

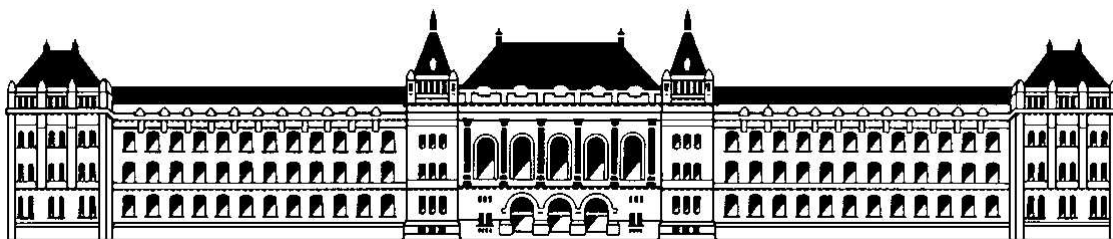


BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

TDK Dolgozat

Roszevák Zsolt

2015



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Építőmérnöki Kar

Hidak és Szerkezetek Tanszék

TDK dolgozat

**Előregyártott vasbeton gerendák numerikus
és kísérleti vizsgálata**

Készítette: Roszevák Zsolt DQVAU0

Konzulens: Dr. Haris István

Dr. Hortobágyi Zsolt

Tanév: 2015/2016 Ősz

Előregyártott vasbeton gerendák numerikus és kísérleti vizsgálata

Roszevák Zsolt (DQVAU0)

Konzulensek: Dr. Haris István (HSZ) és Dr. Hortobágyi Zsolt (ME)

TDK dolgozatomban tanulmányt készítek a mechanikai anyagmodellekről. Bemutatom az egyszerűbb anyagmodellektől kezdve pl.: rugalmas és képlékeny anyagmodellek, az összetettebb anyagmodelleket. Hangsúlyt fektetek, kifejezetten a betonra megalkotott anyagmodellekre és a vasbetonszerkezetekre használatos numerikus és végeselemes technikák bemutatására.

Végeselemes módszer alkalmazásával három különböző vasalású gerendát modellezek. A gerendák típus szerint: alulvasalt, normálisan vasalt és túlvasalt. A gerendák fesztávolsága 1,00 m és harmadpontos teherrel terheltek. A gerendákon lineáris, nemlineáris vizsgálatot is futtatok, majd különböző betonra vonatkozó anyagmodellekkel is végzek futtatásokat. A numerikus modellek eredményeit valós kísérletekkel is összevetem, így mindegyik típusú gerendából készül 3 darab kísérleti gerenda, melyeket laboratóriumban vizsgálók.

A dolgozat célja:

- összefüggést teremteni a numerikus modellek és a valós kísérletek között, azaz megtalálni azt a számítógépes modellt, mely a legjobban tükrözi a valóságot.
- megtalálni azt az anyagmodellt, mely egy adott jellemzőre (lehajlás, repedésterjedés, stb.) a legpontosabb eredményt szolgáltatja.
- a legjobbnak ítélt anyagmodell esetleges további felhasználása vasbetonszerkezetek tervezésére és vizsgálatára.

Numerical and experimental analysis of prefabricated reinforced concrete beams

Zsolt Roszevák (DQVAU0)

Supervisors: István Haris, PhD (HSZ) and Zsolt Hortobágyi, PhD (ME)

In my TDK thesis, I make a study for material modelling. I present, ranging from simple material models such as.: elastic and plastic models, to complex elastic perfectly plastic models with softening. Emphasis is placed, presenting a specially constructed concrete material models and the use of reinforced concrete structures numerical and finite element techniques.

Using the finite element method, I'm modelling with three different reinforcement type of beams. The span of the beams are 1.00 m and the load of the beams are third-pointed. I make test with the beams of linear, non-linear analysis, and I doing runs with different material models of concrete. The results of the numerical models, I'd like to compare real experiments, so each type of experimental beam made of three pieces, which I'm doing analysis in the laboratory.

The target of the thesis:

- the relationship established between numerical models and real experiments, that is, to find a computer model that best reflects reality.
- find the material model, which is a particular characteristic (deflection, crack-spreading, etc.) provides the most accurate results.
- find the best material model, wherewith the engineers can use to analysis and design the reinforced concrete structures.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Az anyagok mikroszerkezete	2
2.1. Az atomi szintű kapcsolati erők	2
2.2. Az anyagok belső rendezettsége.....	2
2.3. Az anyag belső hibái	4
2.4. Szilárdsági paraméterek az anyag mikroszerkezetének függvényében.....	5
3. Az anyagmodellek definíciója	7
3.1. Az anyagmodellek paraméterei	7
3.2. Modellalkotás	8
4. Anyagmodellek	8
4.1. Rugalmas anyagmodellek	8
4.2. Hiperelasztikus anyagmodellek.....	9
4.2.1. Lineárisan-rugalmas hiperelasztikus modellek	10
4.2.2. Nemlineárisan rugalmas hiperelasztikus modellek	10
4.2.5. Kis alakváltozások modellezése hipoelasztikus modelleken	11
4.2.6. Ciklikus terhelés modellezése hipoelasztikus kapcsolati egyenletekkel.....	12
4.3. Képlékeny anyagmodellek	13
4.3.1. Folyási feltételek	14
4.3.2. Izotrop anyagok folyási feltételei.....	15
4.3.2.1. Tresca-modell.....	15
4.3.2.2. Huber-Mises-Hencky modell	16
4.3.2.3. Rankine-modell	17
4.3.2.4. Mohr-Coulomb-modell	18
4.3.2.5. Prager-Drucker-modell.....	20
4.3.2.6. Egyéb folyási feltételek.....	21
4.3.3. Anizotrop anyagok folyási feltételei.....	22

4.3.4. Keményedési feltételek	24
4.4. Rugalmas-képlékeny anyagmodellek.....	26
4.4.1. Deformációs elmélet	27
4.4.2. Növekmény elmélet.....	28
4.5. Rideg és rugalmas-képlékeny-fellazuló anyagok komplex modelljei.....	29
4.5.1. Képlékeny és morzsolódó anyagok.....	29
4.6. Beton modellek	31
4.6.1. Egyparaméteres modellek	34
4.6.2. Kétparaméteres modellek.....	35
4.6.3. Háromparaméteres modellek.....	35
4.6.4. Négyparaméteres modellek	37
4.6.5. Ötparaméteres modellek.....	39
5. Numerikus modellek	41
5.1. Modellek definiálása	41
5.2. Anyagmodellek definiálása	42
5.1.1. „3D Nonlinear Cementitious 2” anyagmodell	44
5.1.2. „3D Variable Nonlinear Cementitious 2” anyagmodell	45
5.1.3. „C20/25 mean values” anyagmodell	45
5.1.4. Acél anyagmodell.....	45
5.3. Megtámasztás és terhelés	46
5.4. Végeselem háló definiálása	47
5.5. Numerikus vizsgálatok eredményei	49
6. Kísérleti program	59
6.1. Próbatetek bemutatása	59
6.2. Terhelési elrendezés bemutatása	60
6.3. Méréstechnika	61
6.4. Mérési eredmények	63

7. Kísérleti és numerikus eredmények összehasonlítása	67
8. Megállapítások	72
9. Összefoglalás	73
10. További kutatási lehetőségek	75
11. Köszönetnyilvánítás	76
12. Felhasznált irodalom	77
Nyomtatott források:	77
Internetes források:	77
12. Mellékletek	79
13/A. Melléklet	79
13/B. Melléklet	81
13/C. Melléklet	82
13/D. Melléklet	83

1. Bevezetés

Napjainkban egy numerikus modell megalkotása szinte elengedhetetlen része a szerkezet tervezésének. A cél az, hogy a tervező által megalkotott numerikus modell a lehető legjobban tükrözze a valóságos szerkezet viselkedését. Tehát szerkezeteink számítógéppel való hiteles modellezése szempontjából nem mindegy, hogy a vizsgálataink során alkalmazott szoftver mennyire kifinomult anyagokra definiált modellekkel rendelkezik. Ezért a dolgozatomban ezzel a kérdéskörrel foglalkozom, kifejezetten előregyártott vasbeton gerendák numerikus és kísérleti vizsgálatain keresztül.

A dolgozat első felében bemutatom, a numerikus vizsgálatokhoz szükséges, napjainkban ismert mechanikai anyagmodelleket. Ismertetésre kerülnek a rugalmas, a képlékeny és a rugalmas-képlékeny anyagmodellek. Külön fejezetben taglalom kifejezetten a betonra megalkotott anyagmodelleket, melyek a numerikus vizsgálataim elméleti alapjait képezik.

Az anyagmodellek bemutatása után részletezem a numerikus vizsgálataim során alkalmazott modelleket. Ismertetem a modellek megalkotásának lépéseit, valamint az alkalmazott anyagmodelleket és azok tulajdonságait. A számítógépes modelljeim megalkotására az ATENA 3D nemlineáris végelelemes programot használtam.

A laboratóriumi kísérletek elvégzéséhez 9 próbatestből álló kísérletsorozatot terveztünk, melynek első két előregyártott vasbeton gerendáját a BME Szerkezet- és Anyagvizsgáló Laboratóriumában vizsgáltunk. A kísérleti összeállítást, a kísérlet menetét valamint a vizsgálatok során kapott eredményeket az erről szóló fejezetben részletesen ismertetem.

Az elvégzett laboratóriumi kísérletek eredményeit összevetem a numerikus számításaim eredményeivel, majd levonom az ezekből megállapítható következtetéseket. Továbbá a következtetéseket alapul véve kitérek a témában való további kutatási irányokra és lehetőségekre.

2. Az anyagok mikroszerkezete

Az anyag belső mikroszerkezete minden olyan mérnök számára érdekes, akik az anyagok modellezésével foglalkoznak. Sok információval szolgálhat egy bizonyos probléma megismerésére vagy megmagyarázására, ha ismerjük az anyag belső mikroszerkezetét és annak a különféle külső hatásokra történő megváltozását. Ha egy vizsgálat során a szerkezethez vagy anyaghoz megfelelő mechanikai modellt választunk és a hatásokat, melyeket a szerkezetnek viselnie kell, megfelelően helyezzük el, akkor a mikroszerkezet változása kellően pontos és a vizsgálatnak megfelelő lesz.

Ahhoz, hogy az anyagok belsejében lejátszódó folyamatokat értelmezni tudjunk, tisztában kell lennünk az atomok és molekulák között fellépő belső kapcsolati erőkkel. Mindenképpen ismernünk kell a mikrostruktúra belső rendezettségét és az ott lévő hibákat is.

2.1. Az atomi szintű kapcsolati erők

Az anyagokban fellépő atomi szintű kapcsolati erők osztályozhatók a kötés erőssége alapján, így beszélhetünk elsődleges és másodlagos kötésekről. Ezeket terjedelmi korlátok miatt itt nem mutatom be, a vonatkozó Építőmérnöki fizika és kémia, *MSc 1. előadásjegyzet, 1-3. oldalán* részletezi.

Az elsődleges kötések lehetnek:

- ionos,
- kovalens,
- fémes kötések.

A másodlagos kötések közül a legfontosabbak:

- Van der Waals kötés
- hidrogén kötés

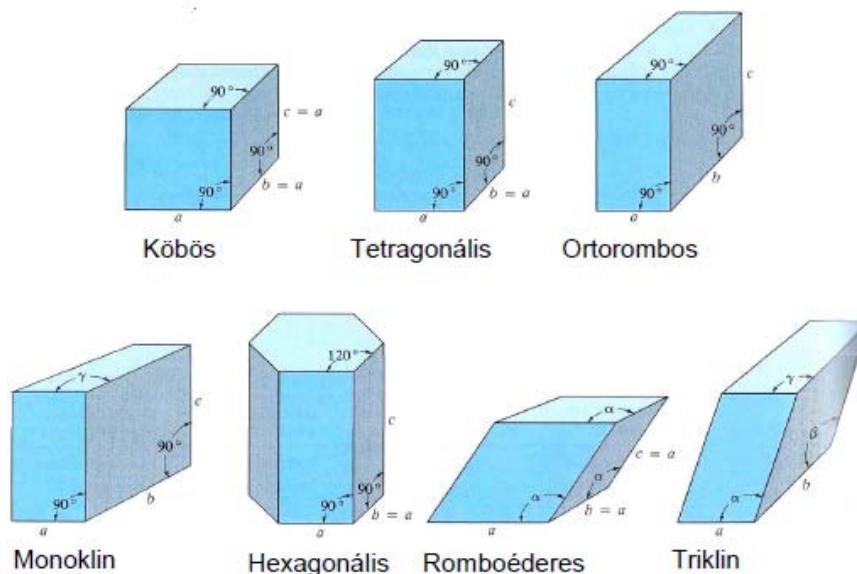
2.2. Az anyagok belső rendezettsége

Az anyag belső felépítése nagyban befolyásolja azt, hogy az őt érő külső hatásokra hogyan reagál. Az építőmérnöki szempontból fontos anyagok legtöbbször szilárd és kristályos szerkezetűek. Az ilyen anyagokban az alkotó atomok, ionok vagy molekulák periodikusan ismétlődő, szabályos térrácsot alkotnak. Az olyan anyagokat, melyeknél tulajdonságuk egy része és kémiai összetételük a kristályban mindenütt azonosnak mondható, homogénnek nevezzük. Azokat az anyagokat melyeknél egy bizonyos tulajdonság valamilyen iránytól függ (pl.: merevség, elektromos- és hővezető képesség) anizotrop anyagoknak nevezzük.

A kristályrácsok felbonthatóak elemi cellákra, ezek a térrács legkisebb elemei, melyek rendelkeznek az egész térrács tulajdonságaival. Egy elemi cella jellemezhető a cella élhosszával és az élek által bezárt szögekkel is. Továbbá az elemi cella jellemezésére a rácsállandót vagy elemi translációt is használhatjuk. Ennek jelentése a két szomszédos pont (térelem) közötti távolság, mely a tér három pontjában lehet egyenlő és különböző is. Fontos mennyiség a rácsenergia, mely a kristályos szilárd test mólnyi mennyiségének kötési energiája. Azaz „*1 mólnak megfelelő mennyiségű ion, atom vagy molekula nagy távolságból kristállyá egyesülése közben ennyi energia szabadul fel.*” [2]

A kristályrácsokra leginkább jellemző tulajdonság a szimmetria, mely meghatározza azt, hogy a térrácsot, melyik kristályrendszerbe sorolhatjuk. Hét fajta kristályrendszert különböztethetünk meg, ezek lehetnek:

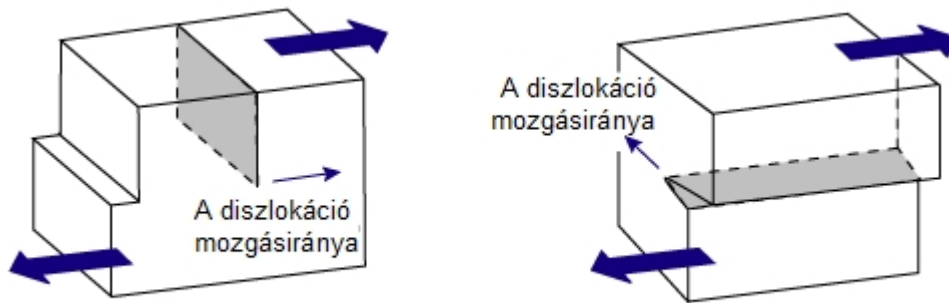
- köbös
- tetragonális
- ortorombos
- monoklin
- hexagonális
- romboédes
- triklin



1. ábra: Kristályrendszerek [2]

Megemlítendő még az elemi cellák alaptípusai is, ezek az:

- egyszerű elemi cella
- tércentrált
- alapcentrált és lapcentrált cellák.



3. ábra: Él- és csavart diszlokáció [13]

2.3. Az anyag belső hibái

A mérnöki gyakorlatban igen fontos kérdéseket és problémákat vetnek fel az anyag belsejében lévő hibák, melyek szerkezeteink vizsgálata szempontjából nem közömbösek. Mondhatni, „*az anyag viselkedését döntően a benne lévő hibák típusa, száma, eloszlása és növekedése szabja meg.*” [1]

A hibák három csoportba oszthatók: csoportosíthatók a kristályok hibáira, felületi hibákra és térfogati hibákra.

A kristályok hibáinak azokat a rendellenességeket nevezhetjük, melyek a tökéletesen periodikus rácstól való különbözőséget mutatnak. Az ilyen tökéletestől eltérő hibák miatt következnek be a mechanikai szempontból fontos tulajdonságok változásai. Beszélhetünk:

- pontszerű rácshibákról

Az ilyen típusú hibáknál az üres rácshelyeken (vakancia) és a nem szabályos rácshelyeken főleg atomok helyezkednek el. A pontszerű hibákon belül két hibát említ a szakirodalom, a *Wagner-Schottky-féle* rácshibát és a *Frenkel-féle* rácshibát.

- *A Wagner-Schottky-féle* rácshiba: „*egy atom vagy ion hiánya, mely a kristály határán keletkezik és diffúzió révén kerül a kristály belsejébe. Koncentrációjuk a hőmérséklettel exponenciálisan nő, a hőmérséklet csökkenésével csökken az üres rácshelyek sűrűsége.*” [1]
- *A Frenkel-féle* rácshiba: „*ebben az esetben egy atom a rácspan belül termikus mozgása során olyan nagy energiára tett szert, hogy helyét elhagyta és így egyidejűleg egy üres rácshely és egy új saját atom keletkezik.*” [1]

- diszlokációk (vonalmenti hibák)

Mechanikai szempontból igen fontos hibának számít. Diszlokációnak nevezzük a deformált kristály azon részét, ahol az elcsúszott és a csúszásmentes tartományok kapcsolódnak. Többek között az ilyen kristályhibák létrejöttével képlekenyednek az anyagok. A diszlokáció lehet él- és csavarási diszlokáció is. Az éldiszlokációnál az elmozdulás irányára merőleges a diszlokáció síkja/vonala, a csavardiszlokációnál azonban párhuzamos azzal.

A felületi hibák általában 3D polikristályos tartományok határán létrejövő inkompatibilitások, ezek nem a kristályrácsban, hanem a különböző szemcsék találkozásánál jönnek létre. Mérnöki szempontból fontos, mivel a fáradási- és rideg törés bekövetkezését segíti elő.

A térfogati hibák legfőképp a kristályon belül, azonban a polikristályos tartományok határán is keletkezhetnek. Legtöbb esetben az ilyen jellegű hibák az anyag belsejében kialakult zárványoknak köszönhetőek, melyek teljesen más mechanikai tulajdonságokkal bírnak, mint maga az anyag.

2.4. Szilárdsági paraméterek az anyag mikroszerkezetének függvényében

Minden mérnök számára fontos lehet a következőkben ismertetett három alapvető paraméter, melyek nélkülözhetetlenek a téma átfogó megismeréséhez. Ezek a rugalmassági modulus, a határszilárdság és a kritikus feszültségintenzitási tényező.

A rugalmassági modulus vagy *Young-modulus* feladata tulajdonképpen „*az anyagban egytengelyű húzás vagy nyomás hatására keletkező pillanatnyi feszültségek és alakváltozások arányának megadása.*” [1]

$$E = \frac{\sigma_x(t)}{\varepsilon_x(t)},$$

ahol t a terhelés időbeni változását jellemzi, E a Young-modulus.

Az anyagból egy egységnyi hasábot kivágva és azt vizsgálva a rugalmassági modulusra a következő képlet ad közelítést:

$$E = \frac{S_0}{r_0}.$$

Azaz az atomok közötti nyugalmi kötéshez tartozó mikromerevség (S_0) és a nyugalmi állapothoz tartozó távolság (r_0) hányadosaként kapjuk a rugalmassági modulus (E) kezdeti közelítő értékét. Ez a közelítés megfelelőnek mondható, mivel az anyag ép állapotához tartozó kezdeti rugalmassági modulus legfőképp az atomi kötések erősségétől függ.

A határszilárdság egy korlát, melyet egy előre rögzített feltételrendszerben adunk meg. Amely anyag ezt a korlátot eléri, ott teherbíró képessége kimerül, az anyag tönkremegy. A határszilárdság esetében megkülönböztetünk rugalmas határfeszültséget, törési határfeszültséget és képlékeny határfeszültséget.

- *A rugalmas határfeszültség* a mérnöki gyakorlatban használatos anyagoknál legtöbbször előforduló fogalom. Ezen anyagok majdnem mindegyikére igaz, hogy modellezhető lineáris vagy nemlineáris, de mindenképpen rugalmas alapon. Így a rugalmas határfeszültséggel jellemezhető a rugalmas állapot határa.
- *A törési határfeszültséget* legtöbbször a rideg anyagok jellemzésére használhatjuk. Az ilyen anyagokban mikrorepedések keletkeznek, majd ezek összefűződése révén az anyagi

folytonosság megszűnik és az anyag tönkre megy. Általában ez igen gyors, (robbanásszerű) folyamat, bár kevésbé rideg anyagoknál (cement, beton) ez lassabban következik be.

- A *képlékeny határfeszültség* ismertetéséhez szükséges a *kezdeti folyási feszültség* ismertetése. Ez a rugalmas határ átlépése után jön létre, az anyagban a mikroszerkezet deformálódik és a növekvő terhelésre a polikristályos tartományok elcsúsznak egymáson. A képlékeny vagy végső folyási határfeszültség pedig a végső tönkremenetelhez tartozó érték.

E három tönkremeneteli módon kívül sok anyag összetett tönkremeneteli módra is hajlamos, azaz egyaránt képlékeny és rideg tönkremeneteli módokkal megy tönkre.

Ahhoz, hogy ezek a határok egy bizonyos anyagnál meghatározhatóak legyenek, szabványosított próbatestekre van szükség, mivel a próbatestek mérete nagyban befolyásolhatja a vizsgálat lefolyását és torzíthatja az eredményeinket.

A leginkább törésmechanikában használatos **feszültségintenzitási tényező** (jele: K) az anyag szívósságát jellemzi. Erre az értékre akkor van szükségünk, ha egy anyagban lévő repedések továbbterjedését szeretnénk vizsgálni. Tulajdonképpen ez a tényező azt fejezi ki, hogy az anyag mennyire érzékeny a benne lévő vagy benne keletkező repedésekre. A repedések csúcseinál a feszültségek hirtelen megnőnek, ún. feszültségkoncentrációk lépnek fel. A feszültségintenzitási tényező azt mutatja meg, hogy a csúcspontban a feszültség hányszorosa a repedéscsúcstól végtelen távolságra lévő feszültségnek. Ezek a repedésközeli megnövekedett feszültségek hirtelen tönkremenetelhez vezethetnek. A feszültségintenzitási tényező is jellemezhető egy határértékkel, mely a feszültségintenzitási tényező kritikus értéke (jele: K_c). A feszültségintenzitási tényező képletszerűen felírva a következő:

$$K = \sqrt{EG}$$

ahol a G paraméter a törésmechanikában az alakváltozási energia megváltozási sebessége, azaz az egységnyi felületű repedés által elnyelt energia és az E a *Young-modulus*.

3. Az anyagmodellek definíciója

Egyszerűen megfogalmazva az anyagmodell egy választ jelent. Ez a válasz többféle lehet, így többféle anyagmodellről beszélhetünk. Az építőmérnöki gyakorlatban, ha anyagmodellről beszélünk, akkor a mechanikai anyagmodellekre gondolunk. Az anyag külső hatásokra adott választ nevezzük anyagmodellnek, esetünkben ezek a mechanikai anyagmodellek. Gyakorlati szempontból talán ezek a legfontosabb modellek egy mérnök számára, mivel ezek segítségével szinte lehetetlen lenne egy szerkezetet megtervezni vagy ellenőrizni. Ezért is foglalkozik rengeteg tudós, kutató ezzel a témakörrel, mivel a gyakorlatban felhasznált anyagok száma egyre nő, így elengedhetetlen az, hogy azok megfelelően pontos modellezése megvalósítható legyen.

3.1. Az anyagmodellek paraméterei

A modellekben használatos paraméterek beállítása és megfelelősége elengedhetetlen ahhoz, hogy egy jó elméleti háttérrel megalkotott modellt használni tudjunk vizsgálataink során. Az anyagainkat annyiféle külső hatás éri, hogy a modellekben szerepeltetett paraméterek korántsem lehetnek olyan pontosak, hogy azzal a tényleges történéseket szemléltetni tudjuk, ezért a paramétereinket úgy kell megválasszuk, hogy azok a lehető legjobb közelítést adják. Ahhoz, hogy az anyagi paramétereket kifogástalanul be tudjuk állítani, kellő figyelmet kell szentelni a modell érzékenységi paraméterére és a kísérleteinkből meghatározott állandóink matematikai kiértékelésére.

- A modellünk különbözőképpen reagál az egyes fajta paraméterek változására, így egyes paraméterekre érzékeny lesz, másokra nem. Lehet olyan anyagállandónk, melynek kis változásával az egész modell viselkedése megváltozik, így rossz eredményeket kapunk a vizsgálat során. E probléma megoldható, ha a numerikus vizsgálatok mellett laborvizsgálatokat is végzünk, ellenőrizve ezzel eredményeink helyességét.
- A laboratóriumi vizsgálatokból kapott adataink feldolgozása manapság egyre gyorsabb, mivel jól alkalmazható és automatizálható rendszerek állnak rendelkezésünkre. Az eredményeinket illeszthetjük egy függvényhez és ezt grafikusán is ábrázolhatjuk. Azonban adódhatnak problémák olyan vizsgálatoknál, ahol nem csak lineáris feladatokat szeretnénk megoldani, pl.: nemlineáris vizsgálatok. Az ilyen esetekben mindenképpen paraméterérzékenység vizsgálatot kell alkalmaznunk és tüzetesen, gondosan kell optimalnunk paramétereinket.

A kész anyagmodellünk tesztelése során nagy odafigyelést igényel az, hogy olyan körülményeket teremtsünk a vizsgálat során, amely majd a tényleges szerkezetünknel megvalósul.

Jól megalkotott anyagmodellnek nevezhető az a modell, mely „*fizikai alapokra épülő folyamatokat modellez, általános fizikai elvek megfogalmazására épül, tehát alkalmas olyan numerikus előrejelzésekre is, amelyek túllépnek az alapvető paraméter-beállítási tesztek szolgáltatása eredményeken.*” [1]

3.2. Modellalkotás

Anyagmodelleket már a 20. század elején alkottak, azonban az utóbbi évtizedekben ezek megalkotása felgyorsult, köszönhetően az informatika fejlődésének. Mikroszerkezeti szinten megalkotott modellek már régóta léteznek, ezeket bővíteni és finomítani is tudták, így egy kimondott anyagra igen hatékonyan alkalmazhatók. Ezzel megszülettek azok a modellek, melyek a kontinuummechanika feltételrendszere és a diszkrét elemekkel történő leírás között képeznek átmenetet.

Nem minden modell alkalmas arra, hogy a mikroszerkezet finom részleteit vizsgálja és annak makroszerkezetre való hatását megmutassa. Az ilyen modell megalkotásához a mechanikai vizsgálatokat is mikroszinten kell elvégeznünk, hogy utána átvezethessük a makroszintű problémákra. Tehát mondhatni a cél az, hogy a mikroszerkezet vizsgálatával becsülni tudjuk a makrotulajdonságokat.

4. Anyagmodellek

4.1. Rugalmas anyagmodellek

Egy test alakja a rá működtetett külső hatás következtében megváltozik. Amennyiben ezen erők eltávolítása után a test visszanyeri eredeti alakját, a testet rugalmas viselkedésűnek nevezzük az adott hatás esetén. A rugalmasságtan alapvető feltevéseit figyelembe véve, egy test rugalmas, ha a terhelés és alakváltozás között egyértelmű összefüggés van és ez az összefüggés lineáris. Az ilyen esetekben a test molekuláris szerkezetét nem vesszük figyelembe, azzal a feltételezéssel élünk, hogy a test anyaga a térfogatában folytonosan oszlik el. További feltételezés, hogy a test anyaga homogén és izotrop.

Ezeket a feltevéseket általában a legtöbb szerkezeti anyag nem elégíti ki. Legtöbb anyagunk nem tekinthető sem homogénnek, sem izotropnak. Azonban a kísérletek azt mutatják, hogy azok az eredmények, melyeket a homogenitás és izotrop tulajdonság figyelembevételével kaptunk, jó közelítésként használhatóak.

A rugalmasságtan elvei alapján méretezzük szerkezeteink döntő többségét, mely mérnöki szempontból egy biztonságot ad, mivel a rugalmas anyagmodellek és megfelelően kiválasztott építőanyagok használatával a szerkezeteinkben jelentős képlékeny többletterherbírás marad. A rugalmasságtan elengedhetetlen tudományág az építőmérnöki gyakorlatban, mivel ez képezi alapját a többi tudományágnak, mint például a lemezek és héjak elmélete, a képlékenységtan, stb.

Elsőként említendő a rugalmas modellek sorában a *Cauchy-féle* anyagmodell, mely csak az anyag pillanatnyi deformációs állapota és pillanatnyi feszültségállapota között ad összefüggést. Ez matematikailag reprezentálva:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}),$$

ahol az F_{ij} a pillanatnyi rugalmas viselkedés függvénye.

Ez az egyenlet reverzibilis és útfüggetlen viselkedést kell, hogy mutasson, azaz a változóknak kölcsönösen egyértelmű módon meghatározhatónak kell lenniük. *Cauchy modelljében* a definíció elégséges volt a rugalmas anyagmodell meghatározásához. Tekintetbe véve, hogy a kapcsolati függvények speciális szerkezetűek *Cauchy modelljén* változtatásokat kellett alkalmazni, mivel a modellje nem állt összhangban a termodinamika első és második főtételével.

George Green volt az, aki a *Cauchy-féle modellt* termodinamikai alapokra helyezte, felhasználva a rugalmas belső alakváltozási energia függvényét.

$$\sigma_{ij} = \frac{\Pi_b}{\varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\tilde{\Pi}_b}{\sigma_{ij}},$$

Így a rugalmas anyagmodellek köre kibővült a *Green-féle anyagmodellekkel*, más néven a *hiperelasztikus anyagmodellekkel*, melyekkel bővebben a 4.2 fejezetben foglalkozom.

A rugalmas modellek közé sorolhatóak még a hipoelasztikus modellek is, melyek tulajdonképpen kevésbé rugalmas modelleknek nevezhetőek. Ezt leginkább olyan anyagoknál alkalmazhatjuk, ahol a rugalmas viselkedés „*disszipatív jelenségekkel is keveredik*”. A hipoelasztikus modellek egyenletei, nem csak a pillanatnyi teljes feszültségtenzortól, hanem az alakváltozástenzor növekményétől is függenek és eredményül a feszültségtenzor növekményét adják.

4.2. Hiperelasztikus anyagmodellek

Ha egy V térfogatú, A felületű rugalmas testre, F_i térfogati és T_i felületi erők hatnak és a testen keletkező σ_{ij} egyensúlyi feszültségmezővel, és a feszültségmezőnek megfelelő és geometriai feltételeket is kielégítő elmozdulás- és alakváltozásrendszer u_i és ε_{ij} –vel jelöljük, akkor a feszültségek meghatározhatók a pillanatnyi alakváltozásmezőből:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}).$$

A virtuális munkaegyenlet segítségével, melyben a δu_i a virtuális elmozdulásrendszer és a belőle keletkező virtuális alakváltozásrendszer $\delta \varepsilon_{ij}$, felírható a következő összefüggés:

$$\int_V \delta \Pi_b dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

mely egyenlet adja a munka mechanikai alakváltozási energiát. Amennyiben ez az összefüggés bármely térfogati integrálra érvényes, felírható:

$$\delta \Pi_b = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij},$$

alakban.

