorikai és törés-fokszámok közötti nyilvánvaló összefüggés: $\bar{v}^* \leq \bar{v}$ és $\bar{n}^* \leq \bar{n}$.

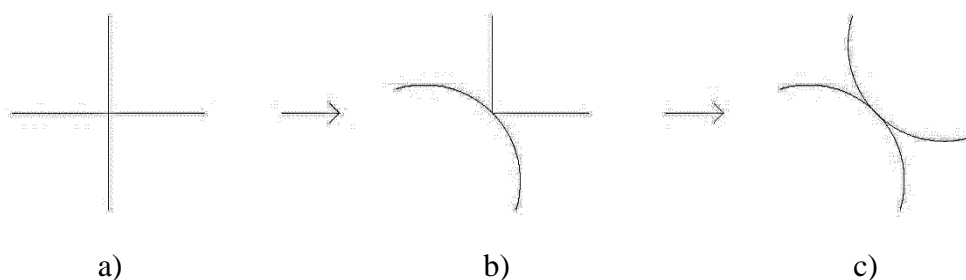
6. Definíció

Ha $\bar{v}^* = \bar{v}$, illetve $\bar{n}^* = \bar{n}$ akkor a mozaik *reguláris*.

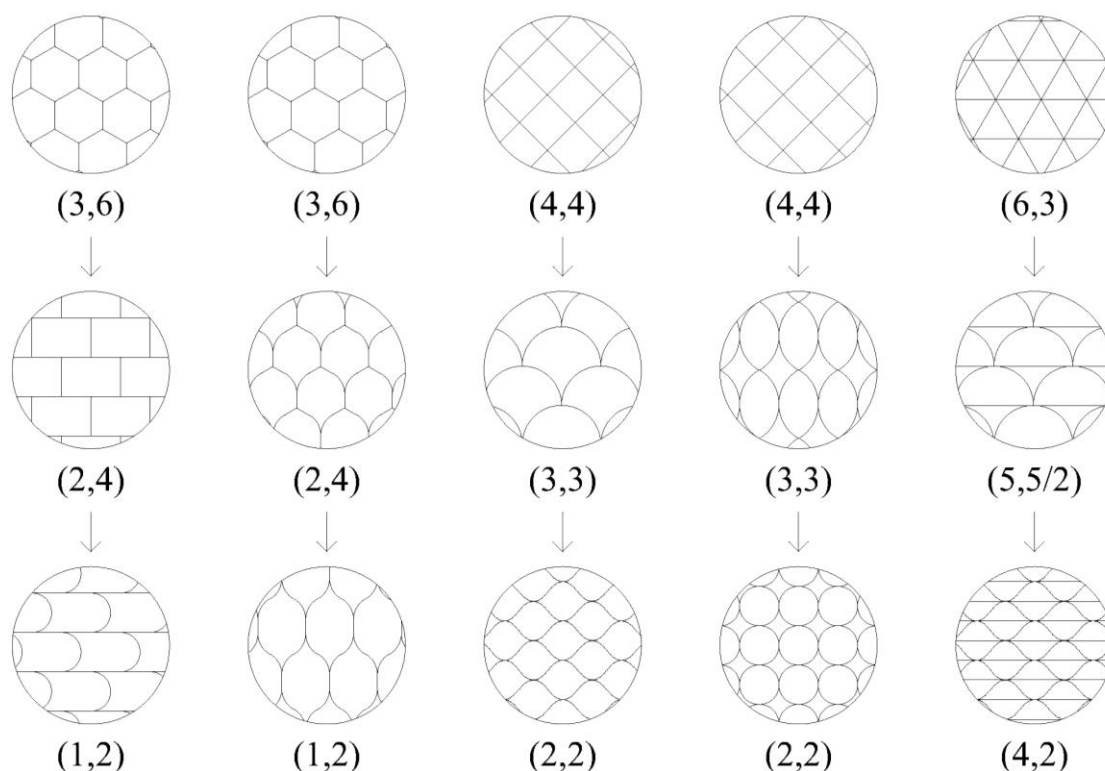
Az viszont nem nyilvánvaló, hogy mekkora lehet a $\bar{v} - \bar{v}^*$ és $\bar{n} - \bar{n}^*$ különbség. A bizonyításban az utóbbira adunk választ.

Adódik a gondolat, hogy készítsünk egy algoritmust, mely növeli ezeket a fent említett különbségeket, azaz egyre több degenerált (180° -ot bezáró élpárt hoz létre).

Ennek az algoritmusnak a menetét mutatja be a 7. ábra. Veszünk egy reguláris csúcsot, kijelölünk egy élpárt, és ezt (lokálisan) *kiegyenesítjük*. Ezt a legkönnyebben úgy végezhetjük el, ha az élpárt egyetlen sima (esetleg görbe) élre cseréljük. Ezt a műveletet egy másik élpárral is elvégezhetjük ugyanazon a csomóponton (ha van legalább 2 különböző élpár, azaz minimum 3 él találkozik egy pontban). Mivel egy pontban maximum 2 db 180° -os szög lehet, így maximum 2-szer tudunk deregularizálni csomópontonként.