Ha az egyéb belső és a hőmérsékleti változásoktól eltekintünk, akkor az alakváltozási energia megváltozása kifejezhető ε_{ij} teljes differenciáljaként:

$$\delta \Pi_b = \frac{\partial \Pi_b}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} ,$$

Így kapjuk a hiperelasztikus anyagmodell definícióját, mely a következő:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi_b}{\partial \varepsilon_{ij}} .$$

Ennek az ellenkezője is igaz, ha az inverz modellt szeretnénk felírni. Itt a komplementer belső energia csak a feszültségek függvénye, így az inverz modell képletszerűen a következőként adható meg:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \tilde{\Pi}_b}{\partial \sigma_{ij}} .$$

4.2.1. Lineárisan-rugalmas hiperelasztikus modellek

Egy lineáris modellt vizsgálva, Π_b –t egy kvadratikus funkcionálként kell felírnunk, mely tenzoriális alakban a következő:

$$\Pi_b = c_0 + \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} + \beta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} ,$$

ahol c_0 , α_{ij} , β_{ijkl} anyagi konstansok. Az anyagot kezdeti állapotában deformációmentesnek tételezzük fel, és a szimmetria-feltétel is teljesül, valamint a c_0 –t zérusnak vesszük fel. Az α_{ij} szintén nullára adódik, így a nyugalmi szinten az energiafüggvény a következő:

$$\Pi_b = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} .$$

Ez az összefüggés is az általános *Hooke-modell*re vezethető vissza, mivel lineárisan rugalmas izotrop anyagokról beszélünk.

4.2.2. Nemlineárisan rugalmas hiperelasztikus modellek

A nemlineárisan rugalmas izotrop anyagok esetében az alakváltozási energia megadható az alakváltozástenzor bármely három független invariánsának függvényében. Ez a következő:

$$\Pi_b = \Pi_b(\bar{I}'_1, \bar{I}'_2, \bar{I}'_3) ,$$

A hiperelasztikus anyagok modelljének definícióját figyelembe véve:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi_b}{\partial \bar{I}'_1} \frac{\partial \bar{I}'_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \Pi_b}{\partial \bar{I}'_2} \frac{\partial \bar{I}'_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \Pi_b}{\partial \bar{I}'_3} \frac{\partial \bar{I}'_3}{\partial \varepsilon_{ij}} .$$

Ez az összefüggés egyszerűbben felírható, ha az invariánsokat behelyettesítjük, így:

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} + \alpha_3 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} ,$$

ahol:

$$\alpha_i = \alpha_i(\bar{I}_i) = \frac{\partial \Pi_b}{\partial \bar{I}_i} \cdot \text{Ha}$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \bar{I}_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial \bar{I}_i}.$$

Az α_i tagok megfelelő megválasztásával elő tudunk állítani magasabb fokú modelleket is. Tehát a *Green-féle modell* kiegészítő feltételében az α_i tagokkal módosítható a modell, ellentétben a *Cauchy-féle modellel*, melyben ez nem tehető meg.

4.2.5. Kis alakváltozások modellezése hipoelasztikus modelleken

Az ilyesfajta modellek értelmezésével és elfogadásával kapcsolatban a tudományos világ e terén eltérő vélemények fogalmazódtak meg. Legtöbbször az ilyen modelleket akkor alkalmazhatjuk, amikor a fizikailag leírható jelenségek mellett számottevő irreverzibilis hatás is megjelenik az anyag viselkedésében.

A hipoelasztikus modelleket *Ronald S. Rivlin* és *Jerald L. Ericksen* svéd fizikusok dolgozták ki a 20. század közepén. Ők „*olyan kapcsolati egyenleteket ajánlottak, ahol a feszültségek növekményei a feszültségállapot teljes értékétől illetve az alakváltozások növekményétől függnnek.*” [1] Arra a következtetésre jutottak, hogy az izotrop anyagok esetén a hipoelasztikus modell válaszfüggvényének invariánsnak kell lennie az alkalmazott bázisfüggvények koordináta-transzformációival szemben.

Rivlin és *Ericksen* nevéhez fűződik az izotrop és időfüggetlen hipoelasztikus anyagok legáltalánosabb modellje, ahol a függvények alakját az anyagnál laboratóriumi kísérletek alapján lehet felvenni. Ennek a modellnek a legegyszerűbb változata ismét az általános Hooke-modell növekményi alakja, melyet nulladrendű hipoelasztikus kapcsolati egyenletnek is nevezhetünk.

A hipoelasztikus modellek okkal sorolhatók a rugalmas modellek családjába, mert ha egy elemien kicsiny anyagi részre egy infinitezimálisan kicsiny alakváltozásnövekményt működtetünk, majd ezt az anyagon visszaállítjuk a kiindulási állapotba, akkor a feszültségkomponensek is visszatérnek eredeti állapotukba. Tehát mondhatjuk, hogy az infinitezimálisan kicsiny deformációkra a hipoelasztikus modellek reverzibilis viselkedést mutatnak, melyet növekményjellegű reverzibilitásnak említ a szakirodalom. A *Cauchy*- és *Green* modellek itt ütköznek az ilyen modellek elveivel, mivel azok útfüggetlen jellege nem igaz, vagyis a különböző feszültség-alakváltozás összefüggésekre más és más feszültségi utaknak megfelelő integráljai eltérőek.

Fontos megemlíteni a hipoelasztikus modelleknél, hogy figyelembe kell vennünk a feszültség- és alakváltozás okozta anizotropiát. Ez tulajdonképpen a terhelés közben megváltozó merevségi mátrix feszültségfüggő elemeinek megváltozását jelenti. Az eleinte teli mátrixnak megszűnik az izotrop jellege, a feszültségi és alakváltozási fő-irányok nem esnek

egybe, sőt olyan eset is létezhet, amikor az anyagi merevségi mátrix elvesztheti szimmetrikus voltát.

4.2.6. Ciklikus terhelés modellezése hipoelasztikus kapcsolati egyenletekkel

Az ilyesfajta modellek alkalmazása a mérnöki gyakorlatban sokszor előfordul, bár alkalmazásuk vitatható. A ciklikus viselkedés modellezésére különleges hipoelasztikus modelleket használunk, melyek a terhelés egyes ciklusaiban különböző modelleket alkalmaznak. Tehát megkülönböztetünk a terhelésnél, tehermentesítésnél és újrateherelésnél használatos modelleket. A feszültség-alakváltozás összefüggések növekményi egyenletei legtöbbször izotrop, lineárisan rugalmas modellekből alakíthatók ki a szilárdsági paraméterek érintőmodulusokkal való helyettesítésével. Ezek a feszültség és/vagy az alakváltozás invariánsok függvényei, melyek más és más alakban adódnak a terhelés, tehermentesítés és újrateherelés fázisaiban. Egydimenziós feszültségi állapotokban ezek a ciklusok egyértelműek, azonban térbeli feszültségi állapotban nem. Térbeli feszültségi állapotban előfordulhat, hogy az anyag az egyik irányban terhelés alatt áll, a másik irányban pedig tehermentesül.

Megemlítendő, hogy a minden koordináta-rendszerben invariáns tehermentesítési feltételeket csak olyan összefüggésekkel adhatjuk meg, melyek maguk is invariánsak a koordináta-transzformációkkal szemben. Ezt a feltételt a feszültséginvariánsok valamilyen függvényének segítségével adhatjuk meg.

A hipoelasztikus modelleknél nem bevezetett a terhelési függvények alkalmazása, ehelyett valamilyen egyszerű, a hidrosztatikus és deviátoros részeket külön-külön kezelő kritériumot használnak. Az ilyen modellek másik fontos problémája, hogy semleges terhelés esetén szembeütköznek a feszültségi utak folytonossági kritériumával.

4.3. Képlékeny anyagmodellek

A mérnöki gyakorlatban széleskörűen alkalmazott anyagok határteherbírásukhoz közel már nem kifejezetten rugalmasan viselkednek. Létrejönnek bennük olyan visszafordíthatatlan deformációk, melyek nagymértékben átalakítják az anyag belső szerkezetét. Ezek a széles körben elterjedt anyagok a fémek, melyek szilárdsági, hegeszthetőségi és duktilitási tulajdonságai igen fontos kérdések a szerkezet-építőmérnökök számára. A szilárdság nyilvánvalóan fontos a szerkezet tervezésénél, mivel ezzel tudjuk a terhek okozta feszültségekkel szemben a szerkezetünket megfeleltetni. A hegeszthetőség kivitelezési és tervezési szempontból is fontos. Egyrészt, mert ez az egyik eszköze annak, hogy a szerkezetünk egyes komponenseit illeszteni tudjuk és egy úgymond folytonos szerkezetet tudjunk létrehozni, másrészt a hegesztés okozta lokális változások az egész szerkezet teherbírására is kihathatnak. A duktilitás az anyag alakíthatóságának mértékét határozza meg. Jelentése tulajdonképpen a képlékeny alakíthatóságra való képesség. Ilyen képlékeny tulajdonsággal jellemezhető a fémek többsége és a polimerek is. A képlékeny viselkedés lényege a magasabb feszültség szinten az anyag belsejében megnövekvő diszlokációkban rejlik. Tehát az anyagban irreverzibilis deformációk keletkeznek, melyek kihatással vannak az anyag terhelés alatti viselkedésére. Joggal mondhatjuk, hogy „*az irreverzibilitás a képlékeny anyagok egyik legfontosabb tulajdonsága*”. [1]

A képlékeny elméletek feladata kettős: elsőként kapcsolatot teremt a feszültség és alakváltozás között, melyekkel megfigyelhetők az anyagok képlékeny alakváltozásai, továbbá technikák kidolgozása a szerkezeteink vizsgálatában és tervezésében. A képlékeny anyagmodellek és elméletek használata egy szerkezet-építőmérnök számára igen hasznos lehet, mivel szerkezete fő elemeit különböző egyszerű feltételekkel vizsgálhatja gyorsan, bár durva közelítéssel. Persze a tervezés későbbi szakaszában néhány finomítás valószínűleg szükséges a megfelelő szerkezet kialakításához, azonban a tervezés kezdeti szakaszán az ilyen modellek alkalmazása rengeteg energiát, időt takarít meg és fölösleges, bonyolult számítások végrehajtásától menti meg a mérnököket.

A képlékeny elméletek az anyagi viselkedés kivételesen egyszerű idealizációján alapulnak, melyek a mérnökök számára lehetővé teszik, hogy megértsék a különböző szerkezetek viselkedését, valamint racionális tervezési eljárásokat hozhassanak létre.

Egy képlékeny modell akkor tekinthető korrektnek és megbízhatónak, ha egy komplex terhelési folyamatot ír le, azaz követi az anyag terheléstörténetét. A képlékenységtanban használatos modelleket két nagy csoportba szokták sorolni, melyek között a mechanikai viselkedésben rejlik nagy különbség.

Az egyik ilyen csoport a deformációs elmélet modelljeit leíró egyenleteket és összefüggéseket tartalmazza, a másikat a növekményi elmélet modelljei alkotják. A deformációs elmélet modelljei a teljes alakváltozás és feszültségtenzor közötti összefüggést írják le, mely a következő alakban adható meg:

$$\sigma_{ij} = F(\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}.$$

Ez egy feszültségfüggő kapcsolatot fogalmaz meg, és ezek az egyenletek integrálhatóak.

A növekményi modelleknél a feszültség-alakváltozás kapcsolat csak a növekményre írható fel, ezért a növekményi összefüggések nem integrálhatóak. A kapcsolati függvény a következő:

$$d\sigma_{ij} = \hat{F}(\sigma_{ij})d\varepsilon_{ij}.$$

Ez a fajta kapcsolati egyenlet legfeljebb lineáris kapcsolatot tud alkotni a növekmények között.

4.3.1. Folyási feltételek

A folyási feltételek a rugalmas állapot határát és a képlékeny állapot kezdetét hivatottak szimbolizálni. Az időfüggetlen homogén anyagoknál a folyási feltétel függvénye független a vizsgált anyagrész pozícióját leíró koordinátáktól és az időtől, csak a feszültségtenzortól valamint az éppen vizsgált anyag képlékeny tulajdonságait leíró H_k paramétertől függ. Ideálisan képlékeny anyagoknál a H_k paraméter a rögzítettnek tekintett feszültségi korlátot jelenti. Ekkor a hiperfelület a feszültségtérben rögzített helyzetű, nem végezhet translációs mozgást. A képlékenységi feltétel általános matematikai alakja a következő:

$$F(\sigma_{ij}H_k) = 0.$$

Ha feltételezünk egy izotrop anyagot, melynek anyagi tulajdonságai minden irányban azonosak és függetlenek a koordináta-transzformációktól, akkor a folyási feltétel egyszerűen kifejezhető a feszültségtenzor invariánsaival vagy a főfeszültségekkel

$$F(I_1, I_2, I_3, H_1) = 0 \text{ vagy } F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, H_1) = 0,$$

ahol a H_1 az anyagi paraméternek tekintett feszültségkorlát.

Fémekkel végzett kísérletek szerint a hidrosztatikai nyomás vagy húzás nem ér el akkora feszültség szintet, hogy jelentős képlékeny alakváltozások ki tudjanak alakulni. Ez igaz a fémeknél, azonban a talajok, beton és kőzetek tekintetében nem. A hidrosztatikus hatások elhanyagolásával egyszerűsíthetjük a feltételt. Ha a J_1 deviátoros feszültségtenzor első invariánsát elhagyjuk, a képlet a következőképpen adható meg a másik két deviátoros feszültségtenzor invariánsával:

$$F(J_2, J_3, H_1) = 0.$$

Ha ezt illusztrálni szeretnénk, megtehetjük azt a 3 dimenziós főfeszültségek terében vagy a *Haigh-Westergaard-tér*ben. Ha izotrop anyagról beszélünk a folyási felület tengelye egy egyenes lesz, a deviátoros síkon pedig legalább pontszimmetrikus az összes alakzat metszete. Ha a folyási feltételben a hidrosztatikus hatást figyelembe vesszük, akkor a felület a hidrosztatikus tengelynek legalább egyik irányában zárt, ha ezt elhanyagoljuk, akkor a felület minden esetben a tengellyel párhuzamos egyenes alkotójú és mind a két irányban nyitott.

4.3.2. Izotrop anyagok folyási feltételei

4.3.2.1. Tresca-modell

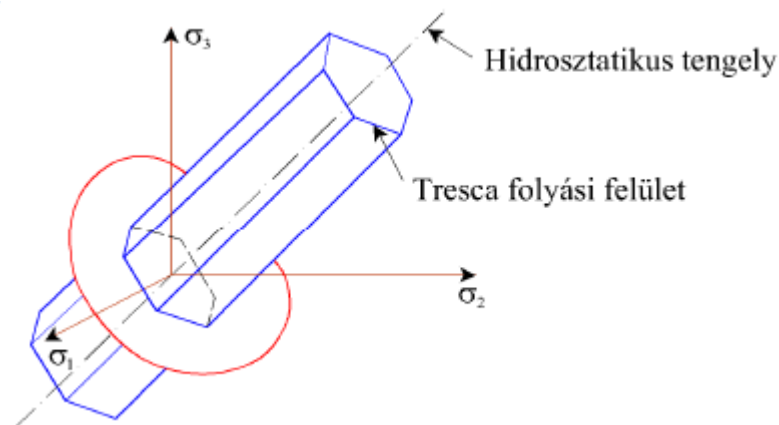
Történelmileg az első folyási feltétel, mely az általános feszültségállapotot alkalmazta *Tresca feltétele* volt. Azzal a feltételezéssel élt, hogy az anyagban a folyás akkor következik be, ha a maximális nyírófeszültség eléri egy kísérletileg meghatározott értéket, melyet k -val jelölt. Az elméletet fizikai tartalma miatt a szakirodalomban maximális nyírófeszültség elméletének is nevezik. A feltétel tulajdonképpen a legnagyobb főfeszültségek különbségének abszolút értékét teszi egyenlővé a $2k$ -val. Ha ez a feltétel teljesül, az anyag folyási állapotban van. Mindez képletszerűen:

$$\text{Max} \left(\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| \right) = k,$$

ahol a k értéke egytengelyű vizsgálatból a következő:

$$k = \frac{\sigma_h}{2}.$$

Tresca feltétele sem veszi figyelembe a hidrosztatikus hatásokat, így a főfeszültségek terében a folyási felület mindkét irányban nyitott, sík lapokkal határolt hatszög metszetű. (Lásd: 4. ábra)



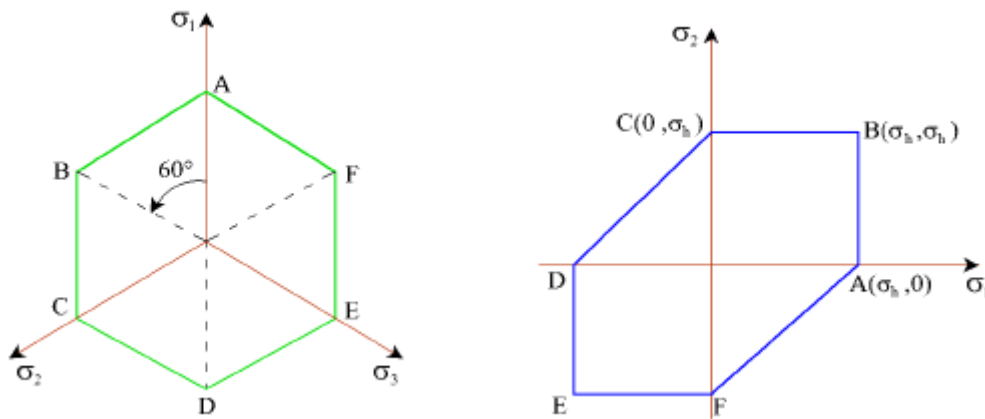
4. ábra: Tresca-feltétel [1]

A *Tresca-modell* felírható a főfeszültségekkel:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2][(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4k^2] = 0,$$

továbbá felírható a feszültség deviátor tenzor invariánsaival:

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0.$$



5. ábra: Tresca-feltétel deviátoros és 2D metszete [1]

4.3.2.2.. Huber-Mises-Hencky modell

Huber, *von Mises* és *Hencky* egymástól függetlenül ugyanazt az összefüggést ajánlották a folyási feltételre. Szerintük az anyag akkor kerül folyási állapotba, ha a feszültségtenzor második invariánsa eléri egy kísérleti állandót:

$$F = J_2 - k^2 = 0,$$

ahol a $k^2 = H_I$ kísérleti állandóval.

Ezzel a feltétellel korábban már *Maxwell* és *Beltrami* is foglalkozott, azonban a folyási feltétel tényleges ma is alkalmazott formáját ők állították fel.

Nádai mutatott ki kapcsolatot az oktaéderes nyírófeszültségek és a k állandó között, mely képletszerűen a következő:

$$\tau_{oct.}^2 = \frac{2}{3}k^2 \Rightarrow F = J_2 - \frac{3}{2}\tau_{oct.}^2 = 0.$$

A *HMH-feltétel* kifejezhető a főfeszültségekkel vagy a *Haigh-Westergaard-tér* koordinátaival:

$$F = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - k^2 = 0,$$

$$F = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0,$$

$$F = \rho - \sqrt{2}k = 0.$$

A k paraméter meghatározható egyszerű húzókísérletből, a következő módon:

$$\frac{1}{3}\sigma_1^2 = \frac{1}{3}\sigma_h^2 = k^2,$$

ahol a σ_h az egytengelyű húzókísérletből meghatározott képlékeny határfeszültség. Az egyszerű nyírási kísérletből kimutatható a kapcsolat a k állandóval:

$$\sigma_{12} = \tau_h \Rightarrow k = \tau_h,$$

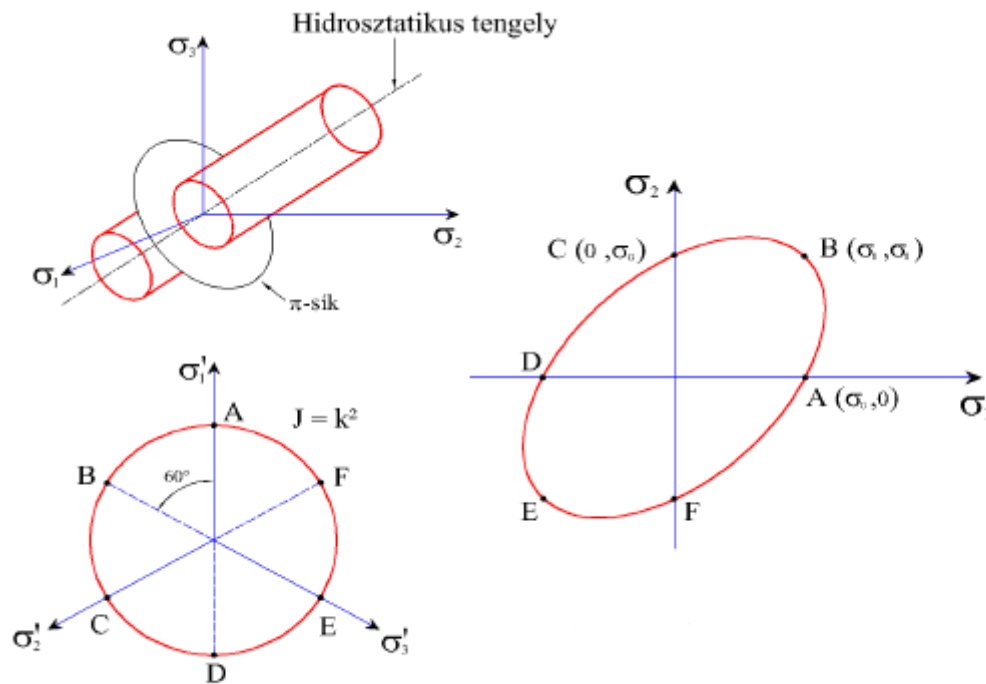
ahol a τ_h a tiszta nyíráshoz tartozó folyási feszültség. Azaz felírható a következő kapcsolat a két folyási feszültség között:

$$\tau_h = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_h.$$

A főfeszültségek terében a *HMH-feltételt* ábrázoló folyási felület mindkét irányban nyitott henger alakú, mivel ez a modell sem függ a hidrosztatikus feszültségektől. A deviátoros metszete egy kör, melynek sugara:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau_h.$$

Sík feszültségállapotban ($\sigma_1 - \sigma_2$ síkokkal való metszet) a metszet egy ellipszis, melyet szokás *Mises ellipszis*nek is nevezni.



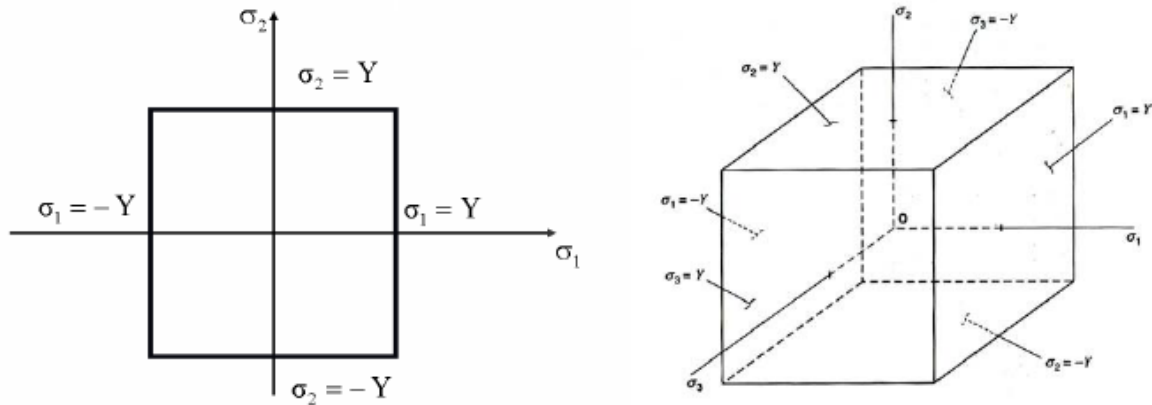
6. ábra: HMH-feltétel [1]

4.3.2.3. Rankine-modell

Rankine-modellje egyszerűségeet tükröz, ettől függetlenül igen sok esetben hatékony modell a képlékeny határállapot fennállásának vizsgálatára. Az ő feltétele a hidrosztatikus hatást is figyelembe veszi:

$$\text{Max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f'_t$$

Ez a feltétel eredetileg a talajok képlékenységi függvényeként volt használatos, de a rideg anyagok törési feltételeként is helytálló. *Rankine-modell*je a főfeszültségek terében és deviátoros metszetben a következő ábrán látható:



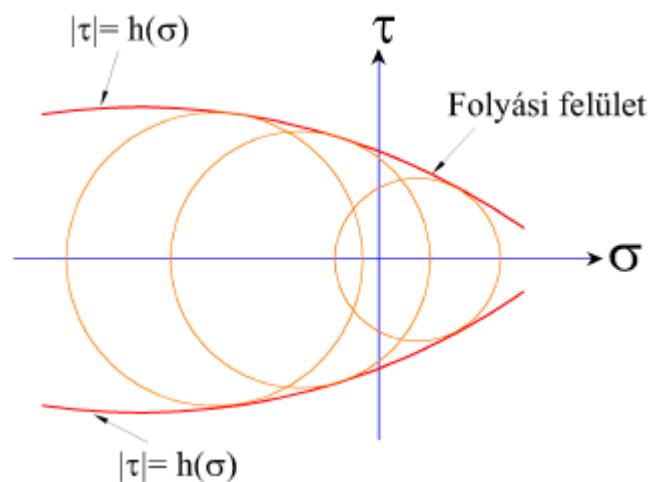
7. ábra: Rankine-feltétel [15]

4.3.2.4. Mohr-Coulomb-modell

Ezt az anyagmodellt a talajmechanikában használják a legtöbbször. *Otto Mohr Tresca-feltételét* alakította át geológiai anyagokra, miszerint a kritikus nyírófeszültség értéke talajoknál és kőzeteknél nem konstans, hanem az ugyanabban a pontban fellépő normálfeszültség függvénye:

$$|\tau| = h(\sigma),$$

ahol a $h(\sigma)$ kísérletileg meghatározandó függvény. A kritikus állapotban a $h(\sigma)$ függvény burkológörbéje lesz a *Mohr-körnek*, ennek grafikus interpretációja a következő ábrán látható:

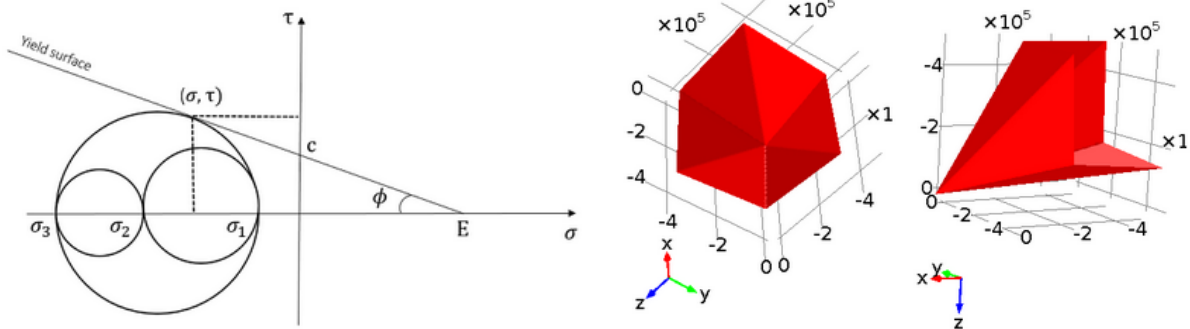


8. ábra: Mohr-Columb feltétel meridián metszete [17]

A burkoló görbét egyszerűbben egy egyenessel szokták jellemezni, melyet *Coulomb* javasolt, és melynek egyenlete:

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi,$$

ahol a c a kohéziós paraméter és a ϕ a belső súrlódási szög.



9. ábra: Mohr-Coulomb-modell [16]

balra:meridián metszet, jobbra: folyási felület függvénye

A *Mohr-Coulomb-feltétel* is felírható többféle módon, mint az előzőekben említetteknél, a főfeszültségek és invariánsok segítségével is:

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1,$$

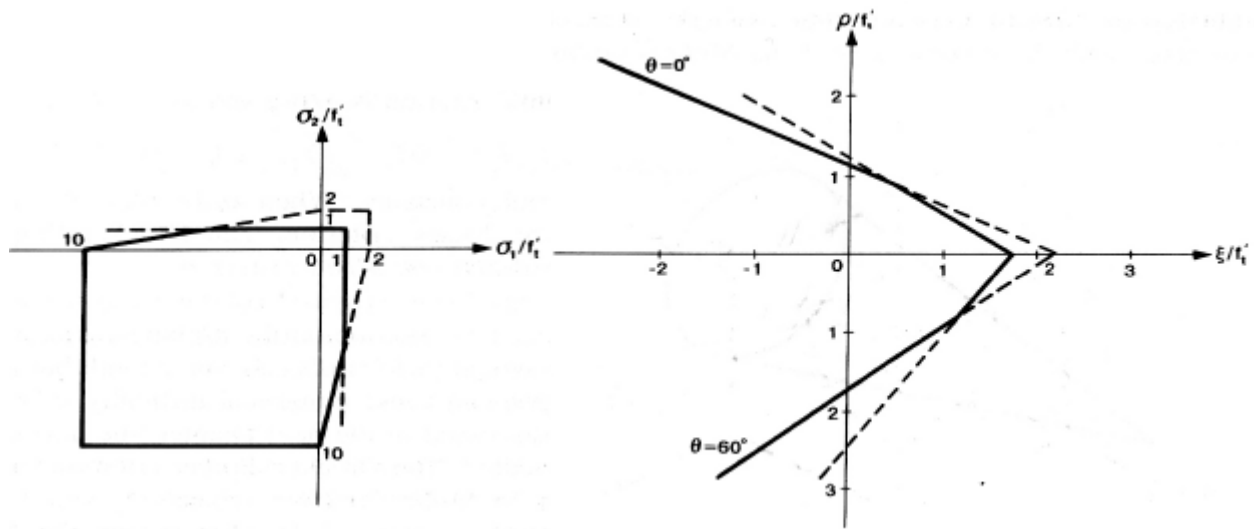
$$\frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0.$$

A főfeszültségekkel felírt folyási feltétel egyszerűbb alakban is megadható:

$$\frac{\sigma_1}{f'_t} - \frac{\sigma_3}{f'_c} = 1,$$

ahol az $f'_t = \frac{2c \cos \phi}{3 + \sin \phi}$, és $f'_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi}$.

A *Mohr-Coulomb-feltételt* gyakran kombinálják a *Rankine-feltétellel*, mivel a húzott zónákban túlbecslést ad az anyag szilárdságát illetően. A kombinált *MC-Rankine-modellel* a húzási határszilárdság értéke csökkenthető.



10. ábra: Kombinált Mohr-Coulomb-Rankine-Modell deviátoros és meridián metszete [1]

4.3.2.5. Prager-Drucker-modell

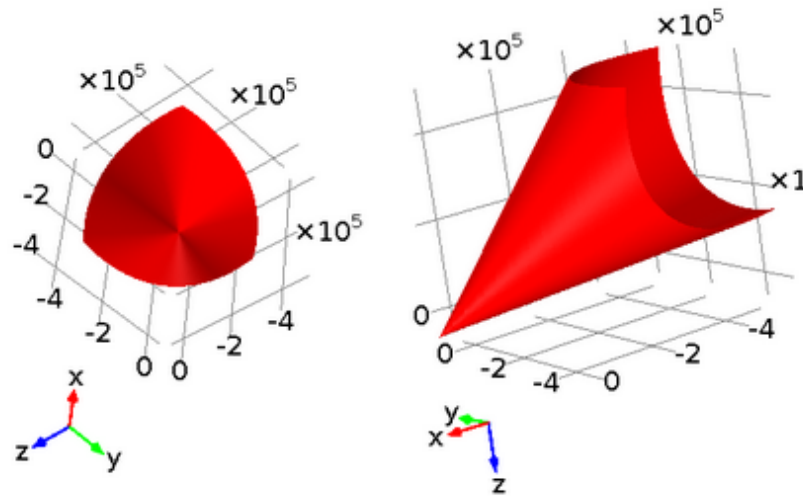
Prager és *Drucker feltétele* is figyelembe veszi a hidrosztatikus hatásokat és modelljük a *Huber-Mises-Hencky modell* általánosításának is tekinthető. Kiegészítésük az volt, hogy a folyási feltételbe beépítették az első feszültség-invariánst is:

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0,$$

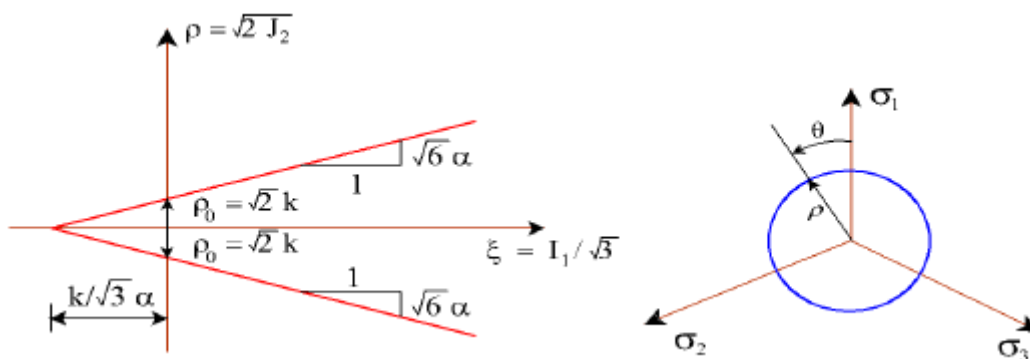
ahol az α és k anyagi állandókat jelölnek. Az összefüggésből látszik, ha az α paramétert zérusnak választjuk meg, akkor visszakapjuk az eredeti *HMH-feltételt*. Az anyagi paramétereket az *MC-feltételhez* hasonló módon adhatjuk meg:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \text{ és } k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}.$$

A *Prager-Drucker képlékenységi feltétel* a húzás irányában zárt körkúppal adható meg grafikusán és ábrázolható a főfeszültségek terében, meridián-metszetben és deviátoros-síkmetszetben is. (Lásd: 11.-12. ábra)



11. ábra: Prager-Drucker feltétel függvénye [16]



12. ábra: Prager-Drucker feltétel meridián és deviátoros metszete [1]

4.3.2.6. Egyéb folyási feltételek

A következőkben szeretnék bemutatni két olyan létező anyagmodellt, melyek ugyancsak használhatóak a mérnöki gyakorlatban. Ezeket csak képletszerűen adom meg.

Elsőként *Hosford-feltételét* mutatom be, mely a *HMH-feltétel* általánosítása izotrop anyagokra:

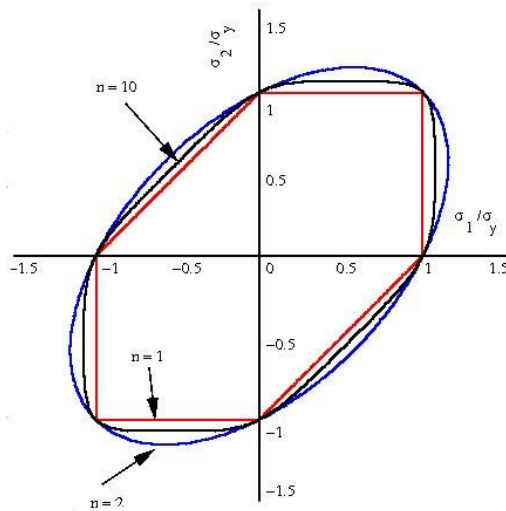
$$\frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|^n + \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1|^n + \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|^n = \sigma_h^n,$$

ahol az n az anyagtól függő állandó és a σ_h az egyirányú nyomó/húzó kísérletből meghatározott folyási feszültség. (Lásd: 13. ábra)

Másodikként *Stassi-képlékenységi feltételét* mutatom be. *Stassi-modellje* a főfeszültségek terében és az invariánsokkal felírva a következőként alakul:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + A(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + C = 0,$$

$$(2 - A)I_2 + BI_1 + I_1^2 + C = 0.$$



13. ábra: Hosford-modell $n=1,2,10$ értékkel [12]

4.3.3. Anizotrop anyagok folyási feltételei

Az anizotrop anyagoknál használt folyási feltételeket mérés-technikai nehézségek miatt hozták létre, azonban az olyan anizotrop viselkedést leíró modelleket, melyeket a gyakorlatban is alkalmazni szeretnénk az ortotropia szintjére kell egyszerűsíteniük.

Elsőként *Hill-folyási feltételét* ismertetem, mely eleinte a *HMH-feltétel* egyszerű kiterjesztése volt, majd egy általánosított alak is megfogalmazódott. A kvadratikus *Hill-folyási feltétel* a következő:

$$F[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2] + 2N\sigma_{12}^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 = 1,$$

ahol az F, G, H, L, M, N kísérletileg meghatározandó állandók.

Hill általánosított feltétele anizotrop anyagokra pedig, az $F = G$ és $L = M$ egyenlőségekkel:

$$f = F|\sigma_2 - \sigma_3|^m + F|\sigma_3 - \sigma_1|^m + H|\sigma_1 - \sigma_2|^m + L|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m \\ + L|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + N|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m - \sigma_h^m \leq 0,$$

ahol az m határozza meg az anizotropia fokát és m -nek nagyobbnak kell lennie mint 1, hogy biztosítva legyen a folyási felület konvexitása.

Hill feltételéből indult ki a következő feltétel is, mely a *Caddell-Raghava-Atkins-folyási feltétel* néven ismert, mely függ a nyomástól. Ez a következő:

$$F[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2] + 2N\sigma_{12}^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + I\sigma_{11} \\ + J\sigma_{22} + K\sigma_{33} = 1$$

A következő feltételt méhsejt szerkezet vizsgálatára kísérletezték ki és kompozit szendvics szerkezetek vizsgálatára alkalmazzák. Ez a *Deshpande-Fleck-Ashby-folyási feltétel* néven ismert. A feltétel a következő:

$$F[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2] + 2N\sigma_{12}^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + K(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 = 1.$$

Az izotrop anyagoknál már említett *Hosford* az anizotrop anyagokra is megalkotott egy folyási feltételt, azonban ezt nem egyedül tette. A folyási feltételt *Logan-Hosford-feltételnek* nevezik. Ez sokban hasonlít *Hill* általánosított modelljéhez, de valamivel egyszerűbb alakban van megfogalmazva:

$$F|\sigma_2 - \sigma_3|^n + G|\sigma_3 - \sigma_1|^n + H|\sigma_1 - \sigma_2|^n = 1,$$

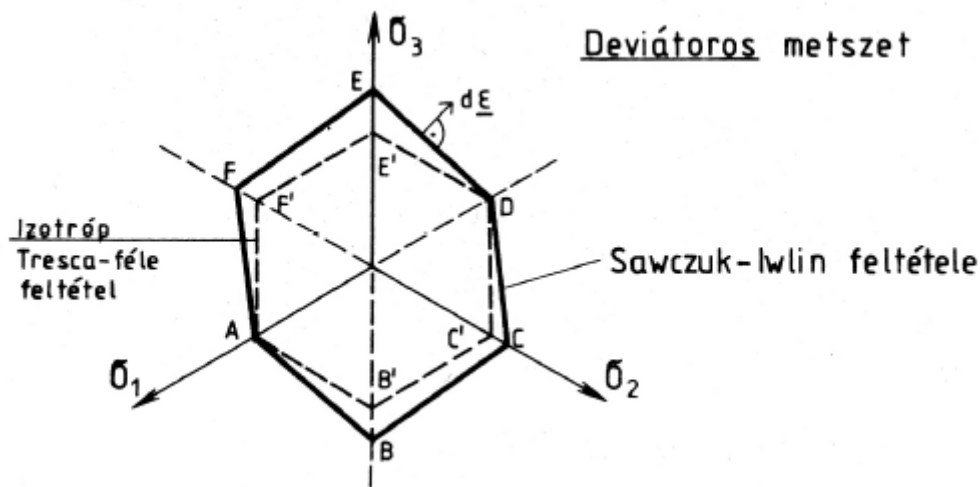
ahol F, G, H konstansok és n a kristálytípustól függő állandó, melynek sokkal nagyobbak kell lennie, mint 2.

A *Tresca-feltételt* általánosította *Sawczuk és Iwlin* ortotrop anyagok esetére. Az ő modelljük elhanyagolja a hidrosztatikus feszültségeket, folyási feltételük a következő:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_{h1}} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_{h2}} \pm 1 = 0, -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_{h2}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_{h3}} \pm 1 = 0 \text{ és}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_{h1}} - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_{h3}} \pm 1 = 0,$$

ahol a σ_{hi} az ortotropia három fő-irányában mért folyási határfeszültség.



14. ábra: Sawczuk-Iwlin-folyási feltételének deviátoros metszete [1]

A laza szerkezetű, porózus, a hidrosztatikus hatásokra igen érzékeny anyagokra *Kubik és Mielniczuk* dolgozott ki ortotrop folyási feltételt. Feltételük:

$$F = \phi_0 + \phi_1 I_1 + \phi_2 I_1^2 + \phi_3 2I_2 + \phi_4 I_1 P_{ij} + \phi_5 I_1 P_{ij} \sigma_{ij} + \phi_6 I_1 P_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{ij} + \phi_7 I_1^2 P_{ij} +$$

$$+ \phi_8 I_1^3 P_{ij} + \phi_9 2I_1 I_2 P_{ij} + \phi_{10} I_1^2 P_{ij} \sigma_{ij} + \phi_{11} I_1 P_{ij} P_{ij} \sigma_{ij} + \phi_{12} I_1 P_{ij} P_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{ij},$$

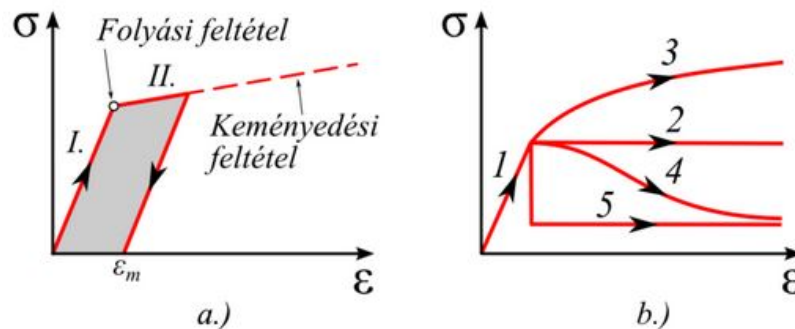
ahol a P_{ij} szimmetrikus másodrendű tenzor, a ϕ_0, \dots, ϕ_{12} együtthatók közül az első négyet, abból a feltételből határozták meg, hogy a modellnek határesetben az izotrop feltételt kell megadnia, így:

$$\phi_0 = -\tau_h^2, \phi_1 = \alpha, \phi_2 = \beta - \frac{1}{2}, \text{ és } \phi_3 = 1.$$

A feltételekben a τ_h a nyírási folyási feszültség, az α és β pedig a hidrosztatikus feszültségeknek a folyásra gyakorolt hatását fejezik ki.

4.3.4. Keményedési feltételek

Keményedésnek nevezzük azt a folyamatot, melynél az anyag képlékeny állapotban van, de határteherbírását még nem vesztette el és képes a mikrostruktúrájának átalakulása közben további terhelést felvenni. A keményedően képlékeny anyagokat legjobban a lineáris feszültségi állapotban tudjuk grafikusán szemléltetni.

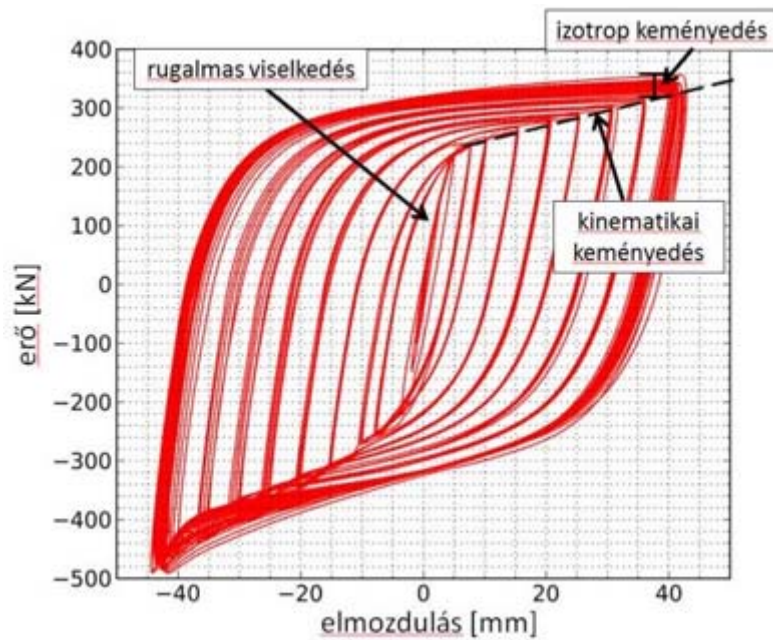


15. ábra: (a.) Lineáris rugalma-képlékeny-modell főbb részei I.) Lineárisan rugalmas szakasz, II.) Folyási szakasz.

(b.) A rugalmas-képlékeny-modellek főbb típusai: 1.) Lineárisan rugalmas, 2.) Ideálisan képlékeny, 3.) Nemlineárisan felkeményedő, 4.) Nemlineárisan lágyuló, 5.) Ridegen lágyuló. [17]

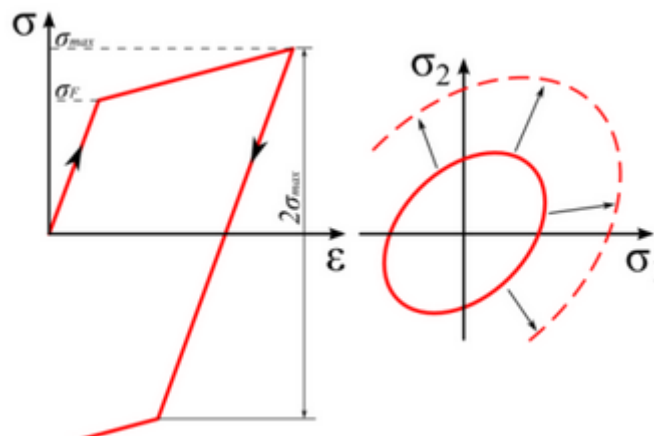
Három esetet lehet megkülönböztetni, ezek:

- az izotrop keményedés esete
- a kinematikus keményedés esete
- és a vegyes keményedés esete.



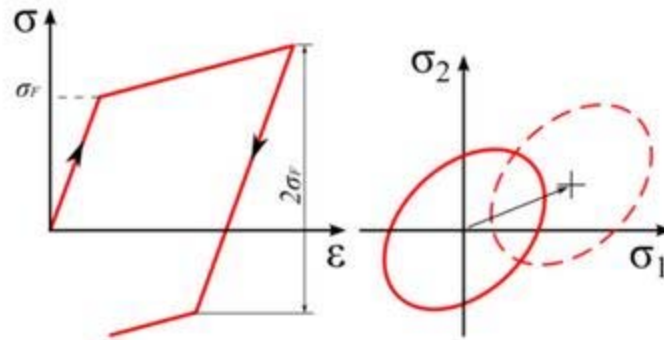
16. ábra: Az izotrop és kinematikus keményedés [14]

Az *izotrop keményedés*nél a folyási felület alakja változatlan a feszültségek növekedése következtében, viszont méretei minden irányban azonosan változnak. Ezzel a módszerrel azokat az anyagokat érdemes vizsgálni melyek rugalmas és képlékeny állapotban is izotropként modellezünk.



17. ábra: Az izotrop keményedés [17]

Amikor a képlékenységi felület terhelésfüggő translációs mozgást végez, akkor beszélünk a *kinematikus keményedés* esetéről. Ilyenkor a képlékenységi felület mérete nem változik.

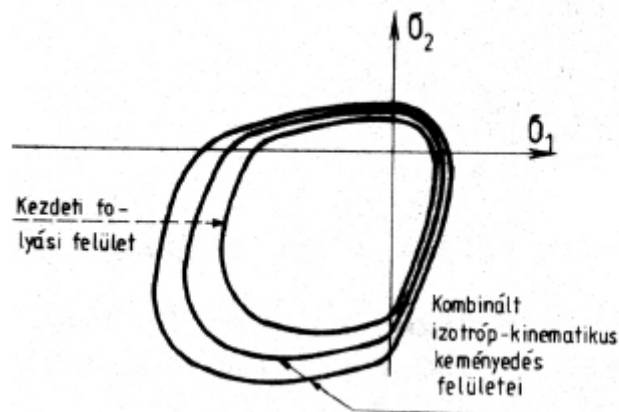


18. ábra: A kinematikus keményedés [17]

A valóságot legjobban tükröző modellek a *vegyes keményedési* modellek, melyekbe nagyon sokféle és sokrétű modell tartozik. Itt beszélhetünk kombinált, izotrop-keményedési és csúcs-keményedési modellekről. Egyik legismertebb modellt *Way-Fah Chen* alkotta meg, mely betonokra és kőzetekre ad jó eredményeket. A modellben egy változó alakú és helyzetű folyási felületet fogalmazott meg, mely képletszerűen a következő:

$$F = \frac{J_2 + a \frac{1}{3} \sigma_{oct.} - c \frac{1}{6} \sigma_{oct.}^2}{1 - b \frac{1}{3} \sigma_{oct.}},$$

ahol az a , b és c kísérleti állandók. A vegyes keményedési feltételekre későbbiekben még bővebben kitérek, kifejezetten a betonokra vonatkozó anyagmodelleknél.



19. ábra: A vegyes keményedés [1]

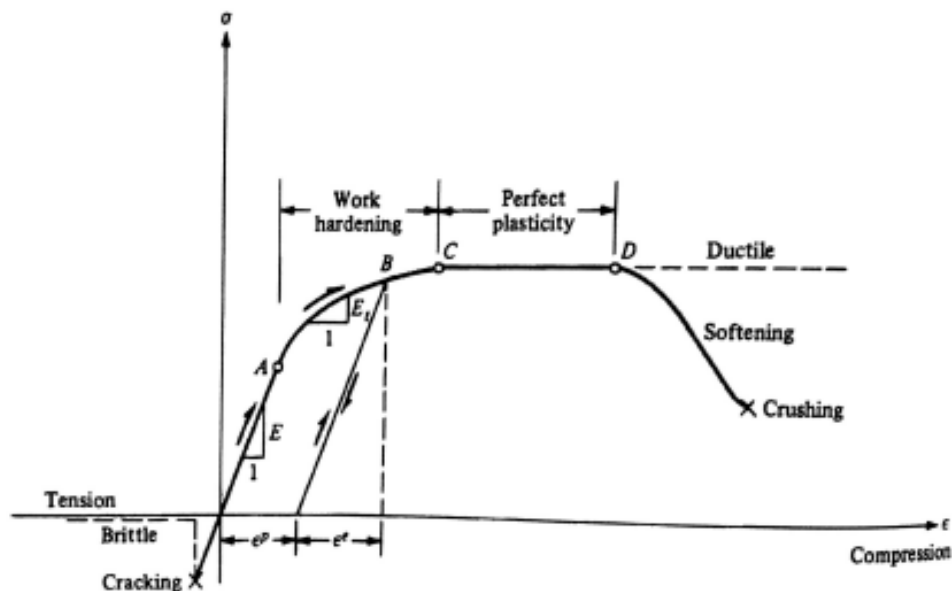
4.4. Rugalmas-képlékeny anyagmodellek

A következő ábrán szeretném bemutatni a rugalmas képlékeny anyagok viselkedését. (Lásd: 20. ábra) Az ábra egy tipikus egyirányú feszültség-alakváltozás görbét mutat, melyen látható a húzási és nyomási tönkremenetel. A húzási teherbírás igen csekély, ez az anyag fajtájából adódik, mivel ez a grafikon egy beton próbatest vizsgálatát hivatott szemléltetni. A húzott rész viselkedése lineárisan rugalmas és nem jelenik meg semmiféle

képlékenyedés az anyagban. A nyomási tönkremenetel már érdekesebb, mivel az A pontig lineárisan rugalmasan viselkedik. Majd miután az anyag belső mikroszerkezete fokozatosan gyengül (AC szakasz), bekövetkezik a tökéletesen képlékeny folyás állapota (CD szakasz). Ebben a szakaszban az anyag többlet feszültség bevitele nélkül szenved óriási alakváltozásokat. Az anyag a D pont után fellazulás állapotába kerül, majd végül tönkremegy.

A képlékeny (maradó) deformációt az ε^p jelöli, a rugalmas alakváltozást pedig az ε^e jelöli, valamint a teljes alakváltozás ε a rugalmas és képlékeny alakváltozás összegeként számítható. Az alakváltozások ilyesfajta szétválasztását a deformációs elméletben megfogalmazott elvek alapján tehetjük meg.

Az 20. ábrát tovább elemezve megállapítható, hogy az anyag viselkedése az AC és a CD szakaszon rugalmas-képlékeny-felkeményedő és rugalmas-tökéletesen képlékeny is egyben.



20. ábra: Egyirányú feszültség-alakváltozás görbe [6]

4.4.1. Deformációs elmélet

A deformációs elmélet alapjait *Hencky* és *Nádai* fektették le, majd pár évvel később *Iljusin* fejlesztette tovább az *Ő* gondolatmenetüket úgy, hogy az elmélet gyakorlati alkalmazhatósága szempontjából megfelelő legyen. A legfontosabb állítás az elméletben az, hogy a feszültség-alakváltozás függvény útfüggetlen, mely tulajdonsága szerint minden esetben a teljes változórendszer között teremt kapcsolatot.

A teljes alakváltozás megadható:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

alakban. A rugalmas komponenst az általánosított Hooke-modell segítségével és a teljes feszültségtenzor felhasználásával felírhatjuk:

$$\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl}\sigma_{kl}$$

formában. Továbbá a képlékeny alakváltozást a hidrosztatikus hatások elhanyagolásával megadhatjuk a deviátoros feszültségtenzor segítségével:

$$e_{ij}^p = f(s_{ij}) = \hat{f}(J_2, J_3).$$

A rugalmas képlékeny modellre *Prager* is adott egy javaslatot, miszerint a:

$$\varepsilon_{ij}^p = F(J_2, J_3)[P(J_2, J_3)s_{ij} + Q(J_2 - J_3)t_{ij}].$$

A képletben szereplő P és Q a feszültségdeviátor tenzor homogén függvénye. *Prager* a terhelésre és a tehermentesítésre is megfogalmazott egy korlátot. Ezek:

$$\text{Terhelésnél:} \quad dJ_2 = s_{ij}ds_{ij} > 0,$$

$$\text{Rugalmas tehermentesítésnél:} \quad dJ_2 < 0.$$

Prager és a *Hencky-Nádai* modellek alapján megállapítható, hogy a deformációs elmélet modelljei tulajdonképpen a nemlineárisan rugalmas modellek általánosítását jelentik.

4.4.2. Növekmény elmélet

A rugalmas és képlékeny alakváltozásokat megadhatjuk növekményi formában:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p.$$

Ez az alakváltozás növekmény a rugalmas és képlékeny alakváltozás növekmények összege.

A rugalmas vagy visszanyerhető alakváltozás $d\varepsilon_{ij}^e$ esetén feltételezzük, hogy adott az általánosított *Hooke-törvény*, mely szerint:

$$d\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}d\sigma_{kl}.$$

Izotrop rugalmas anyagok esetén az alakváltozás növekményre a következő összefüggés alkalmazható:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{9K}dI_1\delta_{ij} + \frac{1}{2G}ds_{ij},$$

ahol a K az összenyomódási modulus, a G pedig a nyírási modulus. A K és a G lehetnek a feszültségtenzor invariánsainak függvényei és így írhatók fel:

$$K = K(I_1) = K(\sigma_{oct}) \text{ és } G = G(J_2) = G(\tau_{oct})$$

Továbbá a K -és G -nek mindig pozitívnak kell lennie.

A képlékeny alakváltozás növekmény a következőképpen adható meg:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

ahol F a folyási felület függvénye.

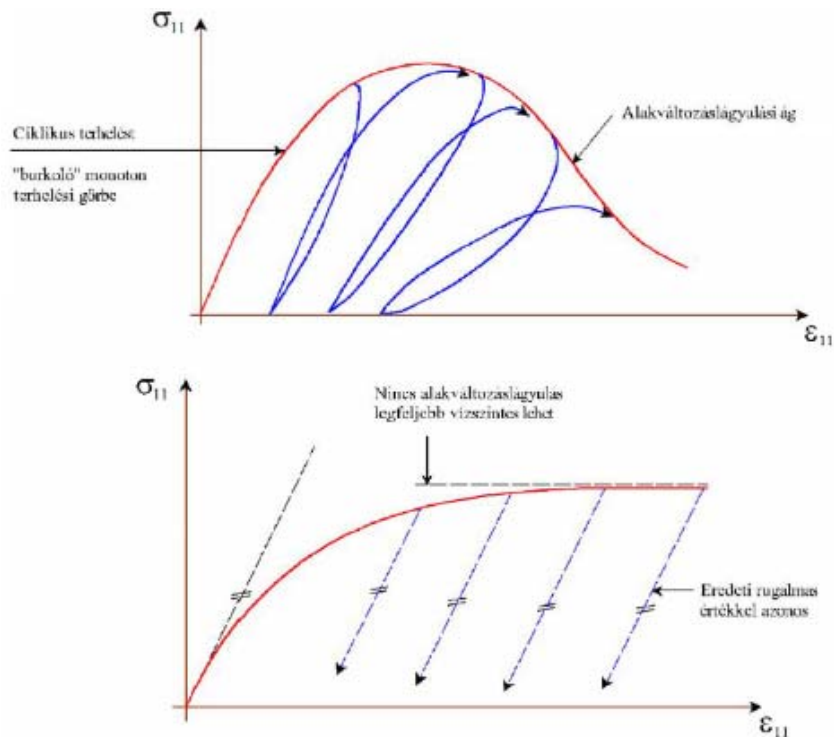
4.5. Rideg és rugalmas-képlékeny-fellazuló anyagok komplex modelljei

Szerkezeteinkben használt anyagaink viselkedése igen eltérő lehet attól függően, hogy milyen anyagszerkezeti tulajdonságokkal rendelkeznek. A betonok, rideg fémek és talajok nemlineáris viselkedése a képlékeny tulajdonságok mellett az anyagban keletkező mikro- és makroszintű repedések kialakulásától és szilárdságsökkentő hatásától is függ. Ez a hatás akkor jelent számottevő problémát, ha az anyag mikrostruktúrájában a kristályos belső szerkezetet csak lokálisan van jelen vagy a kristályrács alapvetően hibás. A mechanikában a repedések hatása két szempont alapján vizsgálható:

- Előállítható olyan anyagmodell, mely a mikrorepedésrendszer globális hatását vizsgálja, amelyben a modell a terhelt kontinuum viselkedését modellezi.
- Továbbá léteznek olyan modellek, melyek a makrorepedések hatását vizsgálják az anyagban keletkező feszültség-alakváltozás koncentrációk által valamint ezzel együtt az anyag stabilitását is képesek leírni. Az ilyen modellekkel a törésmechanika tudománya foglalkozik.

4.5.1. Képlékeny és morzsolódó anyagok

A képlékeny és fellazuló vagy morzsolódó anyagok terhelés közbeni viselkedésére mutat példát a 21. ábra, melyen látható, hogy a rideg anyagoknál létrejön egy leszálló ág, úgynevezett alakváltozási-lágyulás. A képlékeny anyagoknál ez nem tud kialakulni, így



21. ábra: Egytengelyű nyomókísérlet morzsolódó és képlékeny anyagnál [1]

azoknál a terhelés görbéje vízszintes érintőhöz tart. Továbbá a 21. ábra jól szemlélteti, hogy a képlékeny anyagoknál a terhelés-tehermentesítés következtében a kezdeti rugalmassági

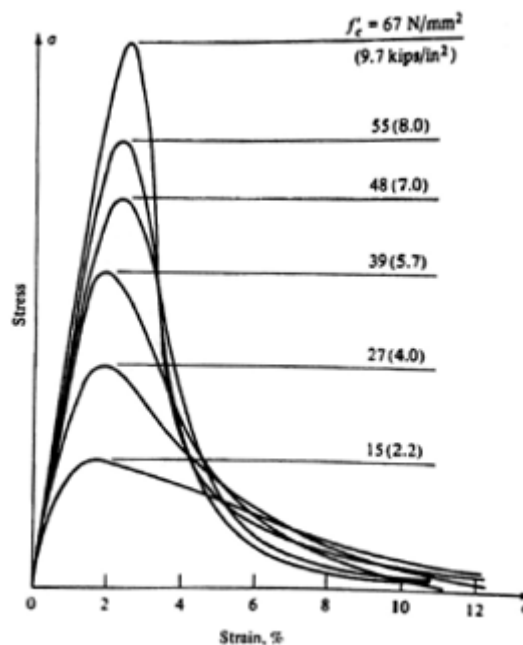
modulus érintőjével párhuzamos egyeneseket kapunk a vizsgálat során, ezzel ellentétben a morzsolódó anyagoknál a mikroszinten kialakuló repedések miatt, az egymást követő rugalmassági modulusok érintői egyre kisebb szöget zárnak be az ε tengellyel. Az ilyen jelenségek vizsgálatára számos kutatás épül és ezért egy külön csoportja is kialakult a mechanikai anyagmodellek között az ilyesfajta viselkedés modellezésére.

4.6. Beton modellek

A betonok változatos belső összetételének köszönhetően mechanikai viselkedésük igen sokféle lehet. A szakirodalomban sokszor említik a betont úgy, mint kompozit, ilyenkor a beton összetételére utalnak, mivel szemcsés anyagokból tevődik össze, melyek a betont úgymond erősítik. A beton tönkremenetelének módja a terheléstől nagyban függ, pl.: egy-vagy többtengelyű húzás/nyomás, tiszta nyomás. A betonokra általánosságban jellemző, hogy a teherbírásuk kimerüléséhez közel, úgynevezett disszipatív hatások kerülnek előtérbe, ezzel ellentétben a teherbírást nem megközelítő teherszinten rugalmasan viselkedik.

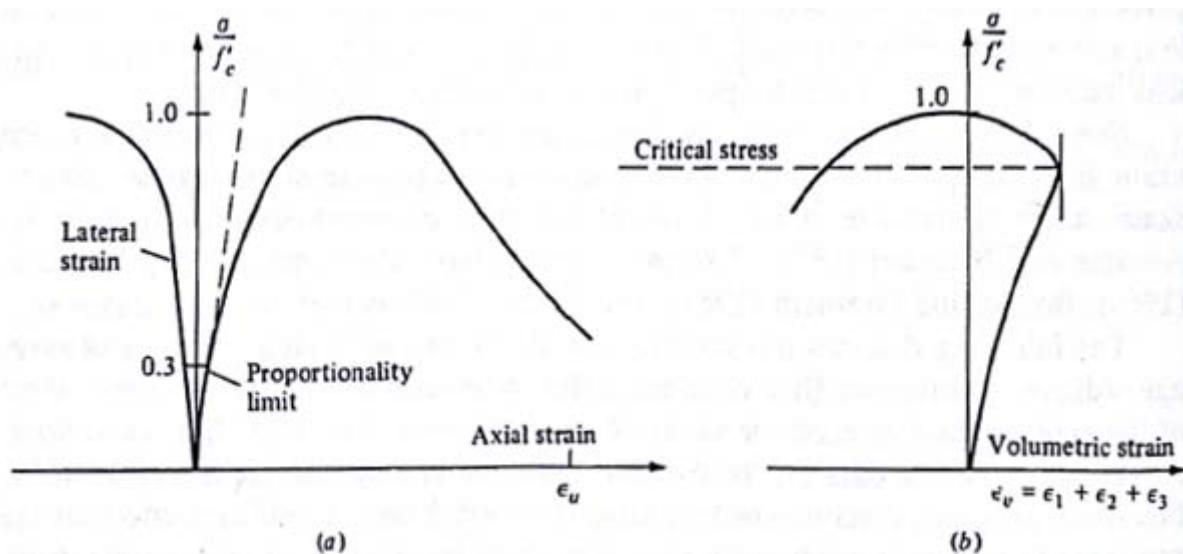
A betonok teherbírása igen különböző, nyomásra igen nagy teherbírást mutatnak, ellentétben a húzószilárdságuk igen gyengének mondható, csupán a nyomószilárdság 8-10 %-a. Ezért is alkalmazzák előszeretettel a betonszerkezetekkel együtt az acélt, mivel a betonacél a beton húzott zónájában megfelelő „erősítést” ad. A beton húzott részének berepedésekor az ott elhelyezett acélmarmatúra átveszi a teherviselést, így teherviselés szempontjából egy megfelelően működő és ellenálló szerkezetet hozhatunk létre. A nyomó- és húzószilárdság meghatározására és azok mechanikai szempontból való modellbe építésével sok tudós foglalkozott és a mai napig számos kutatás folyik az ilyen modellek tökéletesítésére.