7. ábra A deregularizáló algoritmus lépései: a) reguláris $n=n^*=4$ csomópont, b) ugyanaz a csomópont egy deregularizációs lépés után ($n=4$, $n^*=3$), c) ugyanaz a csomópont egy deregularizációs lépés után ($n=4$, $n^*=2$)



8. ábra Néhány mintázat deregularizálásának lehetséges lépései

7. Definíció

Legyen M normális cella-felbontás minden cellájára $n_i - n_i^* = r_i$ ($i=1 \dots V$). Legyen

$$\rho(M) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^V r_i}{2V}.$$

A $\rho(M)$ érték kifejezi M regularitását és általánosítja a 6. definíciót. M reguláris, ha $\rho(M) = 1$, ha pedig $\rho(M) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy M *irreguláris*. Egyéb esetben a mozaik ρ -*reguláris*.

A 2. ábra a) és b) sorában reguláris, c) és d) sorában irreguláris, vagy részben irreguláris példákat mutattam be.

A felosztás irregularitásának ismeretében kifejezhetjük \bar{v}^*, \bar{n}^* átlagokat (2) és (3) felhasználásával a következőképpen:

$$\bar{v}^*(\rho) = \frac{2E - 2(1 - \rho)V}{F} = \bar{v} \left(\frac{\bar{n} - 2(1 - \rho)}{\bar{n}} \right)$$

$$\bar{n}^*(\rho) = \frac{2E - 2(1 - \rho)V}{V} = \bar{n} - 2(1 - \rho)$$

Ebből látszik, hogy

$$\frac{\bar{v}}{\bar{n}} = \frac{\bar{v}^*(\rho)}{\bar{n}^*(\rho)},$$

vagyis a deregularizáló algoritmussal egymásba vihető mintázatok a szimbolikus síkon egy origóba tartó egyenesen helyezkednek el. (Ezt később a 4. fejezetben a 10. ábrán magyarázom.)

3.3. Az 1. tétel bizonyítása

(1)-be behelyettesítve (2)-t és (3)-at:

$$(4) \quad \frac{1}{\bar{v}} + \frac{1}{\bar{n}} = \frac{E + \chi}{2E}$$

\bar{v} -t kifejezve:

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{E + \chi}{2E} - \frac{1}{\bar{n}} = \frac{\bar{n} \cdot E + \bar{n}\chi - 2E}{2E \cdot \bar{n}}$$

$$(5) \quad \bar{v} = \frac{2E \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot E + \bar{n} \cdot \chi - 2E}$$

Mivel a deregularizáló algoritmus simító művelete csomópontonként maximum kétszer végezhető el, ezért az élek száma maximum $2V$ -vel csökkenhet, azaz \bar{v}^* (3)-ból a következőképp fejezhető ki:

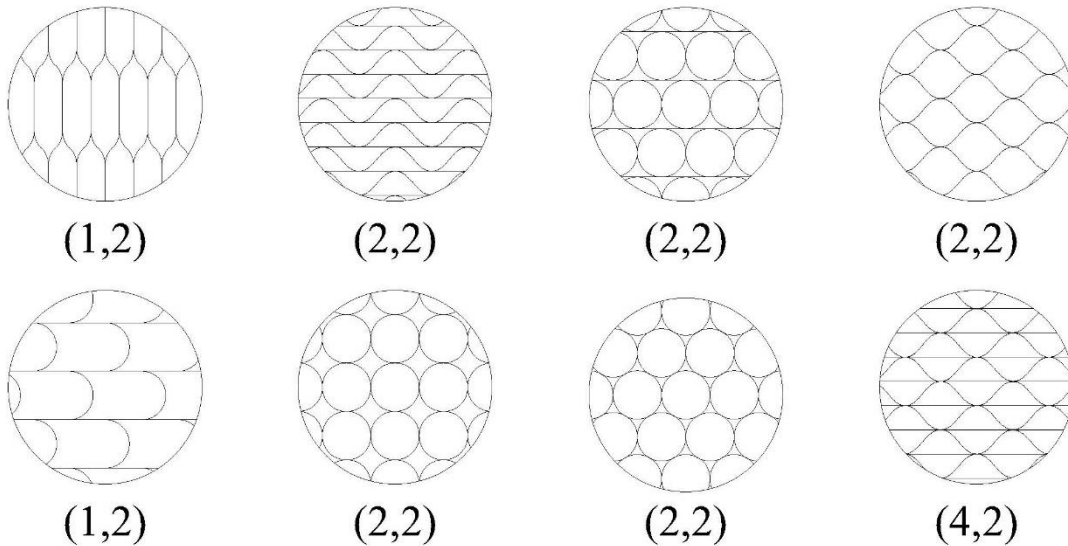
$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{v}^* &\geq \frac{2E - 2V}{F} = \frac{2E}{F} - \frac{\frac{V}{2E} \cdot 4E}{F} = \bar{v} - \frac{\frac{1}{\bar{n}} \cdot 4E}{F} = \\ &= \bar{v} - \frac{1}{\bar{n}} \cdot 2\bar{v} = \bar{v} \left(\frac{\bar{n} - 2}{\bar{n}} \right) \end{aligned}$$