A következőkben bemutatok néhány kísérleti diagramot, melyek a beton viselkedését illusztrálják különböző terheléseknek kitéve. A 22. ábrán a beton egytengelyű nyomás alatti viselkedését mutatja be. Az ábrán az f'_c az egytengelyű nyomószilárdságot jelenti. Látható, hogy az egyre nagyobb szilárdságú betonnál, egyre erősödik a ridegedés, ez a fellazulás szakaszának egyre növekvő meredekségével mutatkozik meg. A 23. ábrán is egy egytengelyű



22. ábra: 1D nyomókísérlet feszültség-
alakváltozás görbe [6]

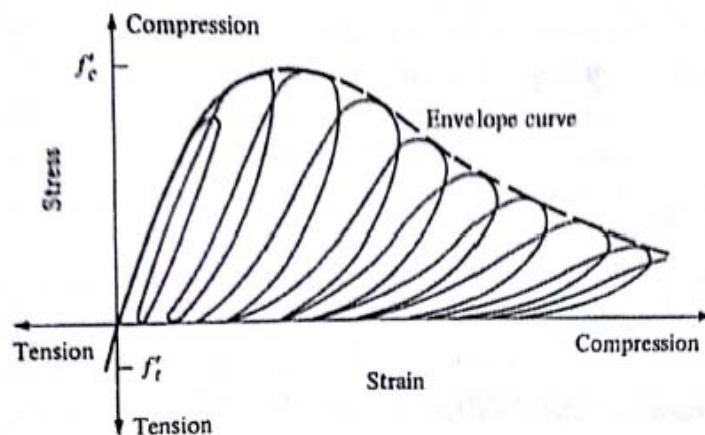
nyomókísérlet grafikonos megjelenítését láthatjuk, melyen a tengely- és oldalirányú alakváltozásokat, valamint a térfogati alakváltozást szemléltették.



23. ábra: 1D nyomókísérlet, nyomófeszültség/határfeszültség-alakváltozás grafikonok,
(a) oldal- és tengelyirányú alakváltozás, (b) térfogati alakváltozás [6]

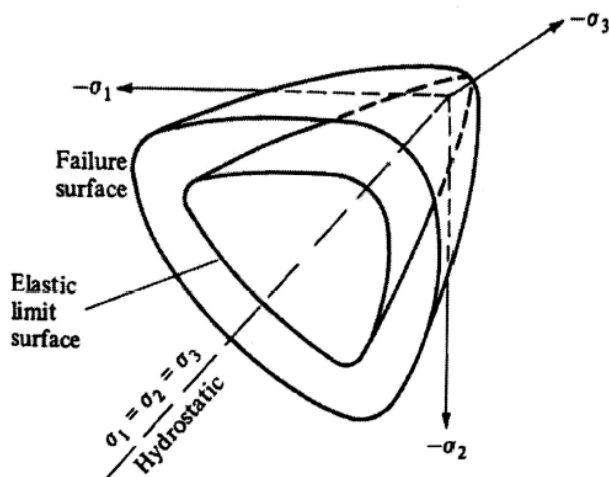
Az alábbi ábrán egy 1D ciklikus terhelés hiszterézis görbéje látható. Megfigyelhető a terhelés-tehermentesítés görbe erős nemlineáris volta és a merevség jelentős degradációja is.

Végül egy triaxiális kísérlet ábráját mutatom be, melyen látható, hogy a betonnak viszonylag



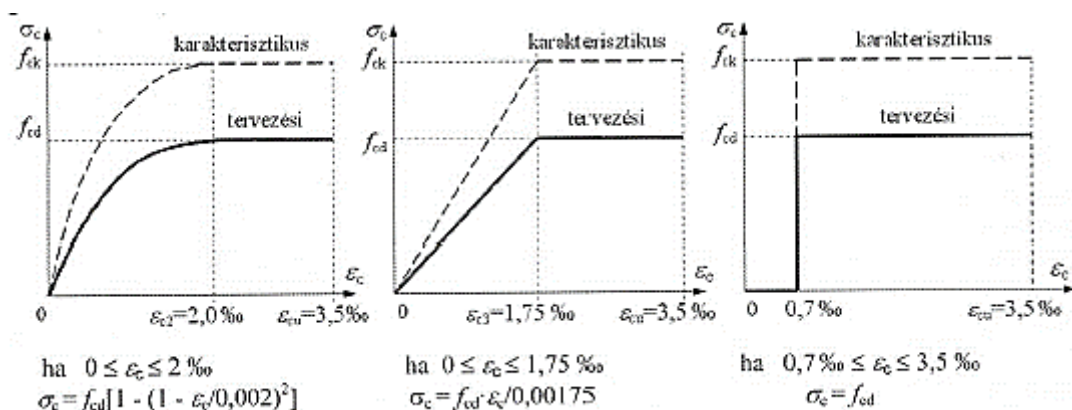
24. ábra: Egyirányú ciklikus terhelés feszültség-alkváltozás görbéje [6]

egyenletes törési felülete van a főfeszültségek függvényében. Az ábra sematikus szemlélteti a rugalmas határfelületet és a tönkremeneteli felületet a 3 dimenzióban a főfeszültségek terében.



25. ábra: A törési felület sematikus ábrája a főfeszültségek terében [6]

A betonok modellezése igen nehéz feladat, mivel a beton homogenitás és izotropia szempontból nem minden esetben mondható megfelelőnek. A mérnöki gyakorlatban mondhatni egyszerű anyagmodelleket használunk, mellyel a szerkezeteinket gyorsan és megfelelő biztonsággal tudjuk méretezni. Ilyen modellre mutat példát a 26. ábra.



26. ábra: A beton szabványos modellezésének σ - ε diagramjai: balra: Parabola-állandó diagram, középen: Lineárisan-állandó diagram, jobbra: Téglalap alakú diagram [10]

Olyan modelleket, melyekben a képlékeny jelenségeken felül a mikrorepedések kialakulását és terjedését is képesek vagyunk vizsgálni, már a 60-70-es években alkottak a tudósok. Az ilyen modelleket nevezhetjük rugalmas-képlékeny-fellazuló, vagy némely szakirodalomban rugalmas-képlékeny-morzsolódó anyagmodelleknek. A következőkben szeretnék bemutatni olyan egyszerűbb és bonyolultabb modelleket, melyeket a mérnöki gyakorlatban is alkalmazhatunk.

Egy izotrop anyagnál a tönkremeneteli feltétel felírható a feszültség invariánsok függvényében, így a betonra is felírhatjuk ezt, amennyiben elegendően nagy méretekkel rendelkezik és izotropnak tekinthető.

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0.$$

A megadott 3 fő invariáns segítségével geometriai és fizikai ábrázolások jobban megadhatók, melyek függetlenek az adott anyag tulajdonságaitól.

4.6.1. Egyparaméteres modellek

Ebbe a csoportba tartozik a maximális húzófeszültség feltétele vagy más néven *Rankine-feltétel*, melyet 4.3.2.3 fejezetben már tárgyaltam. Ez a feltétel általánosan elfogadott napjainkban annak a megállapítására, hogy a beton tönkremenetele húzó vagy nyomó jellegű-e. A kritérium szerint a betonban rideg tönkremenetel jön létre, amikor a maximális főfeszültség az anyagon belüli pontban elér egy a húzószilárdsággal (f'_t) egyenlő értéket. A tönkremeneteli felület egyenletei meghatározhatók a következő módon:

$$\sigma_1 = f'_t, \sigma_2 = f'_t, \sigma_3 = f'_t .$$

Amikor az ξ, r, θ vagy $I_1, \sqrt{J_2}, \theta$ változókat alkalmazzuk a tönkremeneteli felület teljes mértékben megadható a $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ tartományon:

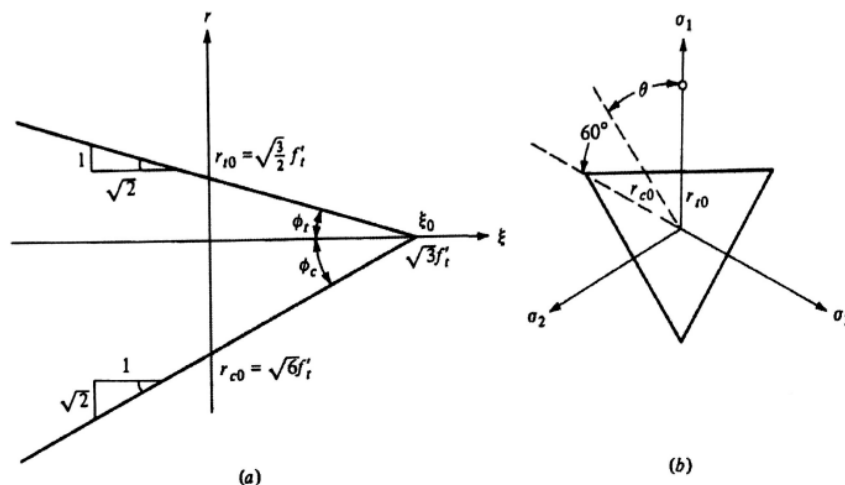
$$F(I_1, J_2, J_3) = 2\sqrt{3}\sqrt{J_2} \cos \theta + I_1 - 3f'_t = 0 ,$$

vagy azonosan

$$F(r, \xi, \theta) = \sqrt{2} r \cos \theta + \xi - \sqrt{3}f'_t = 0 .$$

A 27. ábra szemlélteti a feltétel deviátoros metszetét ($\xi = 0$) és a tönkremeneteli felület húzó ($\theta = 0^\circ$) és nyomó ($\theta = 60^\circ$) meridiánját.

A következő modellt a szakirodalomban nyírófeszültségi-feltételként (shearing-stress



27. ábra: Rankine-feltétel (a) meridián metszet ($\theta = 0^\circ$), (b) deviátoros metszet [6]

criteria) olvashatjuk. Ez az ugyancsak már említett *Tresca* és *von Mises* névéhez köthető. Tudott, hogy a beton hidrosztatikus nyomás alatt úgy viselkedik mintha duktilis fém lenne. Nagy nyomás hatására egy képlékeny anyag sokkal nagyobb deformációkra képes, így lehetővé válik az, hogy nagy alakváltozásokat szenvedjen a képlékeny törés előtt. Megemlítendő, hogy a hidrosztatikus nyomás a folyási értékre általában nincs nagy befolyással. Bár ez a kijelentés fémes anyagokra igaz mint a betonacél, szemcsés anyagokra alacsony hidrosztatikus nyomás

jelenlétében nem. A maradó alakváltozásokat gyakran nagy térfogatváltozás is kíséri és a hidrosztatikus nyomás nagy hatással van a nyírószilárdságra. A folyási feltétel képletesen a következő:

$$F(s_1, s_2, s_3) = 0 \text{ vagy } F(J_2, J_3) = 0 .$$

Tresca ötlete az volt, hogy egészen egyszerűen a kulcs változó legyen a maximális nyírófeszültség. Tehát, ha a maximális nyírófeszültség elér egy kísérletileg meghatározott k állandót, akkor az anyag folyási állapotba kerül. Ezt bővebben a 4.3.2.1. fejezetben, a *von Mises*- vagy *HMH-feltételről* pedig a 4.3.2.2. fejezetben már tárgyaltam.

4.6.2. Kétparaméteres modellek

A kétparaméteres modellek közé sorolható a *Mohr-Coluomb-modell* és a *Prager-Drucker-modell*. Ezekkel a feltételekkel a 4.3.2.4. és a 4.3.2.5. fejezetben már foglalkoztam.

4.6.3. Háromparaméteres modellek

A háromparaméteres modellekhez a *Prager-Drucker-modell* általánosításával jutunk el. A folyási feltétel egyik legáltalánosabban elfogadott típusa az oktaéderes feszültségekkel kifejezett folyási feltétel, ahol a J_2 és θ elhanyagolható. Ilyen feltételt alkottak meg *Bresler* és *Pister*, mely:

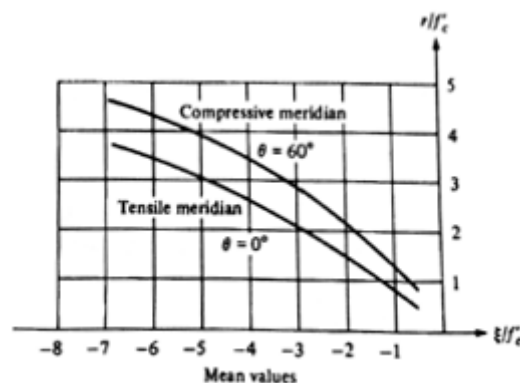
$$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct}),$$

alakban írható fel.

A legtöbb javasolt feltételben lineáris összefüggés van, ami lényegében a *Prager-Drucker-modell*. Mivel a kísérleti adatok nemlineáris kapcsolatot mutatnak az oktaéderes nyíró- és nyomófeszültség között (Lásd: 28. ábra), ezért *Bresler* és *Pister* azt ajánlotta, hogy a kísérleti pontokat közelítsük egy másodfokú parabolával:

$$\frac{\tau_{oct}}{f'_c} = a - b \frac{\sigma_{oct}}{f'_c} + c \left(\frac{\sigma_{oct}}{f'_c} \right)^2 ,$$

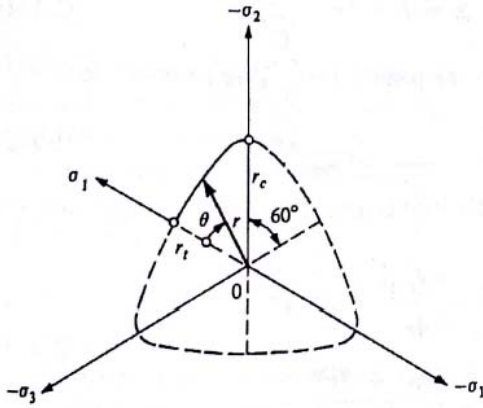
ahol a σ_{oct} pozitív, ha a húzás és az f'_c mindig pozitív.



28. ábra: Általános jellegű meridiánok Launay és társai kutatása alapján [6]

Az a , b és c tönkrementeli paraméterek megállapíthatók görbe illesztéssel a rendelkezésre álló kísérleti adatok alapján.

A következőkben a *Willam-Warnke-feltételt* mutatom be, mely ugyancsak háromparaméteres tönkrementeli felületet alkot meg betonok modellezésére. Ennek a modellnek egyenes meridiánjai és nem kör alakú metszete van. Az alábbi képen látható a tönkrementeli felület egy tipikus deviátoros metszete. *Willam* és *Warnke* megalkottak egy összefüggést a tönkrementeli felület metszetére, mely konvex és sima. Az összefüggést a tönkrementeli felület egy részére írták fel és a függvény alakja elliptikus görbéként adódott. A feltételben szereplő paraméterek a σ_m , a τ_m és a θ függvényében adták meg:



$$F(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_m}{f'_c} + \frac{1}{r(\theta)} \frac{\tau_m}{f'_c} - 1 = 0,$$

29. ábra: A tönkrementeli felület deviátoros metszete [6]

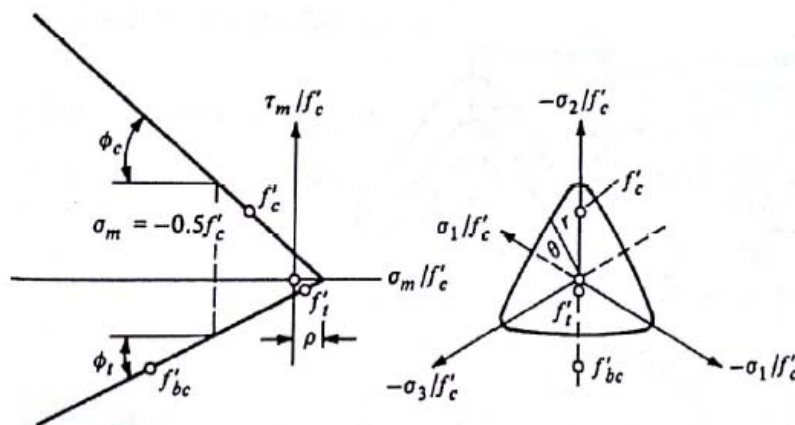
ahol a σ_m és τ_m a normál és nyírófeszültség átlagos eloszlása.

Az itt szereplő normál és nyírófeszültség kapcsolható az oktaéderes normál és nyírófeszültséghez a következő módon:

$$\sigma_m = \sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \xi \quad \text{és} \quad \tau_m^2 = \frac{3}{5} \tau_{oct}^2 = \frac{2}{5} J_2 = \frac{1}{5} r^2.$$

A *Willam-Warnke-feltétel* az alábbi ábrán látható a következő tipikus betonszilárdsági arányok felhasználásával:

$$\bar{f}'_{bc} = \frac{f'_{bc}}{f'_c} = 1,3 \quad \text{és} \quad \bar{f}'_t = \frac{f'_t}{f'_c} = 0,1.$$



30. ábra: A Willam-Warnke-modell meridián és deviátoros metszete [6]

4.6.4. Négyparaméteres modellek

Ottosen 1977-ben publikálta négyparaméteres modelljét, melyet a feszültségi invariánsok segítségével határozott meg:

$$F(I_1, I_2, \cos 3\theta) = a \frac{J_2}{f'_c{}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f'_c} + b \frac{I_1}{f'_c} - 1 = 0,$$

ahol a $\lambda = \lambda(\cos 3\theta) > 0$ és a és b konstansok.

A tönkremeneteli felületnek görbe meridiánjai és nem kör alakú deviátoros metszete van. A a és b konstansok meghatározhatók a görbe meridiánokból a λ függvényében, a $\lambda_t = 1/r_t$ és a $\lambda_c = 1/r_c$ konstansok segítségével. A λ_t és λ_c konstansokat a szakirodalomban megtalálhatjuk a k_1 és k_2 jelöléssel is és ezek egymással megfelelőnek tekinthetők. Tehát *Ottosen-modelljében* a négy paraméter az a , b , λ_t és λ_c .

A folyási felület meridián metszete kvadratikusan parabola és deviátoros metszete lekerekített sarkú háromszöghöz hasonló.

A *Reimann-feltétel* is a négyparaméteres modellek csoportjába tartozik. Ezt a feltételt *Reimann* 1965-ben publikálta és a feltétele a következő:

$$\frac{\xi}{f'_c} = a \left(\frac{r_c}{f'_c} \right)^2 + b \left(\frac{r_c}{f'_c} \right) + c,$$

ahol az r_c nyomási meridián.

A többi meridiánt feltételezi, hogy pontosítani kell a nyomó meridián segítségével, mely:

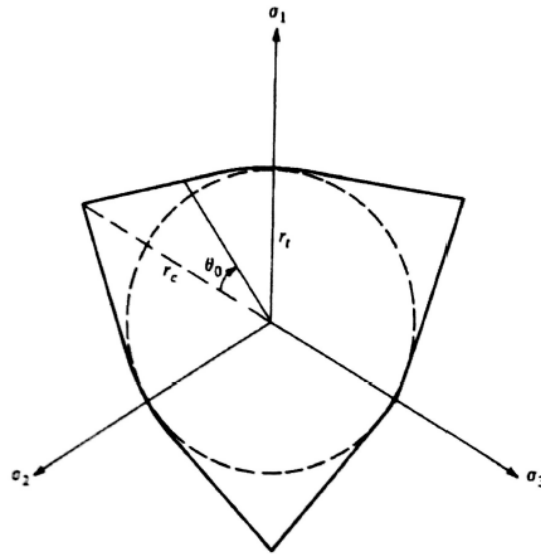
$$r = \phi(\theta_0)r_c$$

ahol a $\theta_0 = 60^\circ - \theta$, melyet a negatív σ_3 tengelytől mérünk.

A $-60^\circ \leq \theta_0 \leq 60^\circ$ tartományban a $\phi(\theta_0)$ függvény kifejezhető:

$$\phi(\theta_0) = \begin{cases} \frac{r_t}{r_c} & \text{ha } \cos \theta_0 \leq \frac{r_t}{r_c} \\ 1 & \text{ha } \cos \theta_0 > \frac{r_t}{r_c} \\ \frac{1}{\cos \theta_0 + \sqrt{[(r_c^2/r_c^2) - 1](1 - \cos^2 \theta_0)}} & \end{cases}$$

A következő ábrán a *Reimann-feltétel* egy deviátoros metszete látható $r_t/r_c = 0,635$ aránnyal.

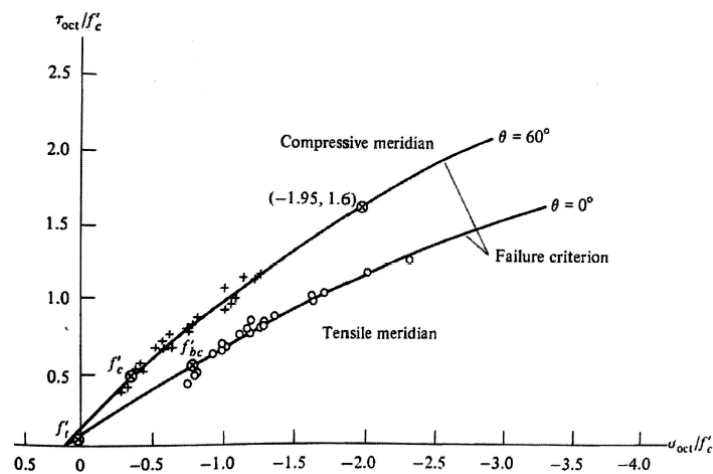


31. ábra: Reimann-feltételének deviátoros metszete [6]

A következőkben a *Hsieh-Ting-Chen-modellt* mutatom be, mely az előzőekhez hasonlóan négyparaméteres modell. *Hsieh és társai* 1979-ben javasolták az alábbi feltételt a feszültségi invariánsok I_1 , J_2 és a maximális főfeszültség σ_1 alkalmazásával:

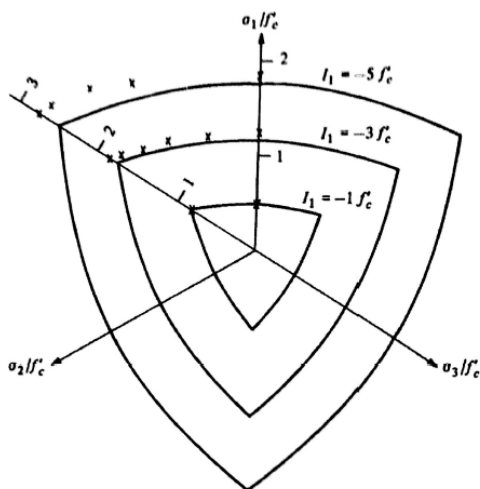
$$F(I_1, J_2, \sigma_1) = a \frac{J_2}{f'_c{}^2} + b \frac{\sqrt{J_2}}{f'_c} + c \frac{\sigma_1}{f'_c} + d \frac{I_1}{f'_c} - 1 = 0,$$

ami az általános oktaéderes nyírófeszültség $\tau_{oct} = f(\sigma_{oct})$, és a *Rankine-féle* maximális fő húzófeszültség feltételének a kombinációja. A modell görbe meridiánokkal és nem kör alakú metszettel rendelkezik, valamint tartalmazza az előzőekben említett feltételek speciális tulajdonságait. A feltétel redukálja a *Prager-Drucker-modellt*, ha $a = c = 0$, a *HMH-modellt*, ha $a = c = d = 0$ és a *Rankine-modellt*, ha $a = b = d = 0$, és $c = f'_c/f'_t$. A *Hsieh-Ting-Chen-modell* más kutatók számára is érdekesnek bizonyult, így *Kupfer* (1969), *Mills és Zimmermann* (1970) és *Launay és társai* (1970) kísérleteket végeztek, melyek laboratóriumi eredményeit

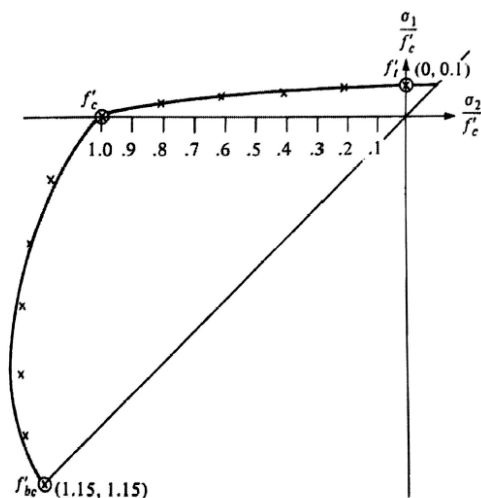


32. ábra: A *Hsieh-Ting-Chen-modell* meridián metszetei, valamint *Mills és Zimmermann* kísérleti eredményei [6]

összehasonlították a *Hsieh-Ting-Chen-modell*el. A kísérleti eredményeik és a *HTC-modell* meridián és deviátoros metszete az alábbi ábrákon látható:



34. ábra: A *Hsieh-Ting-Chen-modell* deviátoros metszetei, és Launay és társainak triaxiális kísérleti eredményei [6]



33. ábra: A *Hsieh-Ting-Chen-modell* deviátoros metszete, és Kupfer biaxiális kísérleti eredményei [6]

4.6.5. Ötparaméteres modellek

Willam és *Warnke-modell*ről már szó esett a 4.6.3. fejezetben, de meg kell említeni e két tudósnak azt a modelljét is, melyhez további két paramétert rendeltek hozzá. Ily módon a *Willam-Warnke-törési feltételt* alkalmazhatjuk az alacsony és a magas nyomásszinteken is. A háromparaméteres modellel ellentétben az ötparaméteres modellnél az átlagos feszültség komponensek (σ_m , τ_m) helyett most a húzó és nyomó meridiánokat adták meg:

$$\frac{\tau_{mt}}{f'_c} = \frac{r_c}{\sqrt{5}f'_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{f'_c} + a_2 \left(\frac{\sigma_m}{f'_c} \right)^2 \text{ ahol } \theta = 0^\circ,$$

$$\frac{\tau_{mc}}{f'_c} = \frac{r_c}{\sqrt{5}f'_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{f'_c} + b_2 \left(\frac{\sigma_m}{f'_c} \right)^2 \text{ ahol } \theta = 60^\circ.$$

Ebben a képletben szereplő hat konstans redukálható ötre a két görbe közös metszéspontjának felhasználásával.

A folyási felület a következőképpen adható meg:

$$F(\sigma_m, \tau_m) = \sqrt{5} \frac{\tau_m}{r(\sigma_m, \theta)} - 1 = 0,$$

ahol az $r(\sigma_m, \theta)$ az alábbi összefüggés alapján határozható meg:

$$r(\sigma_m, \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2) \cos \theta + r_c(2r_t - r_c)[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_c r_t]}{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_t)^2},$$

és a $\tau_m = r/\sqrt{5}$ összefüggést figyelembe véve.

A tönkremeneteli felület általános tulajdonságai a következők:

- 1. Öt paraméterrel rendelkezik.
 - 2. Felhasználja a feszültségi invariánsokat $F(I_1, J_2, \theta)$ vagy azonosan $F(\sigma_m, \tau_m, \theta)$.
 - 3. Sima felülete van egyetlen gradienssel.
 - 4. A deviátoros síkban 120° -ként periodikus és 60° -nál szimmetrikus.
 - 5. A deviátoros síkban nem kör alakú metszettel rendelkezik.
 - 6. A meridiánjai másodfokú parabolák.
 - 7. A tönkremeneteli görbe a deviátoros síkban egy elliptikus görbe által van előírva.
 - 8. Konvex a deviátoros és meridián metszetekben is.
 - 9. A tönkremeneteli felület a hidrosztatikus tengelynegatív irányába nyílt.
 - 10. Érvényes az összes gyakorlatban előforduló feszültség kombinációra, beleértve a húzófeszültségeket is és megbízható a kísérleti eredmények becslésére.
 - 11. A feltétel magába foglalja a korábban már említett feltételeket, mint speciális eseteket.
- Ha az öt paramétert a következőképpen vesszük fel:

$$a_0 = b_0 \text{ és } a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0,$$

akkor a *HMH-feltételt* kapjuk vissza. Továbbá amennyiben:

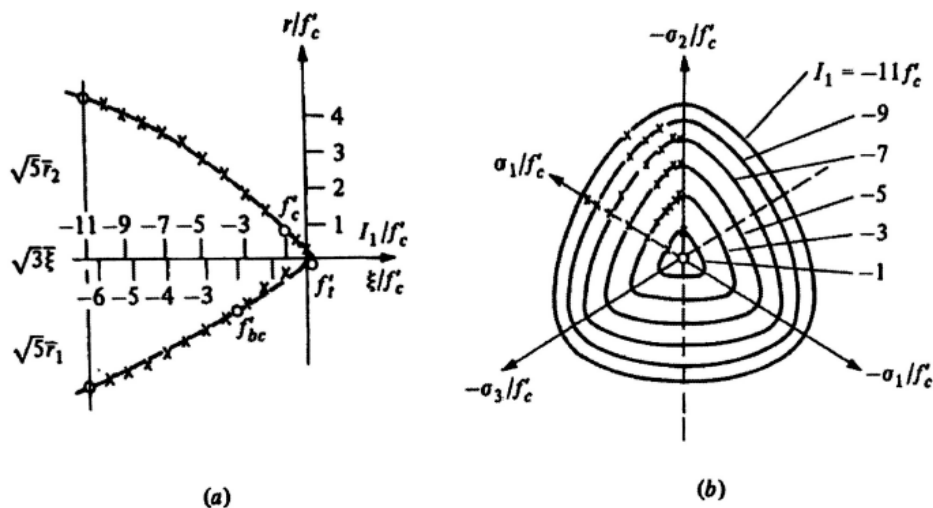
$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2 = 0,$$

akkor a *Prager-Drucker-feltételhez* jutunk. A

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} \text{ és } a_2 = b_2 = 0,$$

egyenlőségekkel a háromparaméteres *Willam-Warnke-modell* adódik.

Az alábbi ábrán az ötparaméteres *William-Warnke-modell* kísérleti eredményekhez való illesztése látható hidrosztatikus és deviátoros metszetben.