(5)-öt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \bar{v}^* &\geq \frac{2E \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot E + \bar{n} \cdot \chi - 2E} \cdot \frac{\bar{n} - 2}{\bar{n}} = \frac{2E \cdot \bar{n} - 4E}{\bar{n} \cdot E + \bar{n} \cdot \chi - 2E} \\ \bar{v}^* &\geq 2 - \frac{2\chi\bar{n}}{E(\bar{n} - 2) + \chi\bar{n}} \end{aligned}$$

és ezzel beláttuk az 1. Tételt. Q.e.d.

Az egyenlőtlenség élességét a 9. ábra példái igazolják:



9. ábra Példák $\bar{v}^* = 2$ mintázatokra

4. MINTÁZATOK A SZIMBOLIKUS SÍKON

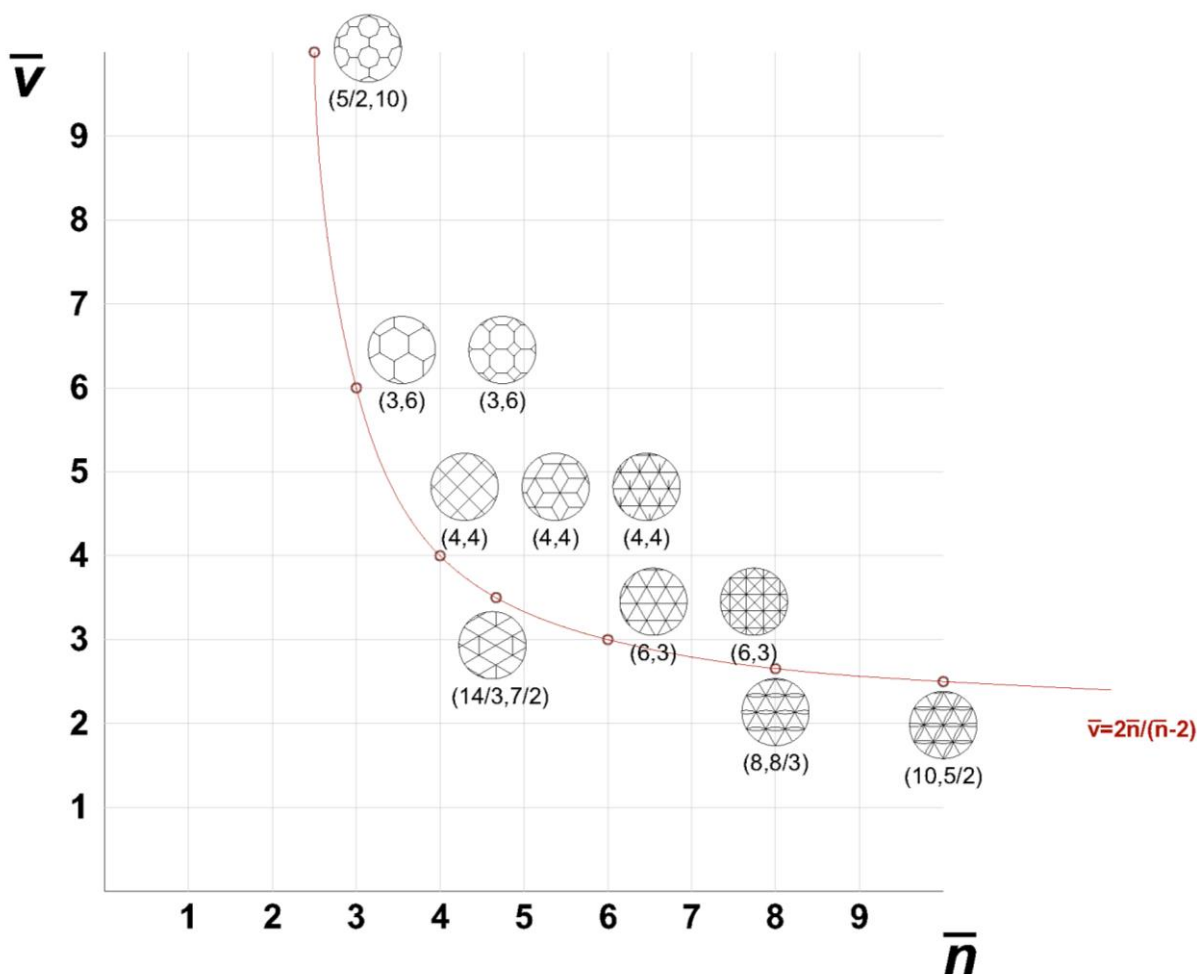
Ahogy korábban bemutattam, a mintázatokhoz egyértelműen hozzá tudjuk rendelni a \bar{v}, \bar{n} kombinatorikus fokszámokat és a \bar{v}^*, \bar{n}^* törés-fokszámokat, melyeket értelmezhetünk az $[\bar{n}, \bar{v}]$ kombinatorikai szimbolikus sík, illetve az $[\bar{n}^*, \bar{v}^*]$ metrikus szimbolikus sík egy-egy pontjaként. Az alábbiakban ezt az ábrázolásmódot elemezzük néhány példán keresztül. Elsőként bevezetünk egy hasznos fogalmat:

8. Definíció

Legyen

$$(7) \quad \bar{h} = \frac{\bar{v}\bar{n}}{\bar{v} + \bar{n}}$$

az M felosztás harmonikus indexe. [4]



10. ábra Végtelen periodikus mozaikok az $[\bar{n}, \bar{v}]$ síkon

Ezután helyettesítsük (7)-be a (4) egyenlet megfelelően átalakított változatát:

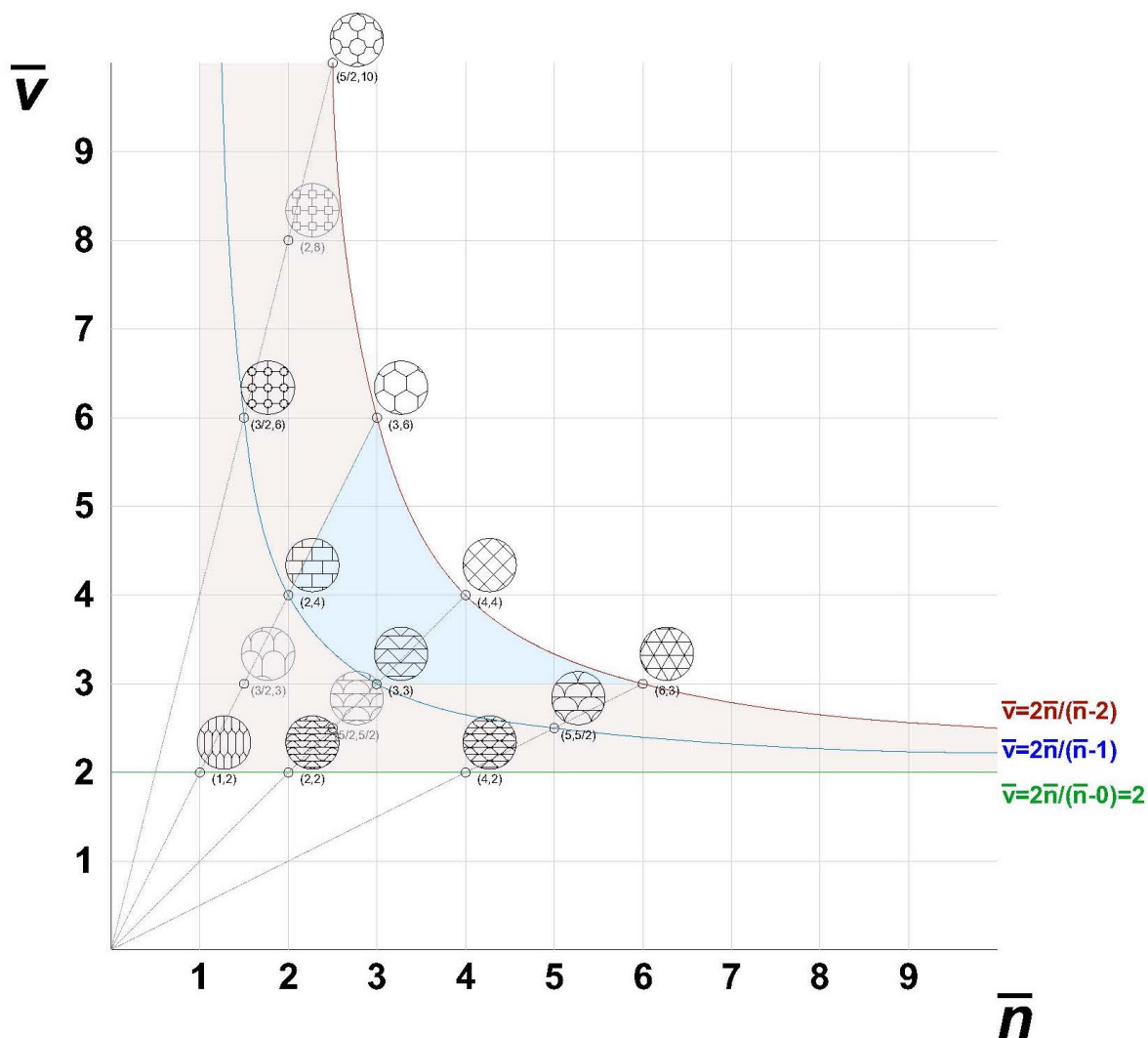
$$\frac{\bar{v} + \bar{n}}{\bar{v}\bar{n}} = \frac{E + \chi}{2E}$$

Behelyettesítve:

$$(8) \quad \bar{h} = \frac{2E}{E + \chi}$$

(8)-ből következik, hogy ha $E \rightarrow \infty$ (ami például periodikus mintázatoknál mindig teljesül) vagy $\chi = 0$ (ami a tóruszon teljesül), akkor $\bar{h} \rightarrow 2$.