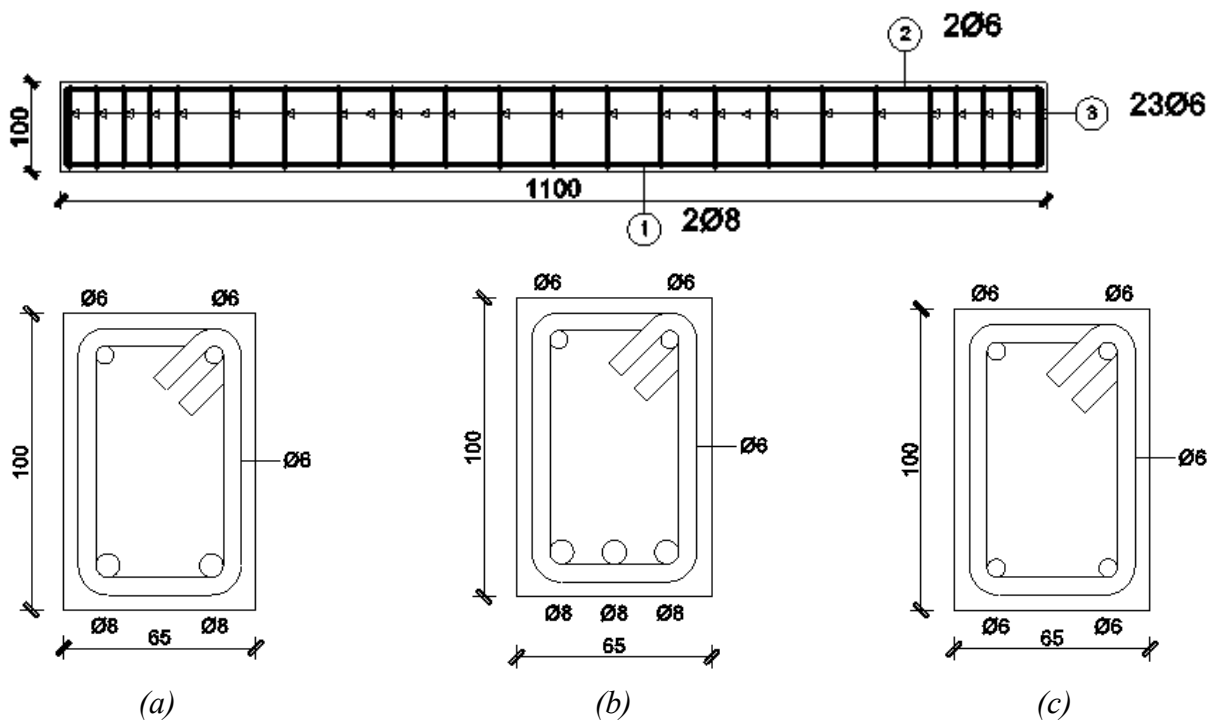


35. ábra: Az ötparaméteres *Willam-Warnke-modell* illesztése kísérleti eredményekhez (Launay és Gachon (1972)) (a) hidrosztatikus metszet, (b) deviátoros metszet [6]

5. Numerikus modellek

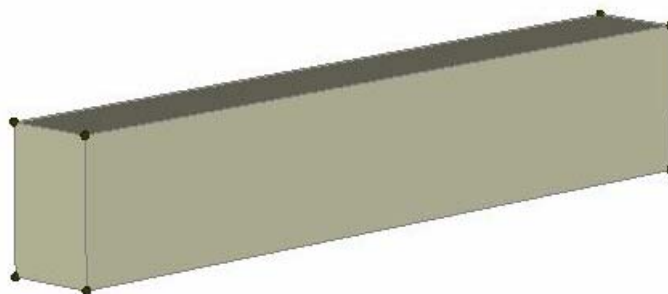
5.1. Modellek definiálása

Numerikus kísérleteket 3 fajta vasbeton gerendán végeztem el, melyek geometriailag megegyeznek, azonban vasalás tekintetében különbözőek. Készült egy normálvasalású, egy alulvasalt és egy túlvasalt gerenda modell. A gerendák geometriája és keresztmetszetei az alábbi ábrán láthatóak.



36. ábra: Gerendák geometriái és keresztmetszeteik
(a) normálvasalású, (b) túlvasalt, (c) alulvasalt

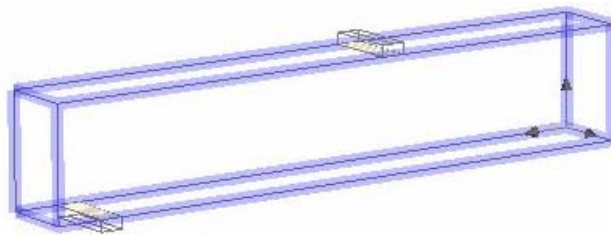
A gerendák magassága 10 cm, szélességük 6,5 cm és hosszúságuk 110 cm. A gerendák támaszköze 100 cm és harmadpontos teher terheli őket. Mindegyik gerenda húzott-nyomott hosszvasalással ellátott, nyírési vasalásuk pedig kengyelekkel kialakított. A gerendák mind



37. ábra: Gerenda geometria

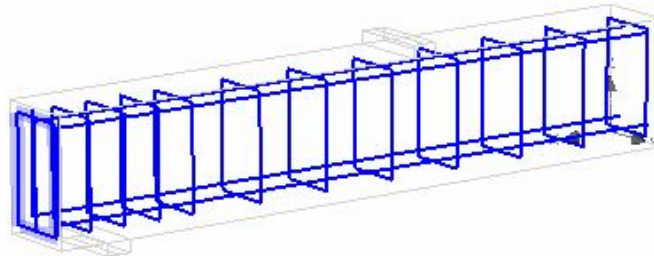
szimmetrikusak, így a programban csak a gerenda egyik felét definiáltam a vizsgálatok elvégzéséhez (Lásd: 37. ábra).

A betonhoz hozzárendelhető anyagmodelleket előre definiáltam, ezekkel később foglalkozom (5.2. fejezet). A numerikus kísérlet elvégzéséhez szükséges definiálni az acéllemezeket, melyek a támasz és az erő bevezetésénél helyezkednek el. Ezekre azért van szükség, hogy elkerüljük az irreális feszültségkoncentrációkat, az esetleges, a várhatónál korábbi tönkremenetelt és ezeken a helyeken a repedések megjelenését. Az acéllapok geometriai méretei a következők: szélesség 2 cm, hosszúság 6,5 cm, vastagság pedig 1 cm. A lemezek tengelyeit a statikai váznak megfelelően helyeztem el, így a támasznál elhelyezett lemez a gerenda szélétől 5 cm-re alul, a teher bevezetésénél elhelyezett lemez pedig a gerenda szélétől 33 cm-re felül helyezkedik el (Lásd: 38. ábra).



38. ábra: Acéllapok elhelyezkedése

Következő lépésben a betonacélok elhelyezését végeztem el. A vasalást valós átmérővel és hosszúsággal definiáltam a hosszvasalást illetve a kengyelezést beleértve (Lásd: 39. ábra). A vasalás és az acéllemezek anyagát szintén előre definiálnom kellett, ezekkel ugyancsak a későbbiekben foglalkozom (5.2. fejezet).

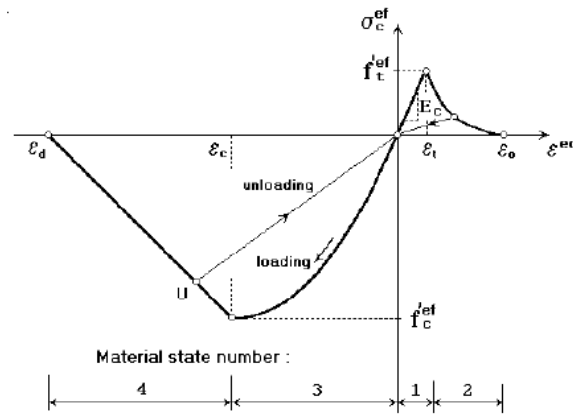


39. ábra: Betonacélok elhelyezkedése

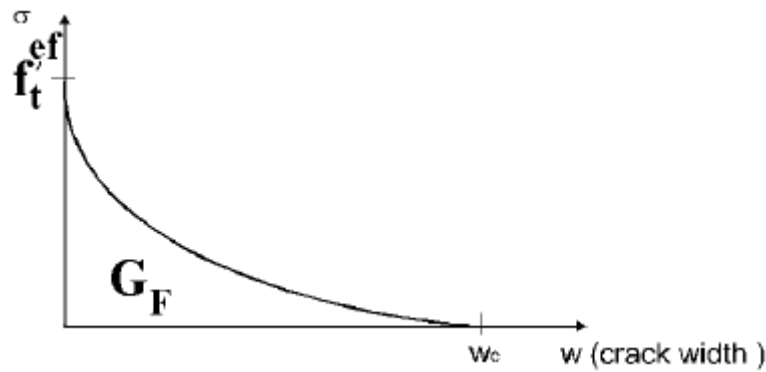
5.2. Anyagmodellek definiálása

A vizsgálatok során 3 betonra megalkotott anyagmodellt definiáltam a programban. Ezek mind a program által elérhető beágyazott anyagmodellek. A programban megadhatók egy teljesen egyenértékű egyirányú feszültség-alakváltozás görbe pontjai, pl.: a nyomó- és húzószilárdság értéke (Lásd: 40. ábra). A programban és a valós kísérletben is alkalmazott betonszilárdság **C20/25**.

A görbe többi pontját a program automatikusan felveszi, így azokat változtatni nem lehet. A 40. ábrán az 1-es szakasz a húzófeszültség kimerüléséig tart, itt a rugalmassági modulus lineárisnak tekintett. A 2-ik szakaszon a repedésmegnyílás modellezését egy



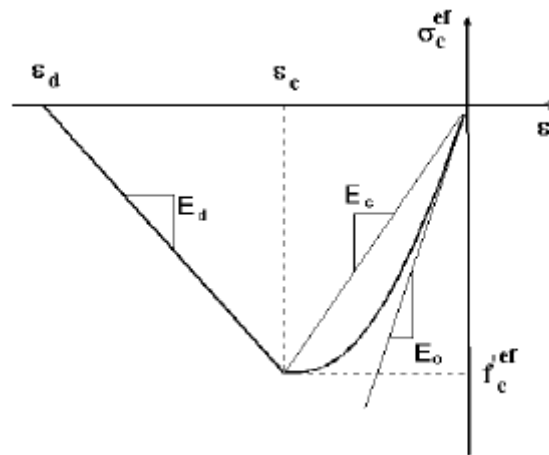
40. ábra: Egyirányú feszültség-alakváltozás diagram betonokra [18]
 exponenciális függvénnyel írják le, mely a speciális törési energia és a húzószilárdság függvényéből számítható.



41. ábra: Exponenciális repedésmegnyílás függvénye [18]

A 3. szakasz a nyomófeszültség maximális értékének eléréséig tart. Ez a függvény a beton kezdeti és a maximális nyomófeszültséget metsző rugalmassági modulusok arányától, valamint a nyomószilárdság értékétől függ. A 40. ábrán bemutatott görbe ezen a szakaszon parabolikus görbének tekinthető.

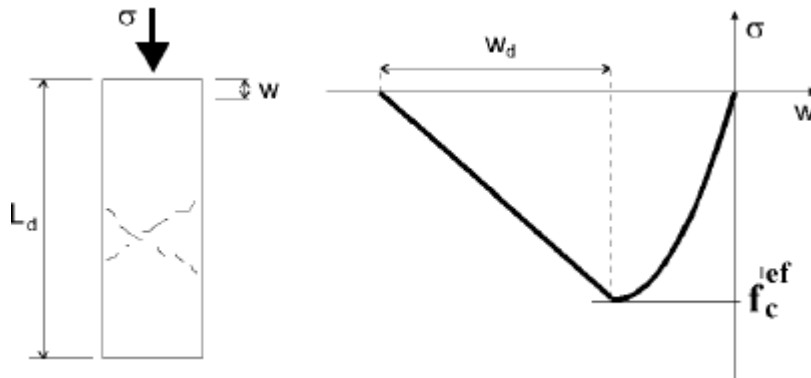
Végül a 4. szakasz a beton tönkremenetele utáni viselkedését szimbolizálja (Lásd: 43. ábra).



42. ábra: Feszültség-alakváltozás diagram nyomásnál [18]

Ez a jelenség a fellazulás vagy morzsolódás. A program ezt a jelenséget egy lineáris

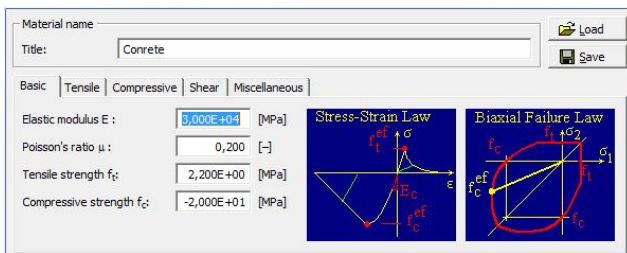
függvénnyel írja le. Ezen a szakaszon feltételezzük, hogy az elmozdulás független a szerkezet méretétől. A feltételezést Van Mier (1986) alátámasztotta kísérletekkel is.



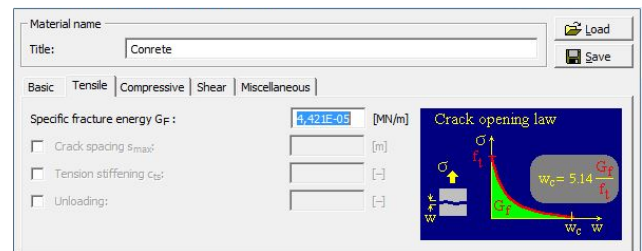
43. ábra: Fellazuló elmozdulás függvénye nyomásnál [18]

5.1.1. „3D Nonlinear Cementitious 2” anyagmodell

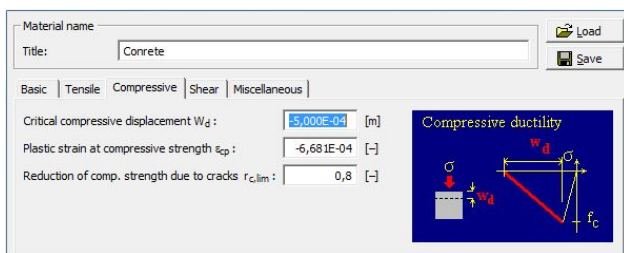
Az első általam is alkalmazott anyagmodellben (melynek a program készítői a „3D Nonlinear Cementitious 2” nevet adták) a következő paraméterek adhatók meg (Lásd: 44.ábra).



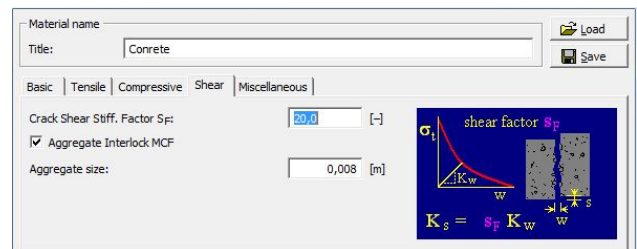
(a)



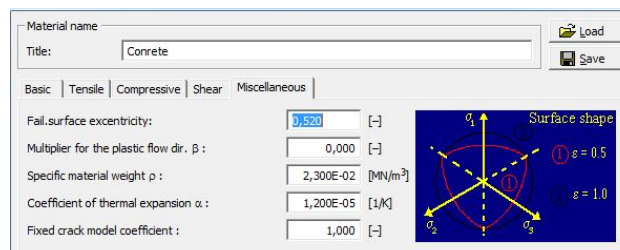
(b)



(c)



(d)



(e)

44. ábra: Betonmodell definiálása a programban

A 44./a ábrán az általános tulajdonságok állíthatók be, mint a rugalmassági modulus, Poisson-tényező, húzó- és nyomószilárdság. A (b) ábrán a húzáshoz tartozó, a (c) ábrán a nyomáshoz tartozó, a (d) ábrán a nyírási és az (e) ábrán a vegyes tulajdonságok adhatók meg. A programnak csupán a nyomószilárdság értéket adtam meg, majd az összes többi automatikusan felvette. A modell tulajdonságain természetesen lehet változtatni, azonban a folyási függvény, a degradáció, a repedésmegnyílás, a nyírási faktor függvényeinek csak egy vagy két pontját változtathatjuk, mivel a függvények előre definiáltak.

5.1.2. „3D Variable Nonlinear Cementitious 2” anyagmodell

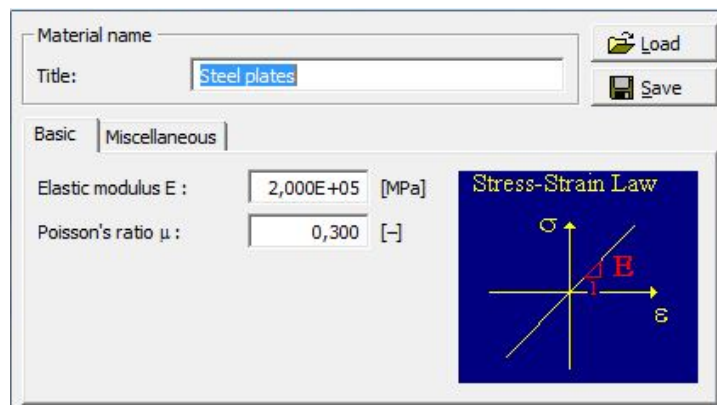
A második anyagmodell neve a program szerint „3D Variable Nonlinear Cementitious 2”, mely beállítása az előzőekhez hasonlóan végezhető el. A modell a „3D Nonlinear Cementitious 2” modellen alapszik, az anyagok paraméterei megadhatók saját kísérleti tapasztalatok és eredmények alapján, de a modellben nem adhatók meg a nyírási paraméterek és a legnagyobb szemcsenagyság sem. Különbség adódik még abban, hogy az előzőekben (5.1.1. fejezet) említett modellben a nyomószilárdság értéke a repedések kialakulása miatt csökkentve van, ebben a modellben azonban ez a paraméter-beállítás nem alkalmazható.

5.1.3. „C20/25 mean values” anyagmodell

A harmadik modellt a két előző modellhez képest egyszerűbb definiálni, mivel ez egy katalógusból választható ki, melyet a program felajánl. Ebben a beton nyomószilárdságát kell kiválasztani és azt, hogy a nyomószilárdság értékének a karakterisztikus, várható vagy tervezési értékével számoljon a program. Az általam kiválasztott modell a beton nyomószilárdságának várható értékét alkalmazta. Ez a modell is a „3D Nonlinear Cementitious 2” modellen alapszik, azonban ebben az esetben a modell magasabb szilárdsági értékeket alkalmaz.

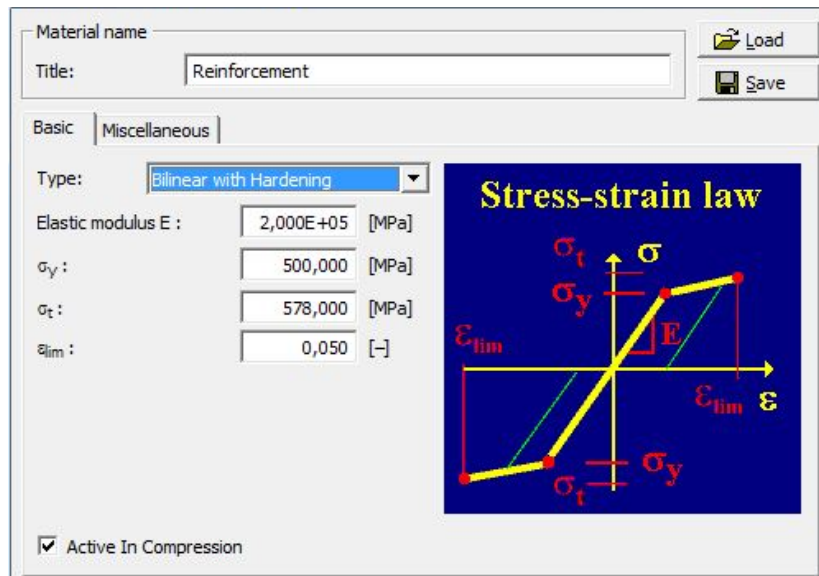
5.1.4. Acél anyagmodell

Az acéllemezekre egy a betonénál egyszerűbb anyagmodellt, egy izotrop lineárisan rugalmas modellt alkalmaztam. Itt megadható a rugalmassági modulus és a Poisson-tényező értéke.



45. ábra: Acél anyagmodell definiálása

A betonacélokra lineárisan rugalmas és lineárisan felkeményedő anyagmodellt választottam. A modell ugyanúgy viselkedik húzás hatására, mint nyomásra. Megadható a

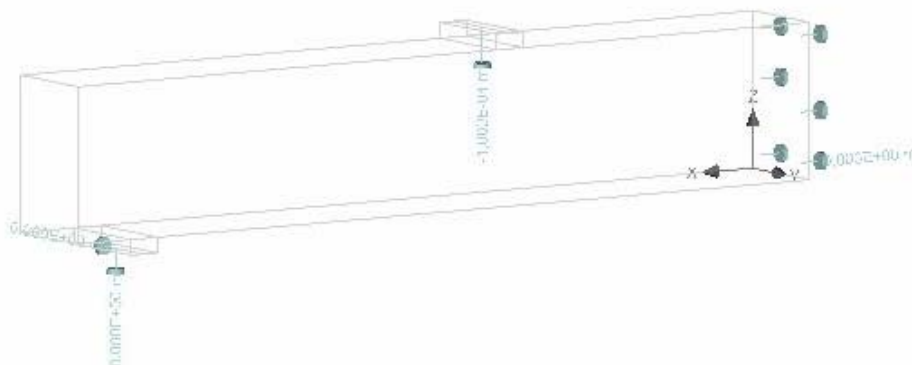


46. ábra: Betonacél anyagmodell definiálása

rugalmassági modulus, a szakadónyúlás értéke és a folyáshatár, melyből a szakítószilárdság értékét a program meghatározza, de ez manuálisan is megadható. A normál- és túlvasalt gerendáknál az alul elhelyezett húzott hosszvasalás 8mm ($\phi 8$) átmérőjű és folyáshatára **500 N/mm²**, ezzel ellentétben a kengyelek és a felül elhelyezett nyomott hosszvasalás 6mm ($\phi 6$) átmérőjű és folyáshatára **240 N/mm²**. Az alulvasalt gerendáknál 6mm átmérőjű betonacélokat alkalmaztam, mind a húzott és nyomott hosszvasalás és a kengyelezés kialakítására. A fenti ábrán egy a normálvasalású gerendánál alkalmazott húzott betonacél anyagmodelljének beállítását szemléltetem (Lásd: 46. ábra).

5.3. Megtámasztás és terhelés

A szoftverrel vizsgált gerendák tengelye a globális x tengellyel párhuzamos és a koordináta rendszer jobbsodrású, így a z tengely függőlegesen felfelé mutat. Mivel a támaszhoz



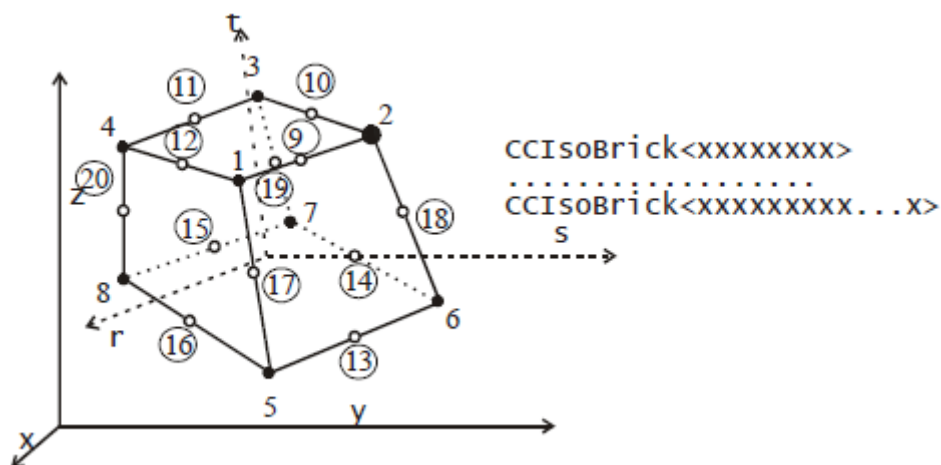
47. ábra: Gerenda megtámasztása és terhe

egy acéllap lett elhelyezve, ezért a megtámasztást vonalmenti támaszként definiáltam az acéllap alsó síkjára. A támasz csuklós, jelen esetben csak az y tengely körüli elfordulása megengedett. A gerenda megalkotásánál (mint már említettem) szimmetriát alkalmaztam, ezért a gerenda középső keresztmetszetén a szimmetriaviszonyoknak megfelelő megtámasztást helyeztem el. Az itt megadott megtámasztás a gerenda keresztmetszetére értelmezett, azaz egy felületi megtámasztás, mely az x irányban gátolt, az y és z irányban pedig szabad (Lásd: 47. ábra).

A terhet egy elmozdulás segítségével helyeztem el a szerkezeten, a vizsgálat mondhatni elmozdulás vezérelt. Az elmozdulás a $-z$ tengely irányába mutat és mértéke $0,1$ mm. Az elmozdulás pontosan a terhelés bevezetéséhez elhelyezett acéllemez felső síkjának közepén helyezkedik el. A program a megadott elmozdulást, minden egyes terhelési lépcsőben működteti a szerkezetre, tehát attól függően, hogy hány darab terhelési lépcsőt definiálunk, annyszor adja rá a $0,1$ mm-es elmozdulást (Lásd: 47. ábra). A kézi számításokból megkapott legnagyobb lehajlások $6-7$ mm-re adódtak, így a terhelési lépcsők számát $60-70$ db-ra vettem fel, azonban ez nem minden esetben vezetett jó eredményre, de erről bővebben az 5.5. fejezetben számolok be.

5.4. Végeselem háló definiálása

Az ATENA programcsomag 3 dimenziós változatában megtalálható többféle végeselem, melyek közül én a téglatestelemet alkalmaztam a gerenda modellezésénél. A téglatestelem elérhető $8-20$ csomópontos változatban is (Lásd: 48. ábra). Elérhetőek lineáris elemek, melynek csomópontjai az elem sarkaiban helyezkednek el valamint kvadratikus elemek is, melyeknél az éleken is és az elemen belül is található csomópontok. A számításaim során



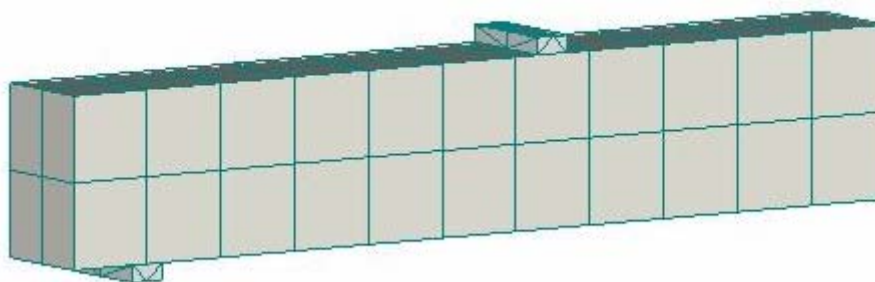
48. ábra: Téglatestelem geometriája [18]

én a lineáris elemet alkalmaztam. Az elemhez tartozó interpolációs függvényeket a **13/A**. Melléklet 1. táblázata szemlélteti. Az integrálási pontokat a Gauss pontokban értelmezi, ennek paramétereit a **13/A**. Melléklet 2. táblázata mutatja be.

A programban megtalálható egy automatikus háló generáló, melynél megadható a végeselem háló mérete, majd a program ehhez mérten elkészíti a szerkezetre a hálót. Ahhoz, hogy a programmal megfelelő eredményeket kapjunk nagyon fontos a végeselem háló

méretének korrekt felvétele. A vizsgálataim során 5 féle nagyságú végeelem hálót alkalmaztam. Így készültek 2, 3, 4, 5 és 6 cm-es hálófelosztású modellek. A hálófelosztáson kívül az alkalmazott interpolációs polinomokat is változtattam, így alkalmaztam lineáris és kvadratikus függvényeket is. Ezeket táblázatosan megadom a normálvasalású gerenda modellre (Lásd: *1. táblázat*). A többi gerenda modell paramétereit a **13/B**. Melléklet 3. táblázata tartalmazza.

Egy 5 cm-es hálóval generált gerenda képe látható az *49. ábrán*.



49. ábra: Végeelem háló gerendán, Hálóméret: 5 cm

Normálvasalású gerenda paraméterei					
Ssz.:	Végelem	Anyagmodell	Elmozdulás egy teherlépcsőben [mm]	Végeges elem háló mérete [cm]	Iteráció
1	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	2,00	Newton-Raphson
2	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	3,00	Newton-Raphson
3	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	4,00	Newton-Raphson
4	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	5,00	Newton-Raphson
5	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	6,00	Newton-Raphson
6	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	2,00	Newton-Raphson
7	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	3,00	Newton-Raphson
8	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	4,00	Newton-Raphson
9	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	5,00	Newton-Raphson
10	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	6,00	Newton-Raphson
11	lineáris	C20/25 mean values	0,10	2,00	Newton-Raphson
12	lineáris	C20/25 mean values	0,10	3,00	Newton-Raphson
13	lineáris	C20/25 mean values	0,10	4,00	Newton-Raphson
14	lineáris	C20/25 mean values	0,10	5,00	Newton-Raphson
15	lineáris	C20/25 mean values	0,10	6,00	Newton-Raphson
16	kvadratikus	3D nonlinear cementitious 2	0,10	2,00	Newton-Raphson
17	kvadratikus	3D nonlinear cementitious 2	0,10	3,00	Newton-Raphson
18	kvadratikus	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	2,00	Newton-Raphson
19	kvadratikus	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	3,00	Newton-Raphson
20	kvadratikus	C20/25 mean values	0,10	2,00	Newton-Raphson
21	kvadratikus	C20/25 mean values	0,10	3,00	Newton-Raphson
22	kvadratikus	C20/25 mean values	0,10	1,00	Newton-Raphson

1. táblázat: Normálvasalású gerenda paraméterei

Az előbb bemutatott modelleken kívül a normálvasalású gerenda modellt 1 cm-es végeelem hálóval is futtattam és ennél a modellnél kvadratikus interpolációs polinomot állítottam be. A vizsgálatok eredményeit az 5.5. fejezetben mutatom be.

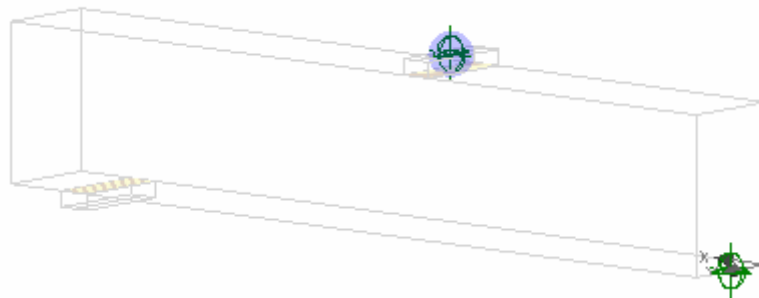
Az acéllemezekre a program fejlesztői tetraéderes elem használatát javasolják, bár ez feszültségek vizsgálatára nem ajánlott, azonban ebben az esetben megfelelő, mivel nem az acéllemezek vizsgálata a cél.

Valamennyi nemlineáris analízisnél az iterációs folyamat végrehajtásához a program egy implicit megoldási módszert, jelen esetben a Newton-Raphson iterációs eljárást alkalmazza.

5.5. Numerikus vizsgálatok eredményei

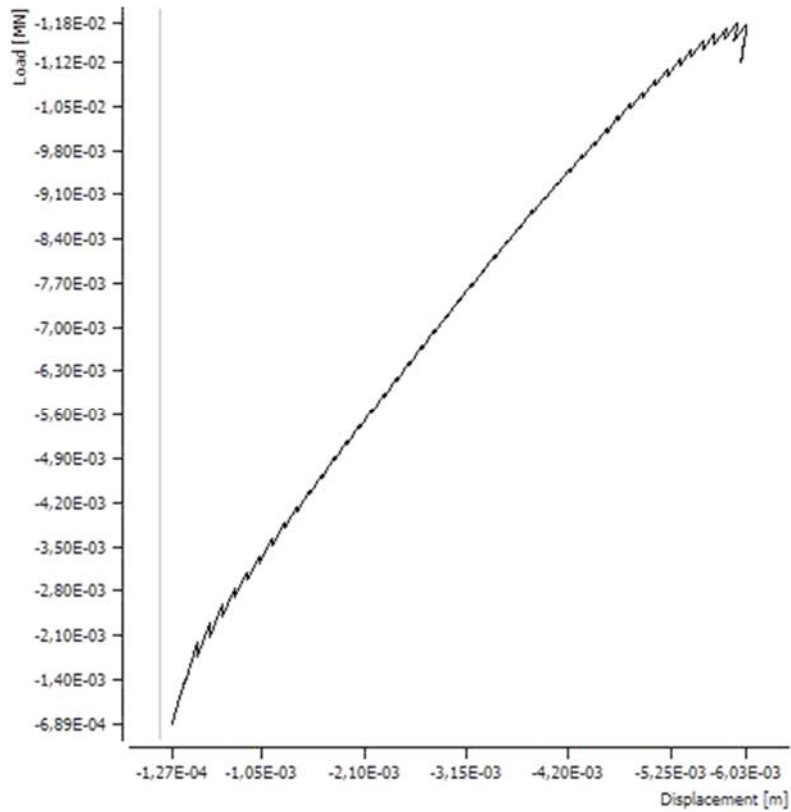
Ebben a fejezetben szeretném bemutatni a numerikus vizsgálataim eredményeit, valamint a felmerült problémákat és hibákat, melyek a modellekben mutatkoztak. A numerikus eredményeket a kézi számítás eredményeivel hasonlítom össze.