Ez azt jelenti, hogy az $[\bar{n}, \bar{v}]$ kombinatorikai szimbolikus síkon a végtelen mozaikok mind a $\bar{h} = 2$ (azaz $\bar{v} = \frac{2\bar{n}}{\bar{n}-2}$) hiperbolán helyezkednek el. Ezt mutatja be néhány példával a 10. ábra.



11. ábra Néhány reguláris mozaik fejlődése a deregularizáló algoritmussal

Ha áttérünk a metrikus $[\bar{n}^*, \bar{v}^*]$ szimbolikus síkra, akkor $\bar{h} = 2$ hiperbolán túl kibővül az a tartomány, ahol a mozaikok elhelyezkedhetnek. (Megjegyezzük, hogy a reguláris mozaikok a

kombinatorikus és metrikus szimbolikus síkon is azonos helyen ($\bar{h} = 2$ hiperbola) helyezkednek el.)

A deregularizáló algoritmussal a hiperbola bármely pontjából kiindulva haladhatunk az origó felé egy egyenes sugár mentén.

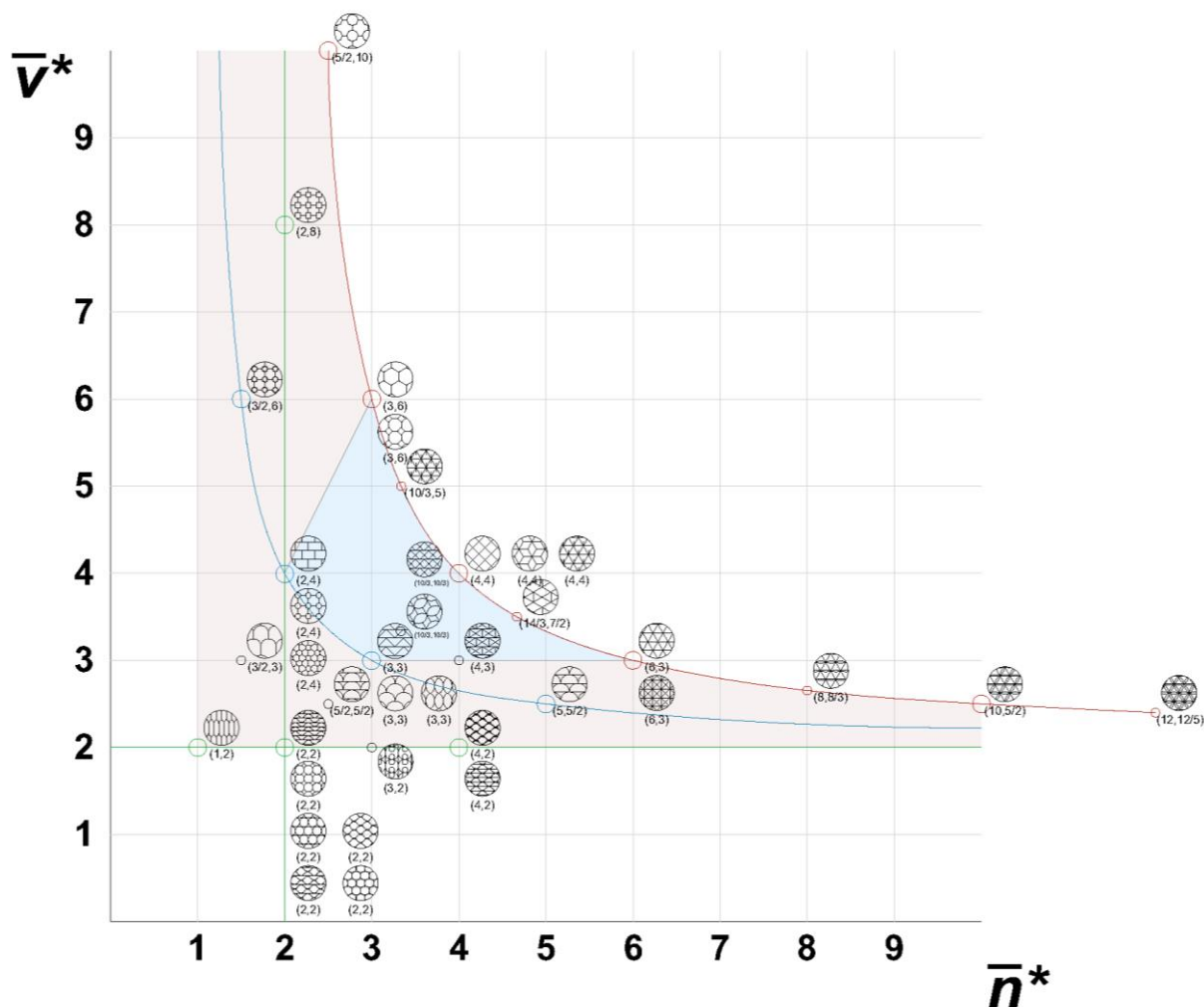
Megjegyzés: Ezeket a sugarakat *konstans cellasűrűségnek* nevezzük [16].