Annak érdekében, hogy a gerenda terhelése következtében kialakuló deformációt mérni tudjam el kellett helyeznem monitor pontokat. Elsősorban erő-elmozdulás diagramot szerettem volna kapni, így a beiktatott elmozduláshoz egy olyan monitor pontot helyeztem el, mely a terhelési lépcsőben megadott elmozdulásból egy erőt számít. Továbbá a gerenda középső keresztmetszetének alsó-középső pontján egy elmozdulásokat regisztráló monitor pontot helyeztem el (Lásd: 50. ábra).

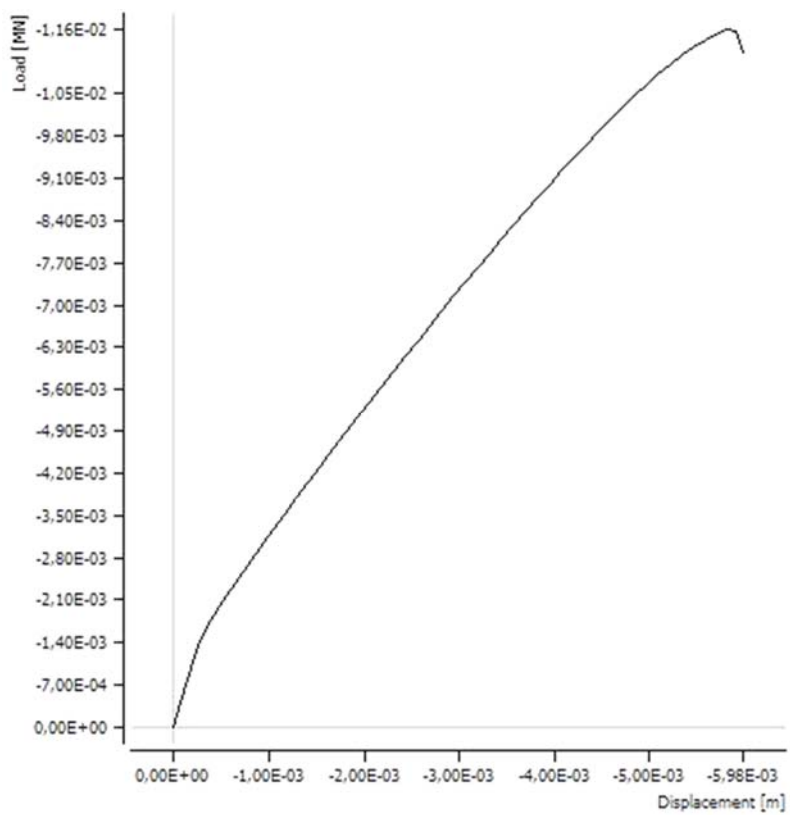


50. ábra: Monitorpontok elhelyezkedése a gerendán

A futtatás során ezek a pontok rögzítik minden egyes terhelési lépcsőben a hozzájuk rendelt mennyiséget. A terhelésnél elhelyezett monitor pont erőt rögzít MN mértékegységgel, a másik monitor pont pedig z-tengely irányú elmozdulást méterben. Így a számítás során ezeket élő grafikonon követhetjük úgy, mint egy valós kísérlet során. A grafikonon megjeleníthető az iterációk utáni eredmények és az egyes terhelési lépcsők után rögzített eredmények is. A következőkben szemléltetem az előbb említett grafikonokat, ezek a grafikonok a „C20/25 mean values” beton anyagmodell 1 cm-es végeelem hálójú, kvadratikus függvényű modell eredményeit ábrázolják (Lásd: 1. és 2. grafikon).

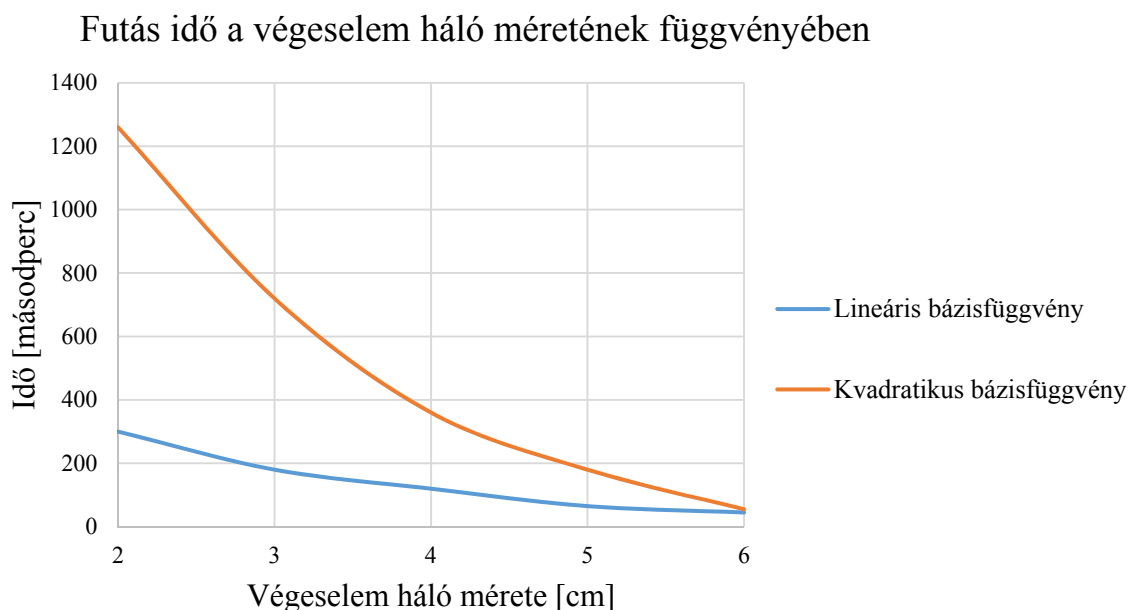


1. grafikon: Erő elmozdulás grafikon az iteráció után



2. grafikon: Erő- elmozdulás grafikon a terhelési lépcsők után

A számítógépem teljesítményéhez mérten a számítások ideje igen változó volt. A számítás idejének hosszúságát két paraméter befolyásolja legjobban, ezek a végeelem háló mérete és az alkalmazott interpolációs polinom. Így a leghosszabb számítás az esetben alkalmazott legkisebb végeelem hálóval (1 cm), valamint a kvadratikus függvény használatával adódott. Ekkor a számítás hozzávetőlegesen 7,5 óráig tartott. A modellek közelítő futás idejét a következő grafikonon mutatom be, a kvadratikus és lineáris függvényeket alkalmazó modelleket külön jelölve (Lásd: 3. grafikon).



3. grafikon: Futás idő a végeelem háló méretének függvényében,
(2, 3, 4, 5 és 6 cm-es végeelem hálónál)

A következőkben a különböző anyagmodellekkel számított gerendamodellek eredményeit mutatom be, elsőként a „3D Nonlinear Cementitious 2” anyagmodellből kapott eredményeket. A 4. grafikonon az ehhez a modellhez tartozó normálvasalású gerenda erő-elmozdulás grafikonja látható. A végeelem háló méretétől függően egészen eltérő eredmények adódtak.

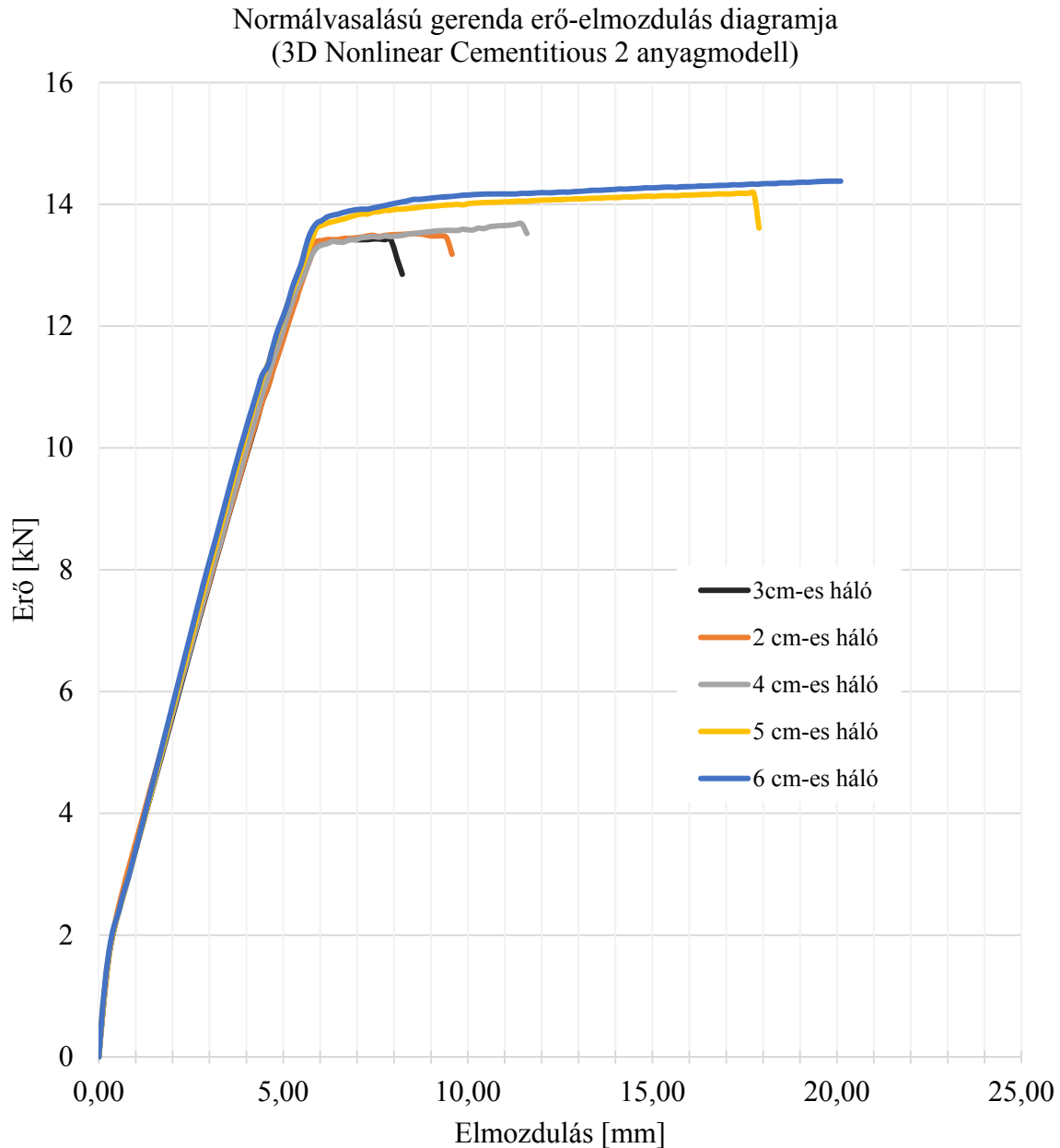
A kapott eredményekből jól látszik, hogy a gerenda a kezdeti szakaszban nagy merevséggel rendelkezik, ez azonban a berepedés után közel 60%-ra csökken. A berepedés jelensége megfigyelhető az általam vizsgált modelleken is. Az ehhez tartozó erő ennél a modellnél, végeelem háló mérettől függetlenül az 1,5-1,7 kN-os intervallumba adódik. A kézi számítással meghatározott és a modellekből kapott repesztő erő értékeit a 2. táblázat tartalmazza.

Gerenda megnevezése	Repesztő erő a kézi számítás alapján [kN]	Repesztő erő a numerikus modellek alapján [kN]
Normálisan vasalt	1,17	1,55

2. táblázat: Repesztő erők nagysága normálvasalású gerendánál

A gerendákhoz tartozó részletes kézi számítások a **13/D**. Mellékletben megtalálhatóak.

A berepedés után az összes numerikus kísérletben lineáris szakasz figyelhető meg az erő-elmozdulás grafikonon, nagyjából a törőerő eléréséig. A törőerő elérése előtt egy 0,2-0,5 kN-os szakaszban ugyancsak egy merevség csökkenés állapítható meg, ez azonban nem lineáris viselkedést mutat.

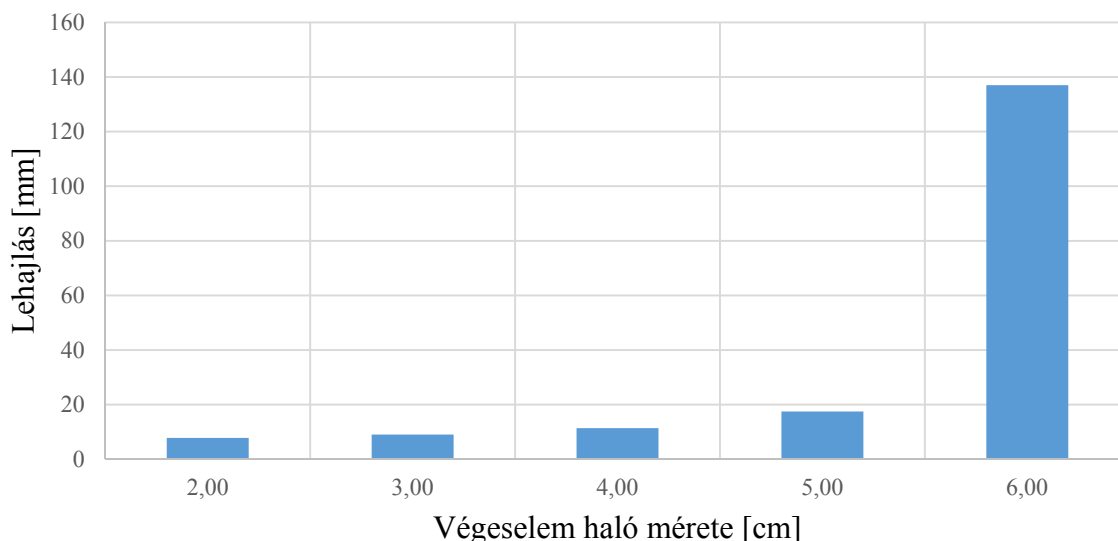


4. grafikon: Normálvasalású gerenda erő-elmozdulás diagramja,
(3D Nonlinear Cementitious 2 anyagmodellnél)

Megfigyelhető, hogy a 4 cm-es hálómérettől nagyobb felosztásnál a gerenda lehajlás értékei irreálisan nagyok lesznek, hozzávetőlegesen a gerenda magasságával megegyező lehajlásokat tudna produkálni. Ezek az értékek hibásak, mivel ez nem valószínű. Arra a következtetésre jutottam, hogy a végeelem háló mérete nagyban befolyásolja a kapott eredmény helyességét. A számítások mindegyik modellnél elvégezhetőek, a számítás konvergál, azonban a nagyméretű végeelem hálónál rosszul közelíti a lehajlást és a tönkremenetelhez tartozó erőt. A tönkremenetel után a gerenda nem képes több erőt felvenni, így a grafikonon itt egy éles törés

mutatkozik. Az eltérő méretű végeelem hálókval kapott lehajlás eredményeket az 5. grafikonon mutatom be.

Lehajlás értékek a végeelem háló méretének függvényében



5. grafikon: Lehajlás értékek a végeelem háló méretének függvényében
(3D Nonlinear Cementitious 2 anyagmodellnél)

A kézi számítás a legnagyobb lehajlásra a normálvasalású gerendánál 6,89 mm-re adódott, a tönkremenetelhez tartozó erő pedig 10,2 kN. A legnagyobb lehajláshoz és a tönkremenetelhez tartozó erőhöz legjobban a 2 cm-es hálóval készített modell közelít. Ezen belül a kvadratikus függvényt alkalmazó modell még pontosabb eredményt ad.

Az alulvasalt és a túlvasalt gerendáknál ugyanaz a jelenség figyelhető meg a nagyobb méretű végeelem háló alkalmazásánál. Tehát a nagyobb méretű végeelem háló alkalmazása nem vezet megfelelő eredményre, ezért a következőkben csak a 2 és 3 cm-es hálóméretű modelleket mutatom be. A gerendákra kézzel és numerikusan meghatározott repesztő erőt, a tönkremenetelhez tartozó erőt és a legnagyobb lehajlás értékeit a 3. táblázat tartalmazza.

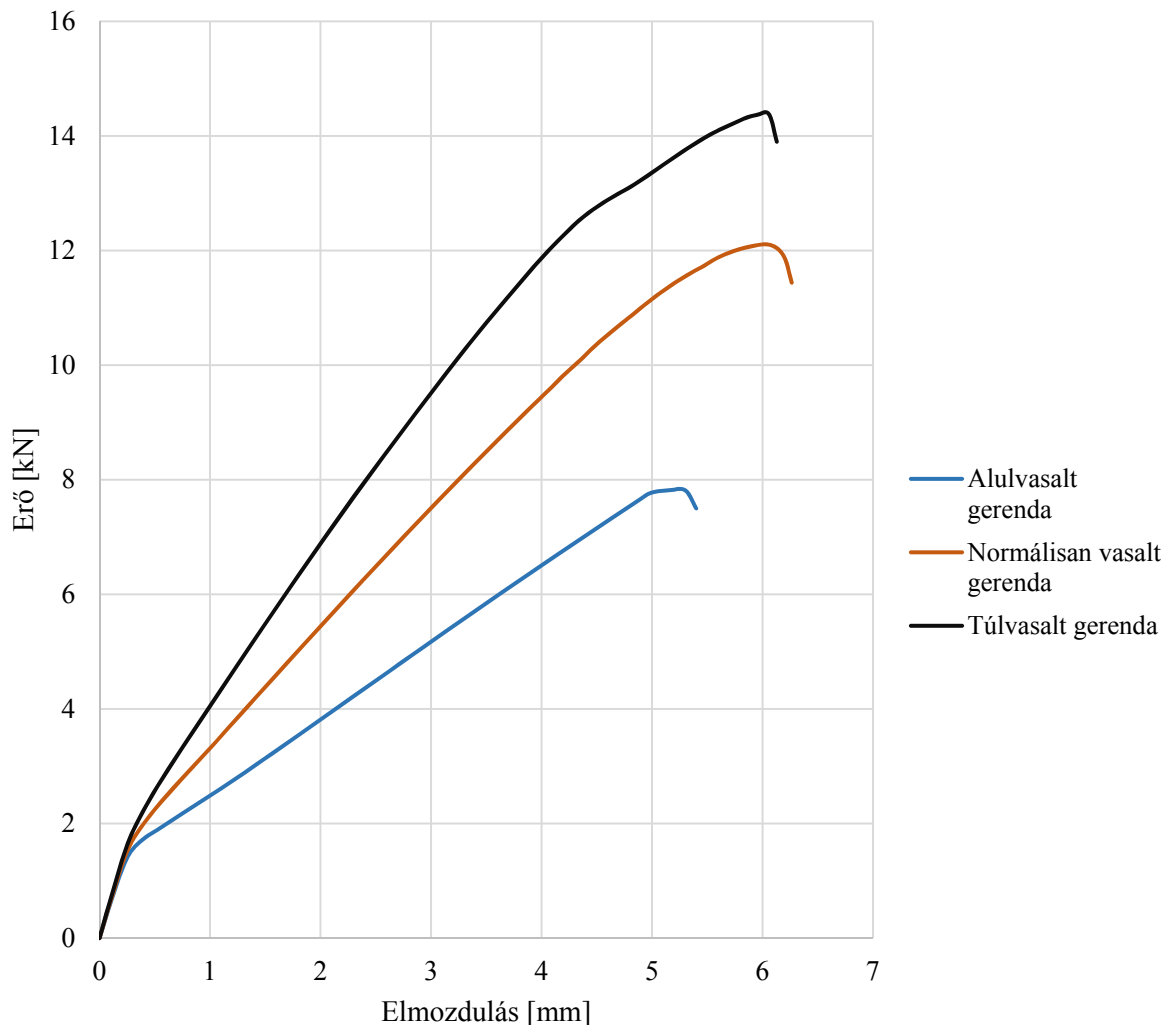
Gerenda megnevezése	Repesztő erő (kézi számítás) [kN]	Repesztő erő (numerikus modell) [kN]	Törőerő (kézi számítás) [kN]	Törőerő (numerikus modell) [kN]	Lehajlás (kézi számítás) [mm]	Lehajlás (numerikus modell) [mm]
Alulvasalt	0,99	1,48	6,50	8,09	5,20	5,40
Normálisan vasalt	1,17	1,55	10,20	13,40	6,89	6,26
Túlvasalt	1,39	1,65	11,10	16,80	6,19	6,13

3. táblázat: A kézi és numerikus számítások eredményei
(3D Nonlinear Cementitious 2 anyagmodell, 2 cm-es hálóméret, kvadratikus interpolációs polinom)

A táblázatból megállapítható, hogy a repesztő erő a kézi számítással alacsonyabb értéket mutat, mint a numerikus vizsgálatban kapott, a tönkremenetelhez tartozó erő szintén, azonban a lehajlás a numerikus vizsgálatoknál kisebb értéket ad, mint a kézi számításnál. Ennek oka lehet, hogy a numerikus modellben a gerenda merevsége nagyobb.

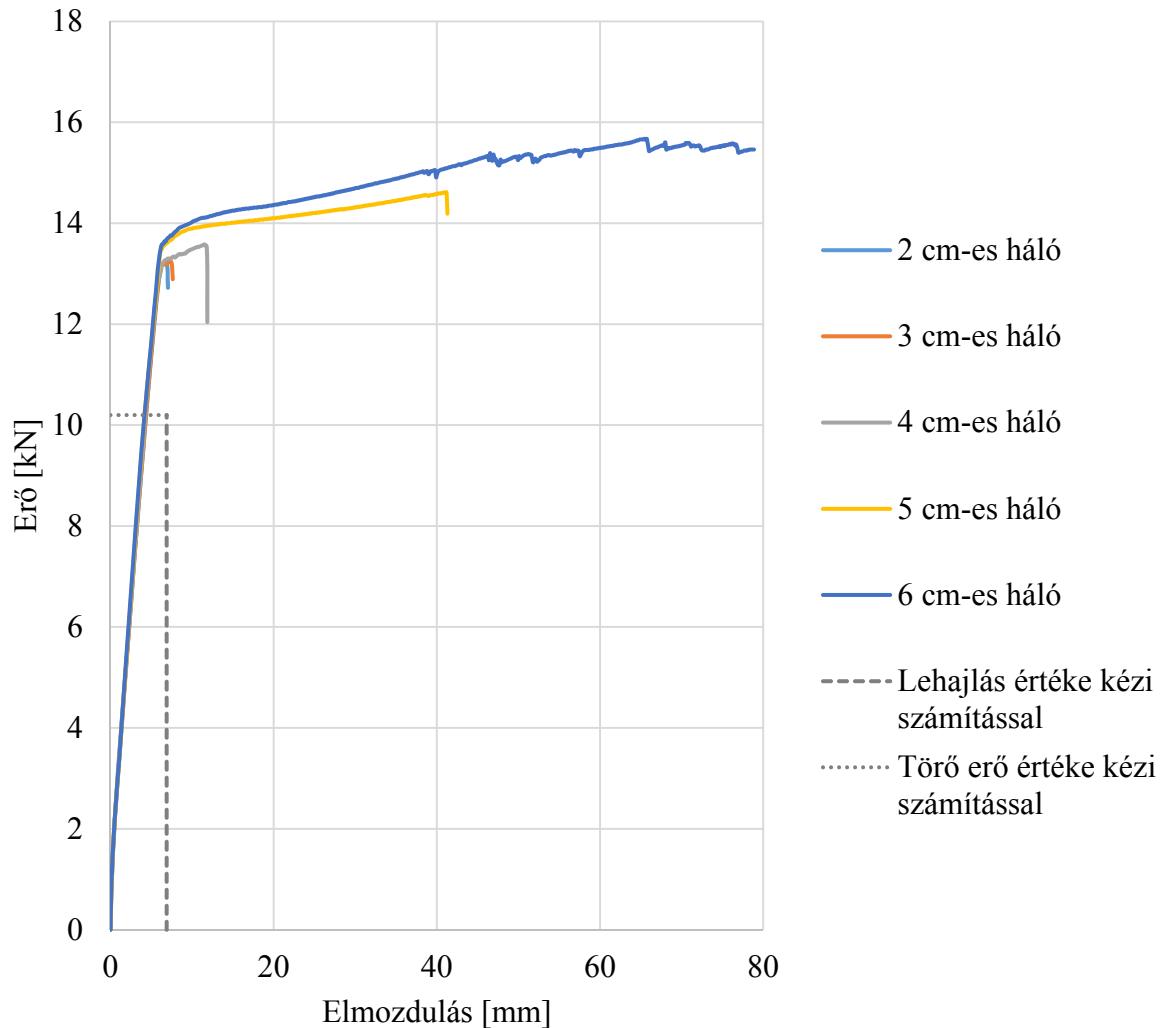
A következő grafikonon a három eltérő vasalású gerenda erő-elmozdulás diagramját szemléltetem (Lásd: 6. grafikon). A grafikonon szereplő eredményeket kvadratikus interpolációs polinomok és 2 cm-es végeelem háló felosztással kaptam.

Numerikus kísérletek erő-elmozdulás grafikonjai



6. grafikon: A vizsgált gerendák erő-elmozdulás grafikonjai
(2cm-es végeelem háló, kvadratikus bázisfüggvény)

A következőkben a „3D Variable Nonlinear Cementitious 2” anyagmodellel kapott eredményeket szeretném bemutatni. A 7. grafikonon az előbb említett anyagmodellhez tartozó számítások eredményei láthatóak. Itt is hasonló viselkedés figyelhető meg, mint a korábban említett anyagmodellnél. A nagyméretű végeelem hálával készített modellek rosszul közelítik a kézi számítással kapott eredményeket. Ennél az anyagmodellnél kapott eredményeknél is a 2 és 3 cm-es végeelem hálával megalkotott modellek bizonyultak megfelelőnek, azaz ezek közelítik legjobban a kézi számítás eredményeit.

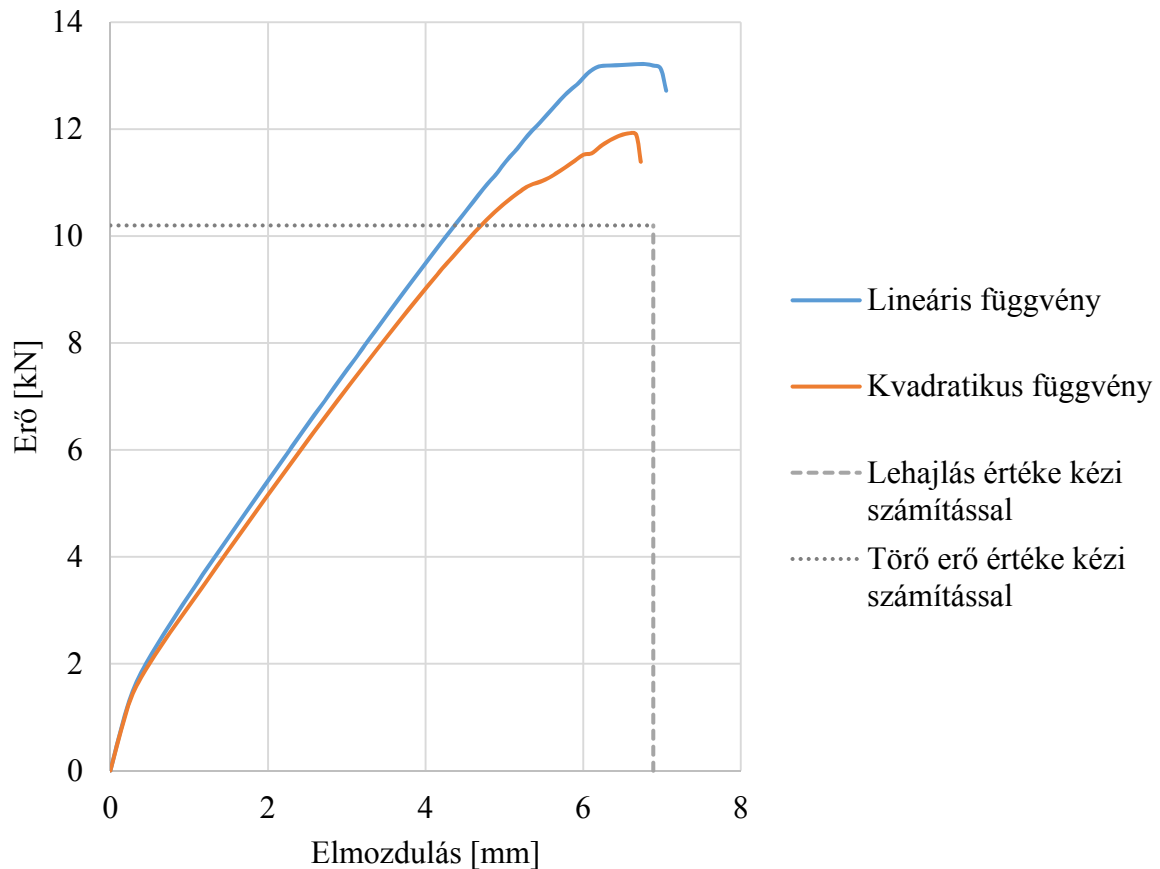
Normálvasalású gerenda erő-elmozdulás diagramjai
(3D Variable Nonlinear Cementitious 2 anyagmodell)

7. grafikon: Normálvasalású gerenda erő-elmozdulás diagramja,
(3D Variable Nonlinear Cementitious 2 anyagmodellnél)

A 2 cm nagyságú végeelem hálóval készült modellek erő-elmozdulás diagramjait a 8. grafikonon szemléltetem. A lineáris bázisfüggvényt használó modellnél a tönkremenetelhez tartozó erő 13,20 kN, valamint ezen a görbén a tönkremenetel után egy plató jelenik meg. Ezzel ellentétben a kvadratikus bázisfüggvénnyel készített modellnél a tönkremenetelhez tartozó erő alacsonyabb (11,89 kN), viszont itt nem jelenik meg az előbb említett plató. A repesztő erő értékében és a legnagyobb lehajlás értékében jelentős különbség nem mutatkozik.

Az alul- és túlvasalt gerendák ugyancsak hasonló viselkedést mutatnak, mint a „3D Nonlinear Cementitious 2” anyagmodellrel készített modelleknél. Az ezekhez tartozó összehasonlító grafikonon megfigyelhető (Lásd: 9. grafikon), hogy itt is a túlvasalt gerendához tartozik a legnagyobb tönkremenetelhez tartozó erő (13,50 kN) és az alulvasalt gerendához a legkisebb (7,75 kN). Azonosság figyelhető meg a lehajlásoknál is, mivel a kézi számításban kapott eredményekkel (Lásd: 3. táblázat) közel azonosak a numerikus számítás eredményei, azaz a legnagyobb lehajlást (6,67 mm) a normálvasalású gerenda éri el, a legkisebbre az alulvasalt gerenda (5,41 mm) képes és a túlvasalt gerendáé pedig 6,05 mm-re adódik.

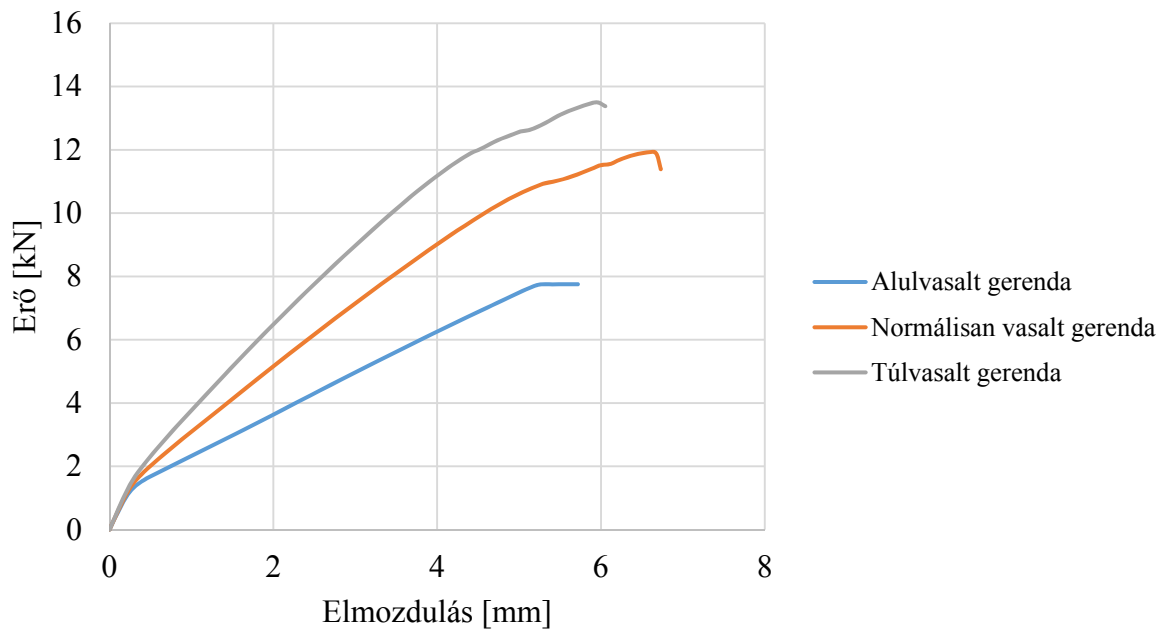
Erő-elmozdulás grafikon 2cm-es végeelem hálóval



8. grafikon: Erő-elmozdulás grafikon 2 cm-es végeelem hálóval
(„3D Variable Nonlinear Cementitious 2” anyagmodellnél)

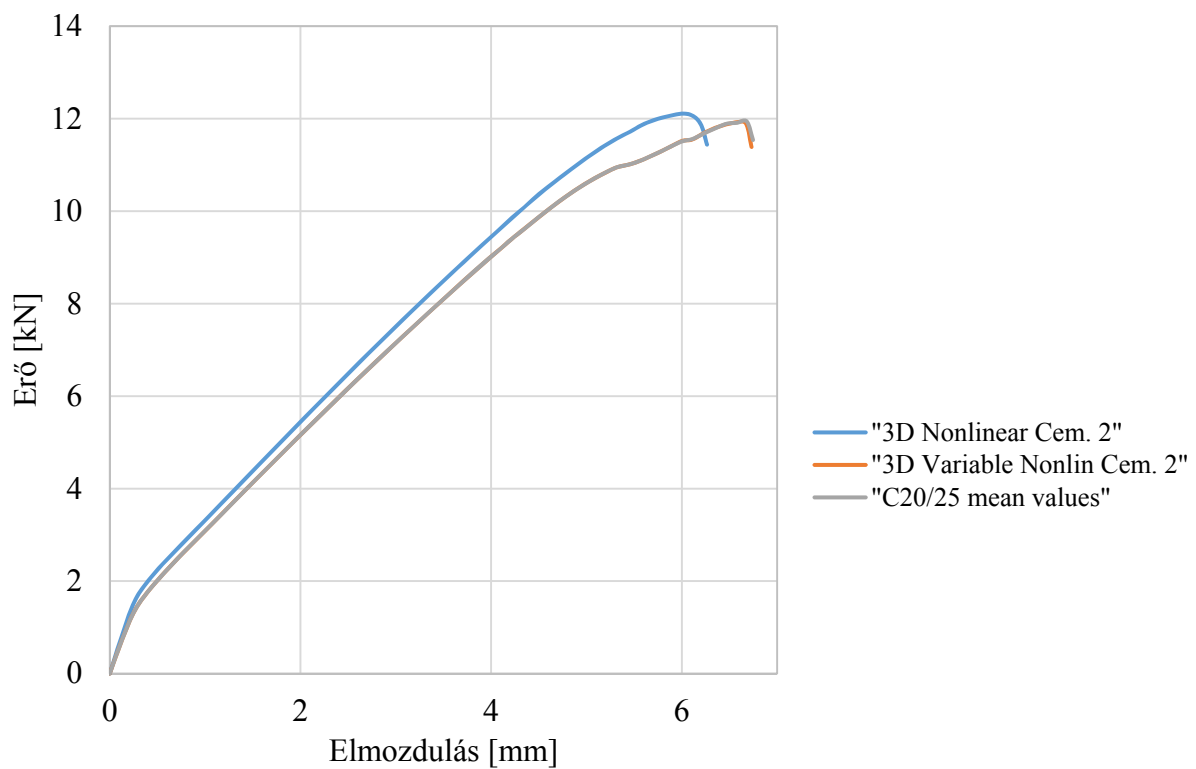
Az utolsó általam vizsgált anyagmodell („C20/25 mean values”) szinte minden egyes változatnál megegyező eredményeket produkált, mint a „3D Variable Nonlinear Cementitious 2” anyagmodellel készített modelljeim, ezért ennek az eredményeit egy olyan diagramban szemléltettem, melyben mind a három anyagmodell eredményei megtalálhatóak. A repesztő erő és a tönkremenetelhez tartozó erő szinte teljesen megegyezik a két modellben, mind a két érték 1 %-on belüli eltérést mutat. Az alulvasalt gerendák eredményeire nem mondható el ugyanez a megállapítás, mivel itt mind a három görbe eltérő értékeket mutat, mind a repesztő erő, mind a tönkremenetelhez tartozó erőt tekintve. A legnagyobb erőt (12,08 kN) a „3D Nonlinear Cementitious 2” modell, a legalacsonyabb erőt (11,54 kN) pedig a „3D Variable Nonlinear Cementitious 2” modell képes felvenni. A repesztő erők és a törő erők között 5-10%-os eltérés figyelhető meg, a lehajlás értékek pedig 5-7%-os eltérést mutatnak.

Vizsgált gerendák erő-elmozdulás grafikonjai



10. grafikon: Vizsgált gerendák erő-elmozdulás diagramjai
(2cm-es végeelem háló, kvadratikus bázisfüggvény)

Különböző anyagmodellel készült normálvasalású gerendák erő-elmozdulás diagramjai



9. grafikon: Különböző anyagmodellel készült normálvasalású gerendák erő-elmozdulás diagramjai

A túlvasalt modelleknél a „*C20/25 mean values*” modellel kapott eredmény nagyban eltér a másik két modell eredményeitől. A tönkremenetelhez tartozó erő ennél a modellnél 17,4%-kal nagyobb, mint a másik két modellnél. A lehajlás is hasonlóképpen alakul, ez 15,2 %-kal nagyobb értéket produkál a másik két modellel összehasonlítva.

A három anyagmodellel, normálvasalású gerendán végzett vizsgálatok eredményeit a *10. grafikonon* szemléltetem. Az alulvasalt és túlvasalt gerendákra kapott eredmények a **13/C**. Mellékletben megtalálhatóak.

6. Kísérleti program

Annak érdekében, hogy a numerikus kísérletek összevethetőek legyenek valós kísérleti eredményekkel, kísérlet sorozatot terveztünk. A laboratóriumi kísérleteket a numerikus modellekkel teljesen azonos próbatestekkel kívántuk elvégezni, így előregyártó üzemben készült, összesen kilenc kísérleti elem, három db normálvasalású, három db alulvasalt és három db túlvasalt kísérleti gerenda. Ezek paramétereit az alábbi 4. ,5. és 6. táblázat tartalmazza.

<i>Gerenda száma</i>	<i>Gerenda megnevezése</i>	<i>Húzott vasalás</i>	<i>Szerelővasak</i>	<i>Kengyelméret</i>
4100	Alulvasalt	2 ϕ 6	2 ϕ 6	ϕ 6
4200	Normálisan vasalt	2 ϕ 8	2 ϕ 6	ϕ 6
4300	Túlvasalt	3 ϕ 8	2 ϕ 6	ϕ 6

4. táblázat: Tervezett kísérleti gerendák vasalási paramétereit

<i>Gerenda száma</i>	<i>Gerenda megnevezése</i>	<i>Beton jel</i>	<i>Karakterisztikus szilárdsági érték</i>
4100	Alulvasalt	C20/25	$f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$
4200	Normálisan vasalt		
4300	Túlvasalt		

5. táblázat: Beton jellemzői

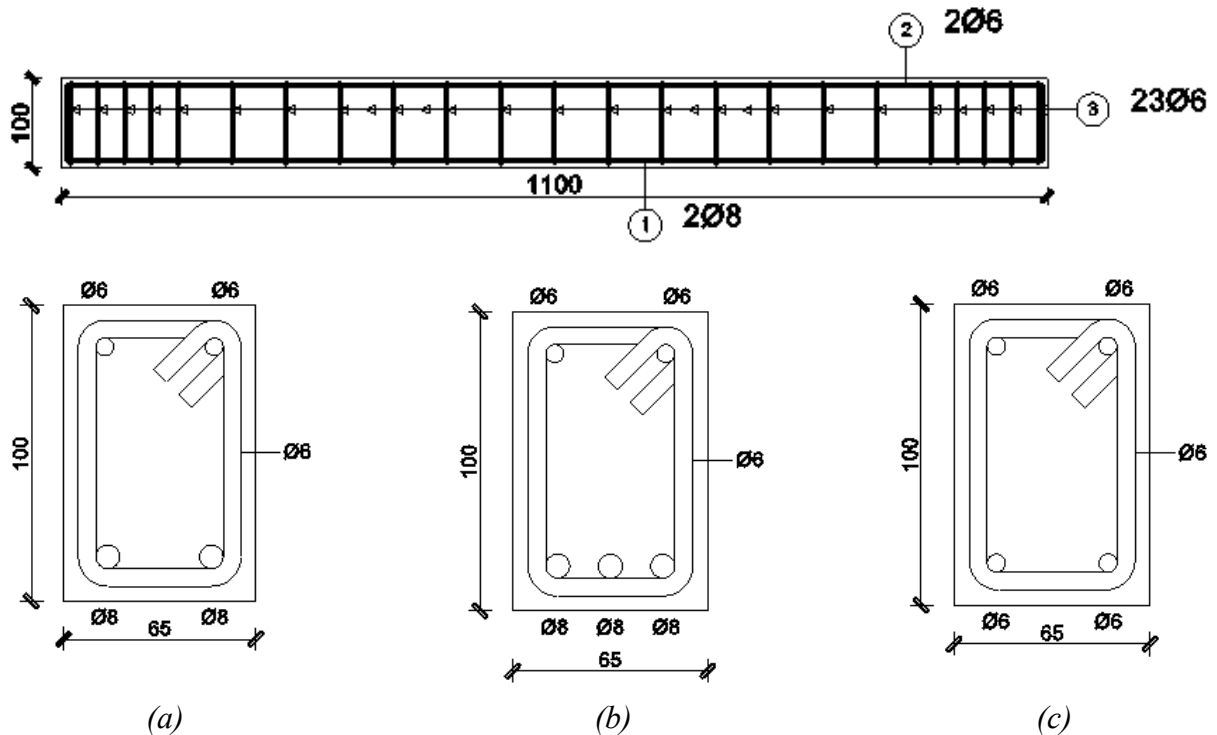
<i>Felhasznált anyag</i>	<i>Betonacél átmérő</i>	<i>Jel</i>	<i>Karakterisztikus szilárdsági értékek</i>
Betonacél	ϕ 6	S240	$f_{yk} = 240 \text{ N/mm}^2$
	ϕ 8	S500B	$f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$

6. táblázat: Betonacélok jellemzői

Az eredményül szolgáló adatokat a kísérletsorozat első két gerendájának (alulvasalt és normálvasalású gerenda) vizsgálatából kaptam meg.

6.1. Próbatestek bemutatása

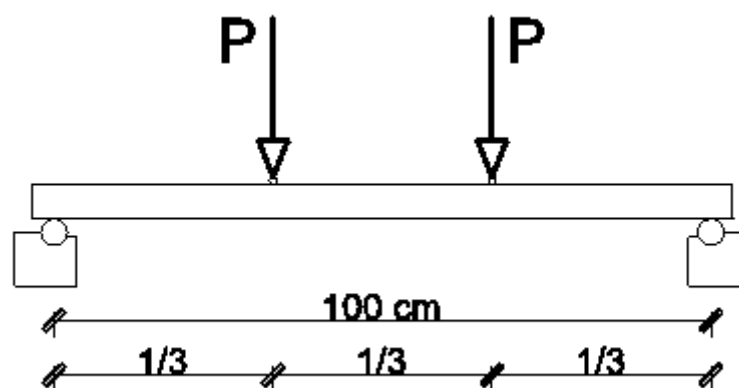
A kísérletekben felhasznált kéttámaszú gerendák mérete 6,5x10x110 cm, támaszközük 100 cm és harmadpontos teherrel terheltek. A kísérleti gerendák geometriai méretei és vasalási vázlatát az 51. ábrán látható. A gerendák alsó- és felső hosszvasalása teljes hosszban végigvezetettek és a gerenda végén a jobb lehorgonyzás érdekében felhajlítottak. A beton és betonacélok paramétereit és szilárdsági értékeit a 4. 5. és 6. táblázatban már bemutatásra kerültek.



51. ábra: Gerendák geometriai és vasalási vázlatok
(a) normálvasalású, (b) tülvasalt, (c) alulvasalt

6.2. Terhelési elrendezés bemutatása

A gerendák támaszközét, mint már említettem 100 cm-re állítottuk és a gerendákat harmadpontjukban egy-egy függőleges koncentrált erővel törésig terheltek. A terhelő berendezés terhelő eleme alá egy erő elosztó I-szelvény került, mely alatt egy-egy 10 mm átmérőjű tömör acél henger helyezkedett el. Ezek az acél hengerek közvetlen a gerenda felső síkjára terheltek, így átadva az erőt a gerendára és biztosítva azt, hogy a harmadpontokban ugyanazzal az erővel terheljünk. A teherelrendezés vázlatos rajza az 52. ábrán és a valós elrendezés az 1. képen látható.



52. ábra: Teherelrendezés vázlatja



1. kép: A kísérleti gerenda terhelő berendezésben való elhelyezkedése és a teher elrendezés

A terhelő berendezés felső terhelő lapja gömbcsuklós kialakítású, hogy a terhelő lap síkja követni tudja a gerenda alakváltozása miatt bekövetkező elfordulásokat és így a teher mindig függőleges tudjon maradni.

6.3. Méréstechnika

A kísérleteket a BME Szerkezet és Anyagvizsgáló Laboratóriumában rendelkezésre álló WPM ZD20 típusú telepített terhelő berendezéssel végeztük el. A berendezés egyaránt képes húzó- és nyomó kísérletek végrehajtásához, esetünkben nyomó erő kifejtésére volt szükség. A gép hidraulikával ellátott, manuálisan működtetett és maximálisan 200 kN terhet tud közvetíteni. Kísérleteinkben a terhelő mérőtartománya 40 kN-ra volt beállítva, mivel a várt tönkremenetek 20-30 kN-os intervallumba voltak várhatóak.

A gerenda középső keresztmetszetének függőleges elmozdulását egy darab WA/10 típusú induktív elmozdulás mérővel rögzítettük. Az induktív adó elhelyezkedése a *2. képen* látható.



2. kép: Az induktív elmozdulás mérő elhelyezkedése

Az erő és elmozdulás rögzítése az egyes mérőeszközök kalibrációja után számítógéppel történt, ahol a terhelő berendezés által kifejtett erőt és az induktív elmozdulás mérő által szolgáltatott elmozdulás értékeket egy valós idejű diagramon figyelhettük meg. A vizsgálat során egy Spider 8 típusú erősítőre volt szükség, hogy a számítógéppel az adatok rögzíthetők legyenek, valamint kvázi-statikusan történő terhelésről lévén szó az eredmények rögzítését 10 Hz-en végeztük.

6.4. Mérési eredmények

A kísérletek során az erőt a terhelő berendezés szolgáltatta, azonban annak érdekében, hogy a mérések összeegyeztethetőek legyenek a numerikus vizsgálatokban kapott eredményekkel, a továbbiakban az erőt fele akkora értékkel szerepeltetem, a harmadpontos teherelrendezés miatt.

Az első kísérletet az alulvasalt gerendán végeztük el. A gerenda kezdetben viszonylag mereven viselkedett az első repedések kialakulásáig. Az első repedések hozzávetőlegesen 1,75-1,85 kN-os erő elérésénél jelentkeztek. A repedések függőleges irányúak voltak és kizárólag a két koncentrált erő között jelentkeztek. A teher növekedése során a repedések terjedését követtük, melyek függőlegesen felfelé haladtak és egy bizonyos teherszint elérése után (~5 kN) nem terjedtek tovább. A repedések ~8 kN-os teher elérése után elkezdtek megnyílni, a lehajlás értékek egyre kisebb erőbevitel mellett lényegesen nagyobbak voltak, mint a kezdeti szakaszban. A gerenda 8,04 kN-os teherszint elérése után tönkrement. A gerenda tönkremenetele a beton nyomott zónájának összemorzsolódásával ment végbe. Az alulvasalt gerenda repedésképe és tönkremenetele a 3. és 4. képen láthatóak.

A 11. grafikonon az alulvasalt gerenda erő-elmozdulás diagramját mutatom be, melyen megfigyelhető, hogy az alulvasalt gerenda tönkremeneteléhez tartozó erő 8,04 kN és a középső keresztmetszet legnagyobb lehajlása 24,3 mm.

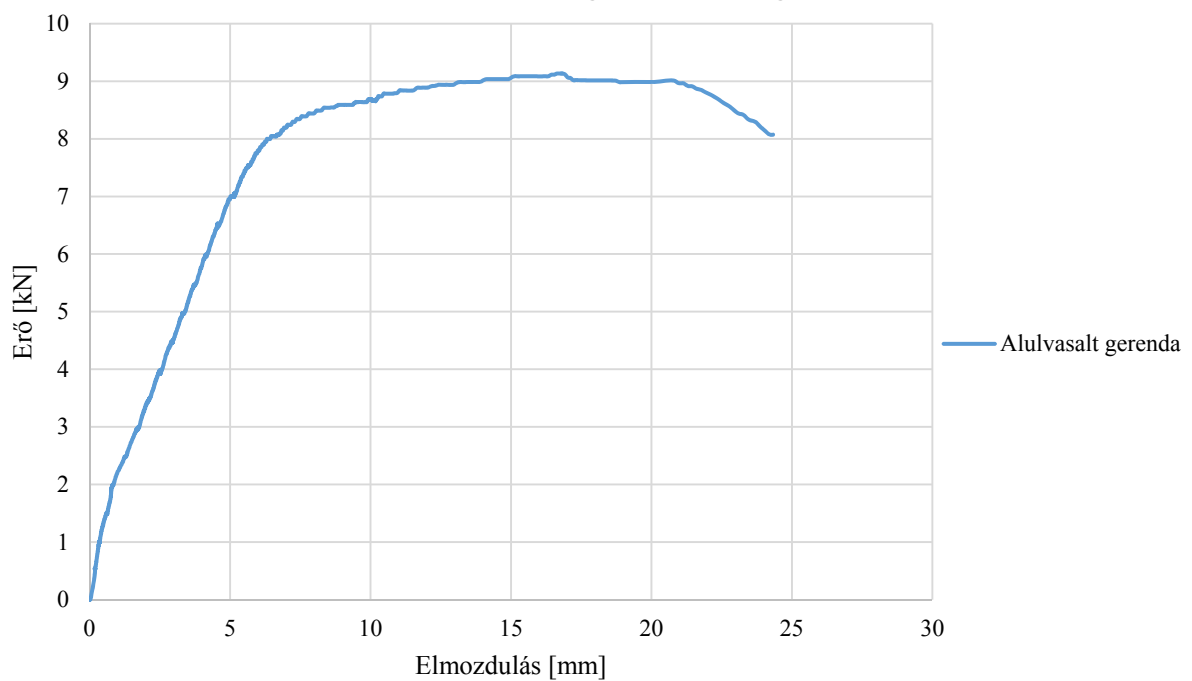


3. kép: Alulvasalt gerenda repedésképe



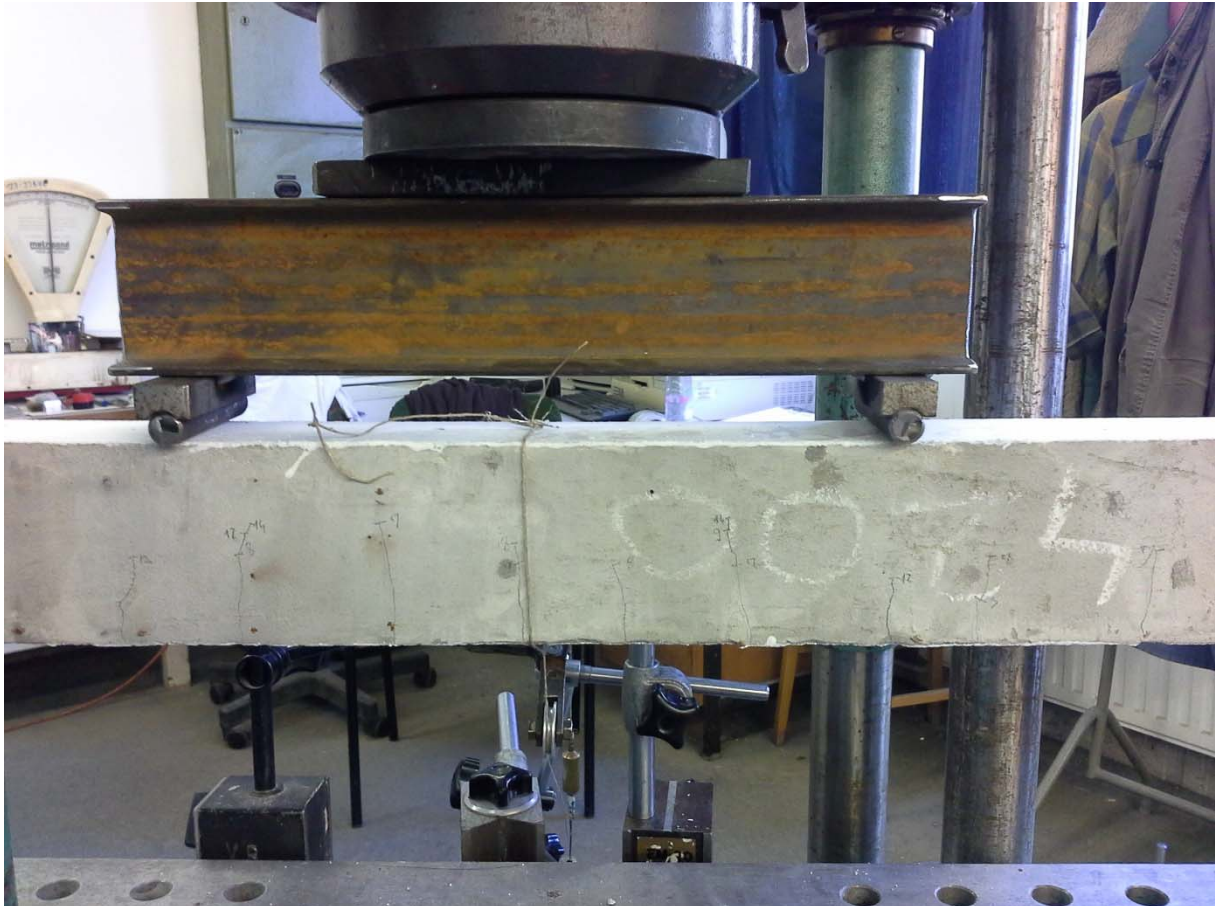
4. kép: Az alulvasalt gerenda tönkremenetele

4100-alulvasalt gerenda vizsgálata



11. grafikon: Erő-elmozdulás diagram alulvasalt gerenda esetén

A következőkben a normálvasalású gerenda vizsgálati eredményeit mutatom be. A gerenda terhelése során hasonló jelenségek voltak megfigyelhetőek, mint az alulvasalt gerendánál. Ennél a gerendánál a berepedéshez tartozó erő 1,78 kN-os teherszinten volt megfigyelhető. 11,02 kN-os erőig az erő és az elmozdulás kapcsolata lineárisnak tekinthető, valamint a gerenda lehajlása csupán a teljes lehajlás értékének az egyötöde volt. A repedések csak a két koncentrált erő között alakultak ki és függőlegesen felfelé terjedtek. Az 5. képen a normálvasalású gerenda repedésképe látható.



5. kép: Normálvasalású gerenda repedésképe

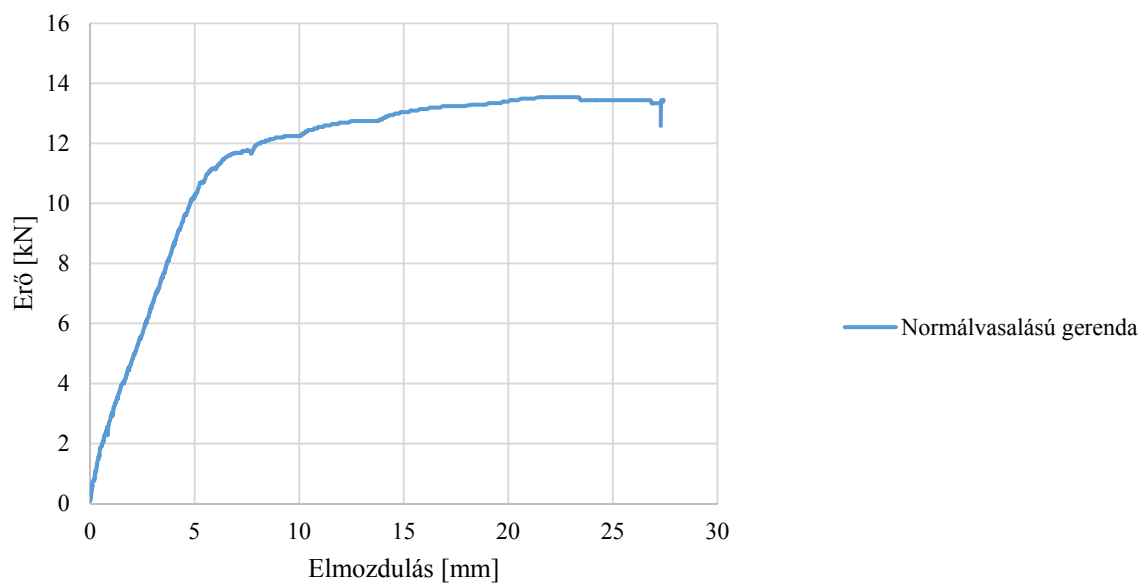
A gerenda által felvett legnagyobb erő 13,51 kN volt, a tönkremenetelhez tartozó erő 11,67 kN és az ehhez tartozó lehajlás érték 7,71 mm-re adódott. A tönkremenetel ebben az esetben is a nyomott betonzóna összemorzsolódásával ment végbe. Megfigyelhetőek voltak a tönkremenetel közeli állapotban az erő támadáspontjától a gerenda közepe felé elinduló repedések, melyek a nyomott betonzóna határa felé haladtak és közel vízszintes érintővel végződtek. A normálvasalású gerenda tönkremenetelét ábrázolja a 6. kép.

Az erő-elmozdulás diagramon hasonló jelenségek mutatkoznak a normálvasalású gerendánál is. A tönkremenetel gyorsabban következik be, bár ez nagyobb teherszinten és lehajlás értéknél történik. A 12. grafikon a normálvasalású gerenda erő-elmozdulás diagramját szemlélteti.



6. kép: Normálvasalású gerenda tönkremenetele

4200-normálvasalású gerenda vizsgálata

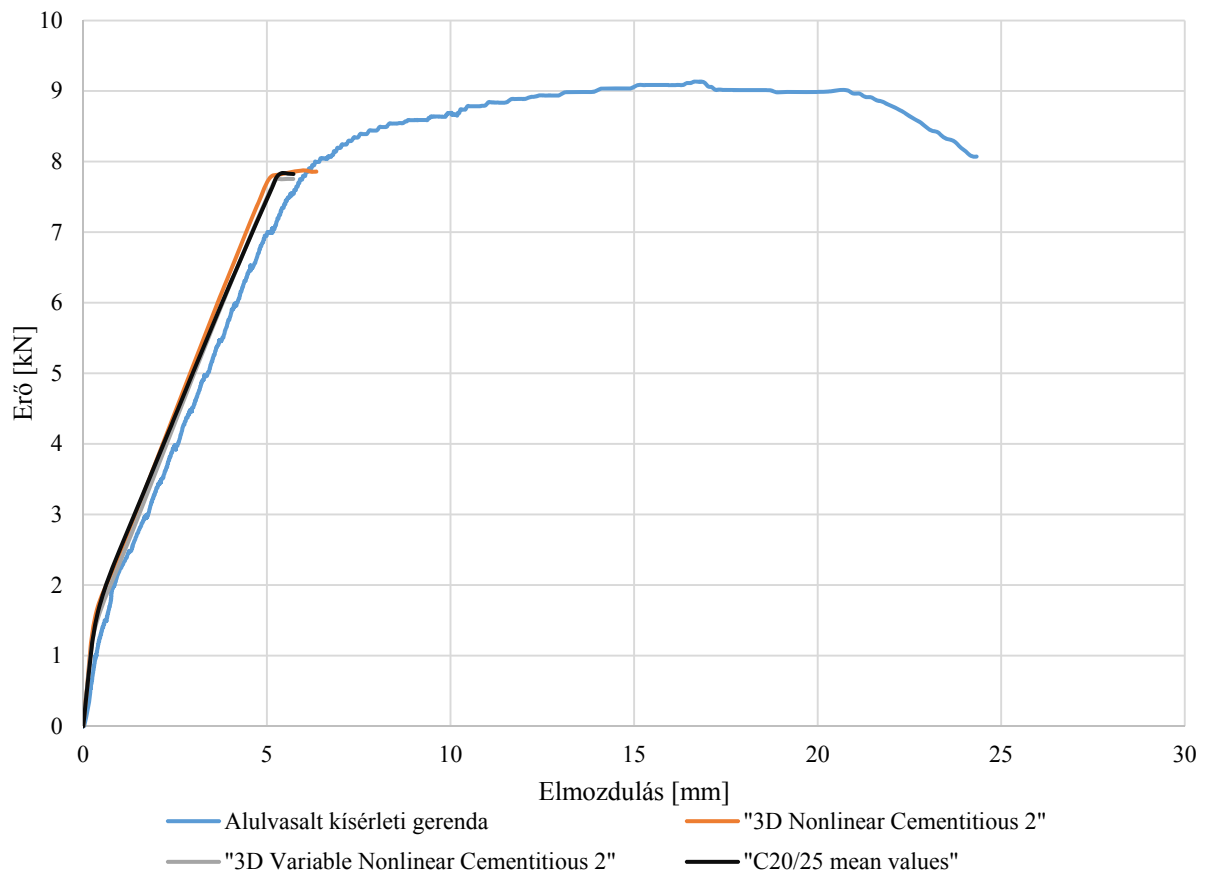


12. grafikon: Erő-elmozdulás diagram normálvasalású gerenda esetén

7. Kísérleti és numerikus eredmények összehasonlítása

Az alulvasalt gerenda laboratóriumban végzett kísérleti eredményeit, valamint a numerikus vizsgálatok eredményeit a 13. grafikonon szemléltetem. A grafikonon megfigyelhető, hogy a terhelés kezdeti szakaszában a berepedésig a görbék igen jól közelítik egymást. A numerikus modellekkel szinte teljesen azonos eredményt kapunk eddig a pontig.