Ha minden csomópontban legalább 3 él találkozik, akkor pontosan a $\bar{v}^* = 2$ egyenesig transzformálhatjuk a mozaikot. Ezt a folyamatot mutatja be a 11. ábra. Itt

- a $\bar{v}^* = \frac{2\bar{n}^*}{\bar{n}^*-2}$ hiperbolán $\rho = 1$ értékű mozaikok szerepelnek

- a $\bar{v}^* = \frac{2\bar{n}^*}{\bar{n}^*-1}$ hiperbolán $\rho = \frac{1}{2}$ értékű mozaikok szerepelnek

- a $\bar{v}^* = 2$ egyenesen $\rho = 0$ értékű mozaikok szerepelnek.

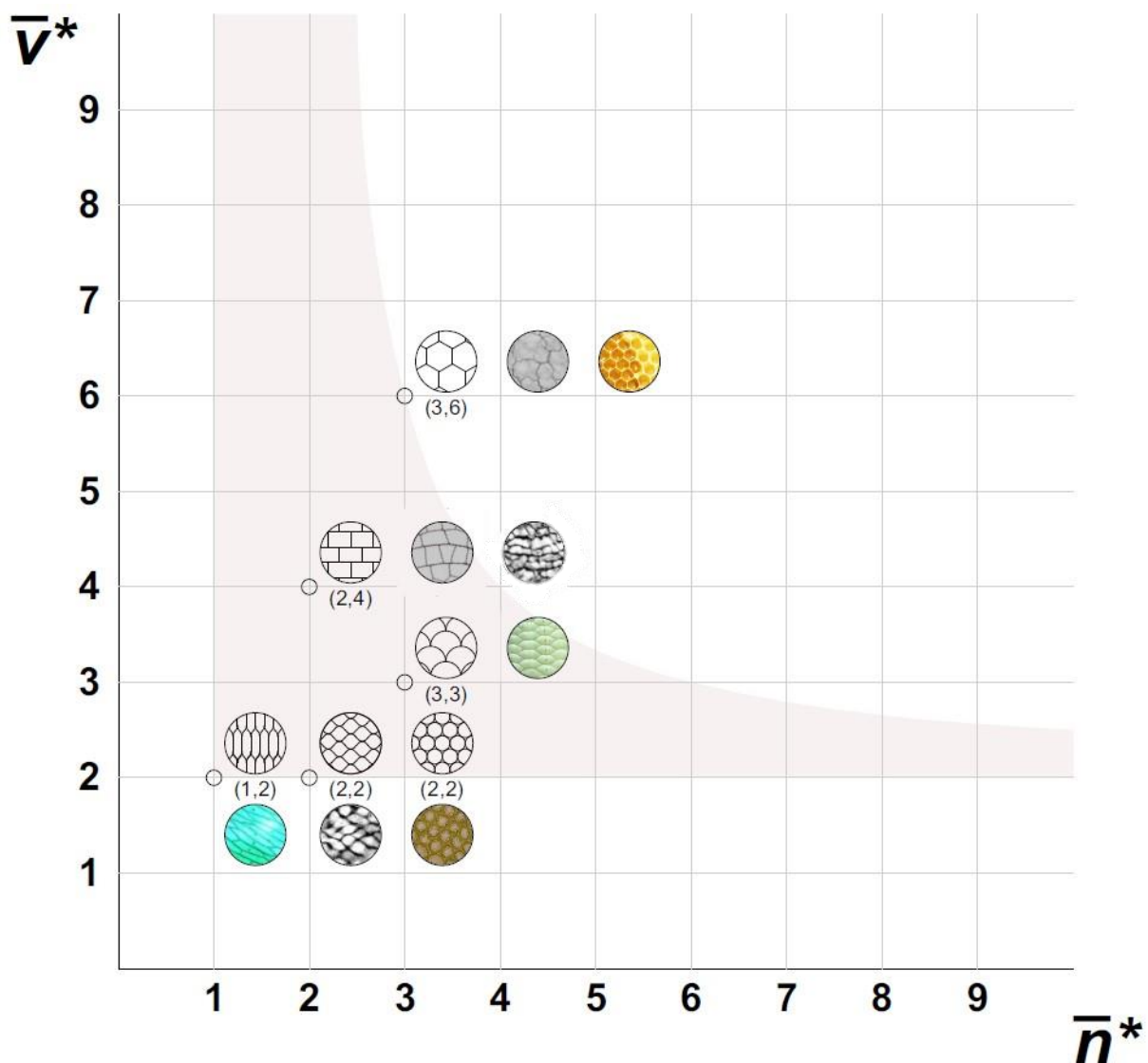


12. ábra Mozaikok lehetséges elhelyezkedése a metrikus szimbolikus síkon, példákkal illusztrálva. Piros hiperbola: reguláris mozaikok mértani helye. Világoskék tartomány: konvex mozaikok mértani helye. Szürke (és világoskék) tartomány: Síkbeli mozaikok mértani helye.

Végtelen sok mozaikot ábrázolhatunk az $[\bar{n}^*, \bar{v}^*]$ síkon, ezekből néhányat felrajzoltam a 12. ábrán. Arról már korábban volt szó, hogy a reguláris mozaikok helye a piros hiperbola. Érdeemes megjegyezni [4], hogy a konvex mozaikok mind a kék területen fognak elhelyezkedni, az összes mintázat helye pedig ezekkel együtt a szürkével megjelölt rész. Jól látható, hogy ennek az alsó határa a $\bar{v}^* = 2$ egyenes, amely alsó korlát az 1. Tételből következik.

5. ALKALMAZÁSOK

Ahogy a bevezetésben is láthattuk, rengeteg természetes és mesterséges mintázattal találkozunk a hétköznapiakban is. Ezek megértésében segíthet a jelen matematikai vizsgálat. A mintázatok kombinatorikai és törés-átlagait megmérve, következtethetünk ezekből akár hegységek keletkezési folyamataira, de többet tudhatunk meg például bolygófelszínekről is, melyekről számos űrszonda juttatott már el képet [17]. Jellemezhetünk falakat, új szempontból tanulmányozhatjuk az állékonyságukat [16].



13. ábra Természetes mintázatok és azok közelítő geometriai modelljei a szimbolikus síkon. Minták (fentről, balról jobbra): repedezett talaj, méhsejt, szitakötő szárnya, víz hullámzása, halpikkely, növényi sejtek, víz hullámzása, növényi sejtek

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A kutatásom eredményeként beláttam, hogy a normál-cellafelbontások esetén a legkisebb törés-fokszám átlag 2 lehet, és példákkal illusztráltam ennek a határnak az élességét.

Ehhez először bevezettem a kombinatorikus és törés-fokszámokat és ezek átlagát, melyekkel jól jellemezhetőek az egyes mozaikok.

Létrehoztam a deregularizáló algoritmust, mellyel az élpárok kisimításával csökkenteni tudtam a cellák törés-fokszámát. Ennek az algoritmusnak a használatával beláttam az 1. Tételt.

Érdeemes megvizsgálni miként osztályozhatjuk ezeket a mintázatokat. A bevezetett fokszámok segítségével könnyen elhelyezhetjük őket egy $[\bar{n}, \bar{v}]$ kombinatorikai és egy $[\bar{n}^*, \bar{v}^*]$ metrikus szimbolikus síkokon. Ebből több érdekes következtetést vonhatunk le. Meghatározhatjuk például a reguláris mozaikok, a poligonális mozaikok mértani helyét és hasonló módon tárgyalhatunk több más mozaiktípust is. Megmutattam, hogy a deregularizációval fejlődő mozaikok az $[\bar{n}^*, \bar{v}^*]$ metrikus szimbolikus síkon az origóba tartó egyeneseken mozognak.

A továbbiakban az állítások több dimenziós verzióit tervezem vizsgálni, az 1. Tétel általánosítása jó alapot adhat a kutatás folytatásához.

A dolgozatom elején bemutatott példák, illetve a [16] kutatás azt mutatják, hogy az itt bevezetett fogalmak és eredmények kiválóan alkalmazhatóak természeti és mesterséges mintázatok törvényszerűségeinek feltárására. Tervezem, hogy a matematikai elmélet fejlesztésén túlmenően több ilyen alkalmazással is foglalkozni fogok.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm a dolgozat elkészítésében nyújtott folyamatos segítséget és támogatást és a téma iránti elkötelezettséget, érdeklődést és ötleteket konzulenseimnek, Dr. Domokos Gábornak és Dr. G. Horváth Ákosnak.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] P. M. Adler and J-F. Thovert. *Fractures and Fracture Networks*. Springer, Dordrecht, 1999.
- [2] W. Chang. Application of tessellation in architectural geometry design. *E3S Web of Conferences, ICEMEE 2018*, 38 (03015), 2018, DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20183803015>
- [3] Gábor Domokos, Douglas J. Jerolmack, Ferenc Kun, and János Török. Plato's cube and the natural geometry of fragmentation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(31):18178-18185, 2020.
- [4] Gábor Domokos, Zsolt Lángi. On Some Average Properties of Convex Mosaics. *Experimental Mathematics*, 2019, DOI: <https://doi.org/10.1080/10586458.2019.1691090>
- [5] L. Goehring and S. W. Morris. Scaling of columnar joints in basalt. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 113(B10), 2008.
- [6] Lucas Goehring. Evolving fracture patterns: columnar joints, mud cracks and polygonal terrain. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(2004):20120353, 2013.
- [7] C. Gold. Tessellations in gis: Part ii-making changes. *Geo-spatial Information Science*, 19:157 - 167, 2016.
- [8] B. Grünbaum and G.C. Shepard. *Tilings and Patterns*. Freeman and Co., New York, 1987.
- [9] E. Heller and E. Fuchs. Tissue patterning and cellular mechanics. *Journal of Cell Biology*, 211:219 - 231, 2015.
- [10] C.E. Horne. *Geometric Symmetry in Patterns and Tilings*. Woodhead Publishing, 2000.
- [11] B. Jiang. A topological pattern of urban street networks: Universality and peculiarity. *Physica A*, 384:647 - 655, 2007.
- [12] D. Kazanci and A. Vince. A property of normal tilings. *Am. Math. Monthly*, 111:813 - 816, 2004.

- [13] E. Laruelle, N. Spassky, and A. Genovesio. Unraveling spatial cellular pattern by computational tissue shuffling. *Communication Biology*, 3, 2020.
- [14] D. Schattschneider and M. Senechal. *Tilings. Chapter 3 in: Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 2004.
- [15] S. Steacy and C. Sammis. An automaton for fractal patterns of fragmentation. *Nature*, 353:250-252, 1991.
- [16] Nagy Klaudia. Falak geometriája. BME, ÉPK, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék, Tudományos Diákköri Konferencia. 2020, <http://tdk.bme.hu/EPK/DownloadPaper/Falak-geometriaja>
- [17] Nagle-McNaughton, T.P., Scuderi, L.A. Networked configurations as an emergent property of transverse aeolian ridges on Mars. *Commun Earth Environ*, 2, 217, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1038/s43247-021-00286-5>
- [18] L. Goehring, Evolving fracture patterns: Columnar joints, mud cracks and polygonal terrain. *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.* 371, 20120353 (2013).
- [19] X. Ma, J. Lowensohn, J. C. Burton, Universal scaling of polygonal desiccation crack patterns. *Phys. Rev.* 99, 012802 (2019).
- [20] L. Goehring, A. Nakahara, T. Dutta, S. Kitsunozaki, S. Tarafdar, Desiccation Cracks and Their Patterns: Formation and Modelling in Science and Nature (John Wiley & Sons, New York, NY, 2015).

ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra
- 1: <https://sarahmatwiejewportfolio.wordpress.com/2013/01/15/personal-identity-microscope-cell-photography-foundation-art-design/>
 - 2: <https://p0.pikist.com/photos/641/436/crack-cracky-cracked-old-paint-background-pattern-fault-paint.jpg>
 - 3: <https://www.dpreview.com/challenges/Entry.aspx?ID=822020>
 - 4: <https://www.carolina.com/plant-microscope-slides/typical-plant-cells-wm-microscope-slide/301700.pr>
 - 5: <https://www.flickr.com/photos/omnia/153480671/in/photostream/>
 - 6: <https://thumbs.dreamstime.com/b/magnified-view-dragonfly-wing-detail-164733898.jpg>
 - 7: https://o.quizlet.com/lGw4-hvvEKIs9gAtJDxCvw_b.jpg
 - 8: <https://fineartamerica.com/featured/old-damaged-worn-brick-wall-pattern-juhani-viitanen.html>
 - 9: https://lh4.googleusercontent.com/-tF_Ud1MWDsA/UzW-6Q5j2cl/AAAAAAAAADak/RftHHkqYJpQ/w1598-h495-no/DSC_1514_02.JPG
 - 10: <https://www.wallpaperflare.com/nature-animal-wild-animals-skin-giraffe-pattern-close-up-wallpaper-wukbg/download/2732x2048>
 - 11: <https://kreativlakas.com/padloburkolatok/mozaikpadlo-tulajdonsagai/>
 - 12: https://image.freepik.com/photos-gratuite/fond-terre-sechee-grise-craquelee_9635-468.jpg
 - 13: <https://www.smithsonianmag.com/science-nature/science-behind-natures-patterns-180959033/>
 - 14: <https://news.stanford.edu/2017/08/31/new-solar-cell-inspired-insect-eyes/>
 - 15: <https://marmor-mosaike.de/GK077.html>
 - 16: saját fotó
 - 17: <https://www.smithsonianmag.com/science-nature/science-behind-natures-patterns-180959033/>
 - 18: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/epoly-2020-0049/html>
 - 19: <https://www.permaculturenews.org/2017/06/09/patterns-natural-world-nature-measure/>
 - 20: saját fotó