Alulvasalt gerenda vizsgálata



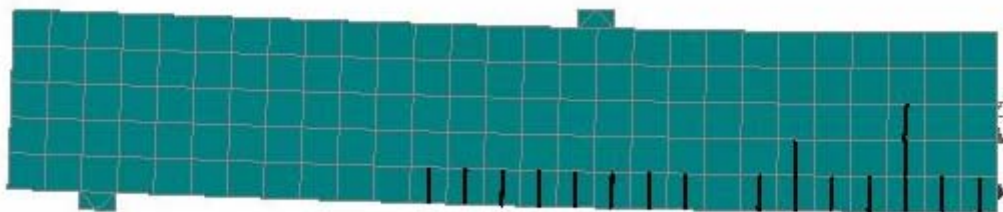
13. grafikon: Laboratóriumi és numerikus vizsgálatok erő-elmozdulás diagramjai
(Végeselem háló mérete: 2 cm, Bázisfüggvény: kvadratikus)

A laborkísérlettel megkapott eredménynél a berepedésig tartó egyenes meredeksége kisebb, mint a numerikus modellekben, de ez nem számottevő eltérés, mivel a berepedéshez tartozó erő 3%-on belüli eltérést mutat csupán. Az ezt követő szakaszon a kísérleti görbe szintén kisebb meredekségű egyenessel halad tovább. A numerikus számítások közel azonos teher szint elérését követően befejeződnek, a gerenda a numerikus számítás szerint további erőt nem tud felvenni. Ez a teher szint a numerikus számításokból 7,78 kN-ra adódik. Ezt a teher szintet elérve a laboratóriumi kísérlet tovább folytatható volt. A tönkremenetel után még óriási alakváltozásokat szenvedett, de számottevő erőt már felvenni nem tudott. A kísérlet a

tönkremenetelhez tartozó lehajlás (6,35 mm) közel ötszöröseig volt folytatható. A kísérletek elvégzése során a repedésképet is rögzítettük, mely zömében megegyezik a numerikus vizsgálat során kapott repedésképpel. A valós kísérlet során repedések kizárólag a két koncentrált erő között keletkeztek, a numerikus modellben azonban a koncentrált erő és a támasz között is keletkeztek repedések, továbbá a repedések közül csak 1-2 ért el a nyomott betonzóna határáig.



7. kép: Alulvasalt kísérleti gerenda repedésképe

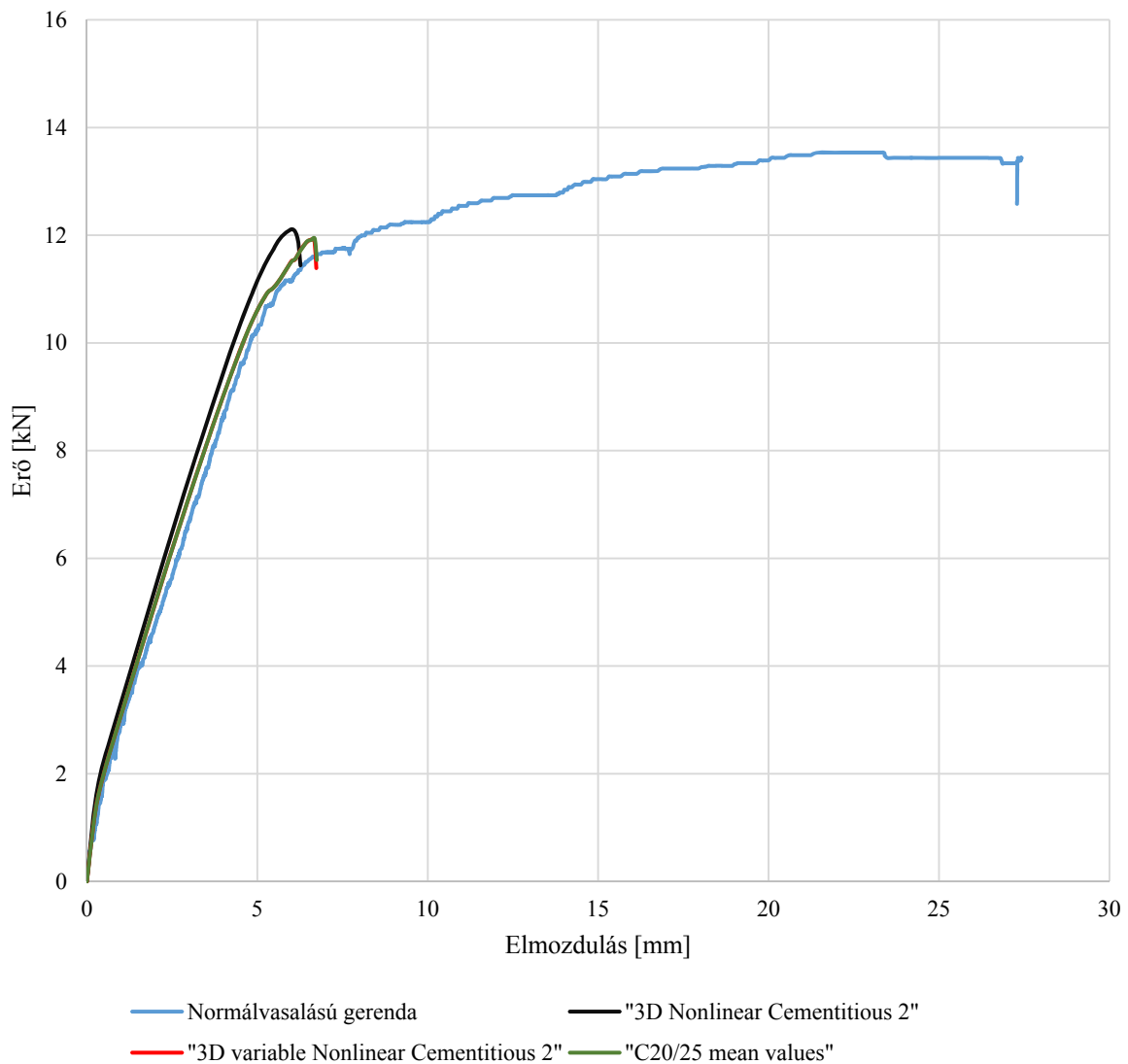


53. ábra: Alulvasalt gerenda repedésképe numerikus modellből
(Anyagmodell: „C20/25 mean values”, Hálóméret: 2 cm, Bázisfüggvény: Kvadrátikus)

A repedések jellege azonosnak tekinthető, mindegyik függőleges és legfeljebb a nyomott zóna határáig terjednek. A kísérleti gerenda repedésképe a 7. képen, a számítógépes modell repedésképe az 53. ábrán látható.

A 14. grafikonon a normálvasalású gerenda laboratóriumi kísérleti és numerikus eredményeit tüntettem fel. A kísérleti és numerikus vizsgálatokból kapott görbék jellege azonos, a berepedéshez tartozó teher értékek megegyeznek egymással. A laboratóriumi kísérlet eredményeit a berepedés után szintén követik a numerikus modellekben kapott eredmények. A végeselemes vizsgálatoknál a gerendák anyagmodelltől függően 11,94 és 12,03 kN-os erőt elérve mennek tönkre. A laboratóriumi kísérletek és a numerikusan végzett vizsgálatok eredményeit a 8. táblázatban tüntetem fel. A táblázatban a „C20/25 mean values” anyagmodellel kapott eredmények szerepelnek a numerikus kísérleti eredményeknél.

Normálvasalású gerenda vizsgálata



14. grafikon: Laboratóriumi és numerikus vizsgálatok erő-elmozdulás diagramjai

Gerenda megnevezése	Kísérlet		Eltérés [%]	Kísérlet		Eltérés [%]
	Numerikus	Laboratóriumi		Numerikus	Laboratóriumi	
	Repszto erő [kN]			Tönkrementelhez tartozó erő [kN]	Képlékeny alakváltozások kezdeté [kN]	
Normálisan vasalt	1,55	1,64	5%	11,94	11,45	4%

7. táblázat: Laboratóriumi kísérlet és numerikus eredmények összehasonlítása

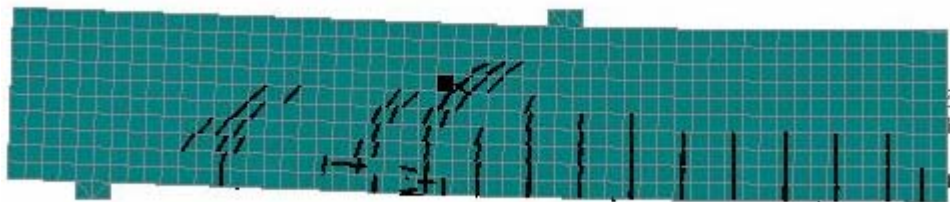
A „C20/25 mean values” anyagmodellel kapott eredmények egyeznek a legjobban a laborkísérletek eredményeivel, ezért a továbbiakban az ehhez tartozó eredményeket ismertetem.

A lehajlásokat tekintve a numerikus modellben a gerenda 6,68 mm-es elmozdulásnál megy tönkre. A laboratóriumi kísérletben ettől az értéktől kezdődik a tökéletesen képlékeny alakváltozási szakasz, mely a numerikus lehajlási eredmény közel négyszeresét is eléri.

A valós kísérlet során repedések kizárólag a két koncentrált erő között keletkeztek, a numerikus modellben azonban a nyírási repedéseknek megfelelő ferde közel 45 °-os repedések is kialakultak a koncentrált erő és a támasz között. A hajlítási repedések jellege azonosnak tekinthető. Ennél a gerenda típusnál elvégeztem egy numerikus kísérletet, melyben 1 cm-es végeelem háló méretet alkalmaztam, továbbá az interpolációs polinomoknak kvadratikus függvényeket választottam. Eltérő eredményt kaptam az alulvasalt gerendához képest, mert a



8. kép: Normálvasalású kísérleti gerenda repedésképe



54. ábra: Normálvasalású gerenda repedésképe numerikus modellből
(Anyagmodell: „C20/25 mean values”, Hálóméret: 1 cm, Bázisfüggvény: Kvadratikus)

hajlítási repedések nagy része elér a nyomott betonzóna határáig, de legalábbis közel van hozzá. A számítógépes vizsgálatból eredményként a gerenda repedésképe is megkapható. Az 54. ábrán az előbb említett numerikus modellből kapott repedéskép látható, továbbá a kísérlet során készített repedésképet a 8. képen szemléltetem.

8. Megállapítások

A dolgozat keretein belül elvégzett laboratóriumi kísérletek alapján az előregyártott vasbeton gerendák megfelelő numerikus modellezése szempontjából az alábbi következtetések vonhatók le:

- A vasbeton gerendák numerikus modellezésének az egyik legfontosabb szempontja a megfelelő méretű végeelem háló kiválasztása. Ez befolyásolja legjobban a számítás helyes értékekhez való közelítését. Az összehasonlító vizsgálataim során megállapítható volt, hogy a számítások 2 cm-es vagy annál kisebb végeelem háló mérettel közelítik a legjobban a laboratóriumi kísérletekben kapott eredményeket. A valóságot leginkább megközelítő numerikus modell megalkotása érdekében a végeelem háló mérete akkor tekinthető megfelelőnek, ha a keresztmetszet kisebbik méretében legalább 3-5 végeelem fér el.
- Lineáris interpolációs polinomokat használva kevésbé pontos eredményeket kaphatunk, a kvadratikus bázisfüggvények alkalmazásával a számítás pontosabb eredményeket ad. Kvadratikus bázisfüggvényeket alkalmazva a számítás időtartama lényegesen nagyobb lesz, bár az eredmények jobb közelítését figyelembe véve ez az időtöbblet elfogadható egy végeelemes számítás során.
- A három vizsgált betonra megalkotott anyagmodell közül - melyeket a numerikus vizsgálatok során alkalmaztam - a „C20/25 mean values” anyagmodell követte legjobban a laboratóriumi kísérletek által kapott eredményeket. A modellekről együttesen elmondható, hogy a képlékeny alakváltozások szimulációjára még nem rendelkeznek a szükséges paraméterekkel. Továbbá a modellek a vasbeton gerendák kvázi-státikus terhelését jól modellezik az I.- és II. feszültségállapotban.
- A tényleges vasalással megegyező vasalás elhelyezésével a gerenda viselkedése szinte teljesen megegyezik egy valós gerenda viselkedésével.
- A repedéseket vizsgálva a kísérletekkel közel azonos repedésképeket kapunk, az eltérések nem számottevőek. A repedések jellegüket tekintve azonosnak bizonyulnak.

9. Összefoglalás

A dolgozatban áttekinttem a napjainkban ismert mechanikai anyagmodelleket. Kitértem a témához kapcsolódó beton anyagmodellekre, azok paramétereire és tulajdonságaira. Bemutattam a numerikus modellek megalkotásához szükséges lépéseket és a használt program nyújtotta anyag-beállítási lehetőségeket.

Numerikus vizsgálataim során egy normálvasalású, egy alulvasalt és egy túlvasalt gerendát modelleztem. A modelleket úgy alkottam meg, hogy a gerendák tényleges vasalását, tényleges átmérővel definiáltam. Egy gerendának csak a felét készítettem el a programban, kihasználva a szimmetriát. Vizsgálataim során három különböző betonmodellt használtam, az első a „*3D Nonlinear Cementitious 2*”, a második a „*3D Variable Nonlinear Cementitious 2*” és a harmadik a „*C20/25 mean values*” anyagmodell volt. Összesen készítettem, 22 darab számítási modellt a normálvasalású gerendához, 21 darab modellt az alulvasalt gerendához és szintén 21 modellt a túlvasalt gerendához. Ez összesen 64 futtatást jelentett. A modelleket harmadpontos teherrel tönkremenetelig terheltem. Az egyes modellek között különbséget a végeelem háló mérete és a véges elemeken alkalmazott interpolációs polinomok fokszáma adta. Készültek modellek 2, 3, 4, 5 és 6 cm-es végeelem hálóval, valamint egy modellt 1 cm-es végeelem háló mérettel is készítettem a normálvasalású gerendához. Bázisfüggvények közül a lineáris és kvadratikus függvényeket alkalmaztam. A numerikus vizsgálatokat a valós kísérletekhez hasonlóan követni tudtam és eredményül erő-elmozdulás diagramokat kaptam. Az erőt a teher bevezetésénél tudtam mérni, a lehajlást pedig a gerenda középső alsó keresztmetszetén egy pontban. A számítások eredményeit bemutattva megállapítható volt, hogy a vizsgálat pontossága nagyban függ a helyes véges elem háló méretének megválasztásától valamint attól, hogy milyen bázisfüggvényt alkalmazunk. A különböző betonmodelleket összehasonlítva közel azonos eredményeket kaptam az I. feszültségállapot végét jelentő berepedéshez tartozó erőre, valamint az ehhez tartozó lehajlás értékekre. A gerendák viselkedése a berepedést követően is szinte tökéletesen megegyeztek a három eltérő betonmodellt tekintve. A gerendák tönkremenetele a numerikus modellekben a végeelem háló mérettől függően eltérő volt. A numerikus modelleket a kézi számítás eredményeivel összehasonlítva megállapítottam, hogy a 2 cm vagy annál kisebb végeelem hálóval készült modellek közelítik legjobban a kézi számításban kapott eredményeket.

Annak érdekében, hogy a numerikus számítások valós kísérletekkel is összehasonlíthatóak legyenek 9 próbatestből álló kísérletsorozatot állítottunk össze, melynek első két előregyártott kéttámaszú vasbeton gerendáját a BME Szerkezet- és Anyagvizsgáló Laboratóriumában harmadpontos kvázi-statisztikus teherrel tönkremenetelig terheltünk. A kísérleteket egy alulvasalt és egy normálvasalású gerendán végeztük el. A kísérlet menetéről és a gerenda és teher elrendezéséről részletesen beszámoltam. A laboratóriumi kísérletekből erő-elmozdulás diagramot tudtam készíteni, melyet össze tudtam hasonlítani a numerikus vizsgálataim során kapott eredményekkel. Ezekből megállapítható volt, hogy a numerikusan vizsgált alulvasalt és a normálvasalású gerenda is szinte tökéletesen követi a valós kísérlet eredményeit. Az I. illetve II. feszültségállapotban szinte tökéletes egyezést mutatnak a kísérleti és numerikus vizsgálatok. A numerikus modell tönkremenetele után már erőt nem tudott

felvenni ezzel ellentétben, a laboratóriumi kísérletben a gerenda még tovább terhelhető volt, bár számottevő erőt nem tudott felvenni. A kísérleti gerenda a tönkremenetele után hatalmas képlékeny alakváltozást szenvedett, a lehajlás értéke a tönkremenetelhez tartozó lehajlás érték közel ötszörösére növekedett. A numerikus modellekben a képlékeny alakváltozások szakasza nem volt modellezhető. Az eredményeket összevetve megállapítottam, hogy a legpontosabb numerikus modellt a „C20/25 mean values” betonmodell alkalmazásával, 2 cm vagy annál kisebb végeelem háló mérettel és kvadratikusan interpolációs függvény használatával kapható meg.

10. További kutatási lehetőségek

A következőkben szeretnék felsorolni néhány kutatási irányt és lehetőséget, melyet a témában folytatni lehet. Az ATENA 3D programban továbbiakban következő numerikus vizsgálatok végezhetők el:

- vasbeton szerkezetek ciklikus terhekre való viselkedésének vizsgálata, melyben mind a beton, mind a betonacél anyagmodell rendelkezésre áll,
- vasbeton szerkezetek csomópontjainak modellezése, pl.: oszlop-gerenda kapcsolat vízszintes erővel terhelve, oszlop-födém kapcsolat, födém átszűrődés, merevítőfalak és merevítő magok vízszintes erőkkel szembeni viselkedése,
- vasbeton keretvázak vízszintes terhekkel szembeni viselkedése valamint modellezhetők téglafallal merevített keretek ciklikus terhekkel szembeni viselkedése,
- feszített vasbeton szerkezetek vizsgálata,
- beton és vasbeton szerkezetek kúszás és zsugorodási vizsgálata,
- beton és vasbetonszerkezetek hőmérsékleti hatásokkal szembeni viselkedése, továbbá vasbeton szerkezetek tűzben való viselkedése,
- a beton és betonacélok kapcsolatának vizsgálata, pl.: tökéletes kapcsolat és megcsúszásos kapcsolat,
- vasbeton szerkezetek megerősítésének modellezése,
- új vagy meglévő anyagmodellek definiálása és azok pontosságának ellenőrzése,
- akár egy teljes vasbeton épületet megalkotása és vizsgálata a normál vagy rendkívüli hatásokra

11. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom konzulensemnek dr. Haris Istvánnak, támogatásáért, biztatásáért és segítőkészségéért, melyet a dolgozatom elkészítése alatt nyújtott.

Köszönettel tartozom dr. Hortobágyi Zsoltnak, valamint a BME Szerkezet- és Anyagvizsgáló Laboratórium munkatársainak, Dobby Ferencnek és dr. Mansour Kachichiannak, hogy segítették munkámat a kísérletsorozat elvégzése során.

Köszönet illeti a Ferrobeton Zrt.-t és munkatársait, akik elkészítették a kísérletekben felhasznált előregyártott vasbeton gerendákat.

Valamint hálával tartozom szüleimnek és barátaimnak, hogy a dolgozatom elkészítése alatt mindig számíthattam rájuk és segítséget nyújtottak.

12. Felhasznált irodalom

Nyomtatott források:

- [1] **Bojtár I., 2015**, Mechanikai anyagmodellek, *Előadásvázlat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest*
- [2] **Kopecskó Katalin, 2015**, Épületfizika- és kémia, *Előadásjegyzet, 1. előadás, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest*
- [3] **Bertram A., 2005**, Elasticity and Plasticity of Large Deformations, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*
- [4] **Trostel R., 1999**, Materialmodelle in der Ingenieurmechanik, *Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik III., Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Wiesbaden*
- [5] **Kolymbas D., 2000**, Constitutive Modelling of Granular Materials, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*
- [6] **Chen Way-Fah, 2007**, Plasticity in Reinforced Concrete, *J.Ross Publishing, Fort Lauderdale*
- [7] **Calladine C.R., 1985**, Plasticity for Engineers, *Ellis Horwood Limited, Chichester*
- [8] **Hughes B.P., 1981**, Limit state theory for reinforced concrete design, *The Pitman Press, Bath*
- [9] **Kalishzky S., 1989**, Plasticity. Theory and Engineering Applications, *Akadémia Kiadó*
- [10] **Deák Gy.-Draskócky A.-Dulácsak E.-Kollár L-Visnovitz Gy., 2007**, Vasbeton szerkezetek - Tervezés az Eurocode alapján, *Springer Média Magyarország Kft.*

Internetes források:

- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Hill_yield_criterion
Letöltés dátuma: 2015.09.23.
- [12] https://en.wikipedia.org/wiki/Hosford_yield_criterion
Letöltés dátuma: 2015.09.23.

- [13] http://www.vilaglex.hu/Lexikon/Html/Diszloka_.htm
Letöltés dátuma: 2015.09.23.
- [14] http://doktori.bme.hu/bme_palyazat/2013/honlap/Zsarnoczai_Adam_hu.htm
Letöltés dátuma: 2015.09.26.
- [15] www2.mae.ufl.edu
Letöltés dátuma: 2015.09.26.
- [16] <https://www.comsol.com/blogs/yield-surfaces-plastic-flow-rules-geomechanics/>
Letöltés dátuma: 2015.09.24.
- [17] http://www.mogi.bme.hu/TAMOP/vegeselem_modszerek/book.html#ch-II.4.3.4
Letöltés dátuma: 2015.09.26.
- [18] <http://www.cervenka.cz/products/atena/documentation/pdf-atena-theory>
Letöltés dátuma: 2015.01.20.

12. Mellékletek

13/A. Melléklet

Interpolációs polinomok

Node i	Function h_i	Include only if node i is defined											
		$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$	$i=15$	$i=16$	$i=17$	$i=18$	$i=19$	$i=20$
1	$\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$	$-\frac{1}{2}h_9$			$-\frac{1}{2}h_{12}$						$-\frac{1}{2}h_{17}$		
2	$\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$	$-\frac{1}{2}h_9$	$-\frac{1}{2}h_{10}$									$-\frac{1}{2}h_{18}$	
3	$\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$		$-\frac{1}{2}h_{10}$	$-\frac{1}{2}h_{11}$									$-\frac{1}{2}h_{19}$
4	$\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$			$-\frac{1}{2}h_{11}$	$-\frac{1}{2}h_{12}$								$-\frac{1}{2}h_{20}$
5	$\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$					$-\frac{1}{2}h_{13}$			$-\frac{1}{2}h_{16}$	$-\frac{1}{2}h_{17}$			
6	$\frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$					$-\frac{1}{2}h_{13}$	$-\frac{1}{2}h_{14}$				$-\frac{1}{2}h_{18}$		
7	$\frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$						$-\frac{1}{2}h_{14}$	$-\frac{1}{2}h_{15}$					$-\frac{1}{2}h_{19}$
8	$\frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$							$-\frac{1}{2}h_{15}$	$\frac{1}{2}h_{16}$				$-\frac{1}{2}h_{20}$

1. táblázat: Interpolációs függvények téglatest elemhez

Inte- gration point	Coordinate r	Coordinate s	Coordinate t	Weight
1	0.5773502691896 26	0.5773502691896 26	0.577350269189626	1.
2	0.5773502691896 26	0.5773502691896 26	- 0.577350269189626	1.
3	0.5773502691896 26	- 0.5773502691896 26	0.577350269189626	1.
4	0.5773502691896 26	- 0.5773502691896 26	- 0.577350269189626	1.
5	- 0.5773502691896 26	0.5773502691896 26	0.577350269189626	1.
6	- 0.5773502691896 26	0.5773502691896 26	- 0.577350269189626	1.
7	- 0.5773502691896 26	- 0.5773502691896 26	0.577350269189626	1.
8	- 0.5773502691896 26	- 0.5773502691896 26	- 0.577350269189626	1.

2. táblázat: Gauss integrálási pontok téglatest elemekre

13/B. Melléklet

Gerenda modellek paraméterei

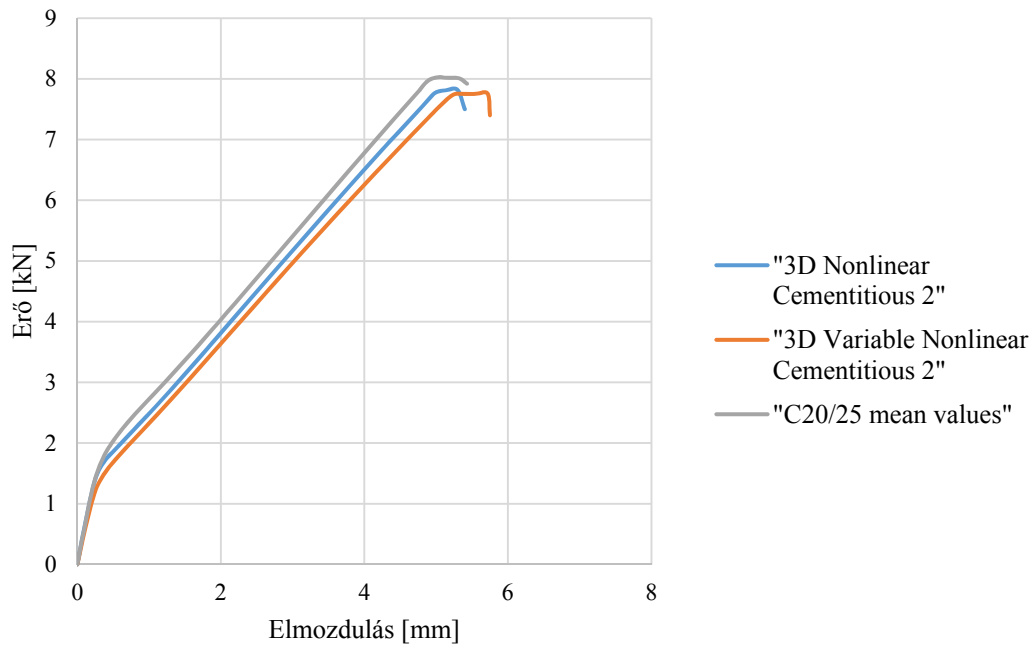
Alulvasalt gerenda paraméterei					
Ssz.:	Végeselem	Anyagmodell	Elmozdulás egy teherlépcsőben [mm]	Végeges elem háló mérete [cm]	Iteráció
1	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	2,00	Newton-Raphson
2	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	3,00	Newton-Raphson
3	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	4,00	Newton-Raphson
4	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	5,00	Newton-Raphson
5	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	6,00	Newton-Raphson
6	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	2,00	Newton-Raphson
7	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	3,00	Newton-Raphson
8	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	4,00	Newton-Raphson
9	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	5,00	Newton-Raphson
10	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	6,00	Newton-Raphson
11	lineáris	C20/25 mean values	0,10	2,00	Newton-Raphson
12	lineáris	C20/25 mean values	0,10	3,00	Newton-Raphson
13	lineáris	C20/25 mean values	0,10	4,00	Newton-Raphson
14	lineáris	C20/25 mean values	0,10	5,00	Newton-Raphson
15	lineáris	C20/25 mean values	0,10	6,00	Newton-Raphson
16	kvadratikus	3D nonlinear cementitious 2	0,10	2,00	Newton-Raphson
17	kvadratikus	3D nonlinear cementitious 2	0,10	3,00	Newton-Raphson
18	kvadratikus	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	2,00	Newton-Raphson
19	kvadratikus	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	3,00	Newton-Raphson
20	lineáris	C20/25 mean values	0,10	2,00	Newton-Raphson
21	lineáris	C20/25 mean values	0,10	3,00	Newton-Raphson

Túlvasalt gerenda paraméterei					
Ssz.:	Végeselem	Anyagmodell	Elmozdulás egy teherlépcsőben [mm]	Végeges elem háló mérete [cm]	Iteráció
1	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	2,00	Newton-Raphson
2	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	3,00	Newton-Raphson
3	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	4,00	Newton-Raphson
4	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	5,00	Newton-Raphson
5	lineáris	3D nonlinear cementitious 2	0,10	6,00	Newton-Raphson
6	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	2,00	Newton-Raphson
7	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	3,00	Newton-Raphson
8	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	4,00	Newton-Raphson
9	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	5,00	Newton-Raphson
10	lineáris	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	6,00	Newton-Raphson
11	lineáris	C20/25 mean values	0,10	2,00	Newton-Raphson
12	lineáris	C20/25 mean values	0,10	3,00	Newton-Raphson
13	lineáris	C20/25 mean values	0,10	4,00	Newton-Raphson
14	lineáris	C20/25 mean values	0,10	5,00	Newton-Raphson
15	lineáris	C20/25 mean values	0,10	6,00	Newton-Raphson
16	kvadratikus	3D nonlinear cementitious 2	0,10	2,00	Newton-Raphson
17	kvadratikus	3D nonlinear cementitious 2	0,10	3,00	Newton-Raphson
18	kvadratikus	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	2,00	Newton-Raphson
19	kvadratikus	3D Variable Nonlinear Cementitious	0,10	3,00	Newton-Raphson
20	kvadratikus	C20/25 mean values	0,10	2,00	Newton-Raphson
21	kvadratikus	C20/25 mean values	0,10	3,00	Newton-Raphson

3. táblázat: Alulvasalt és túlvasalt gerendák paraméterei

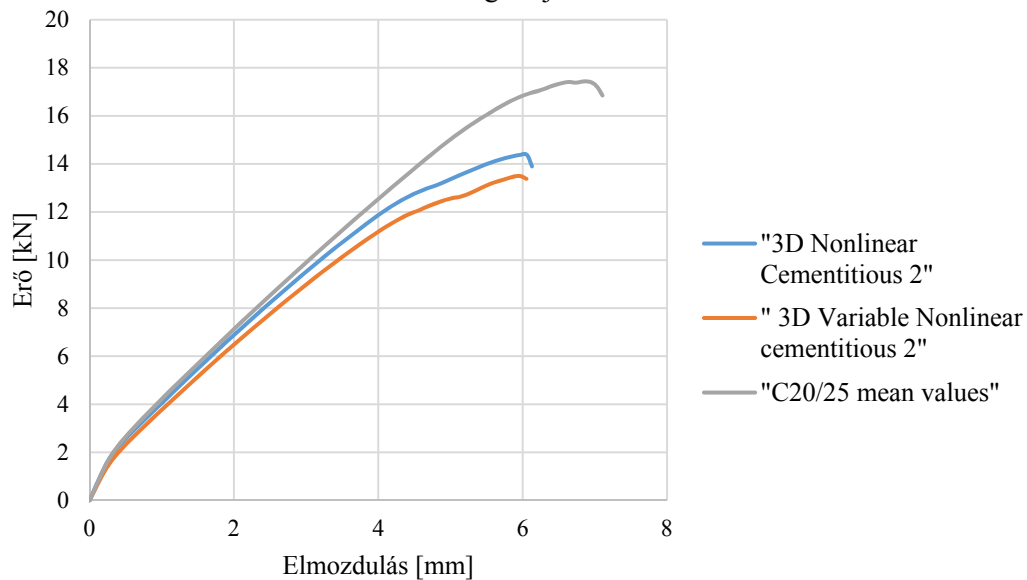
13/C. Melléklet

Különböző anyagmodellel készült alulvasalt gerendák erő-elmozdulás diagramjai



16. grafikon: Különböző anyagmodellel készült alulvasalt gerendák erő-elmozdulás diagramjai

Különböző anyagmodellel készült túlvasalt gerendák erő-elmozdulás diagramjai



15. grafikon: Különböző anyagmodellel készült túlvasalt gerendák erő-elmozdulás diagramjai

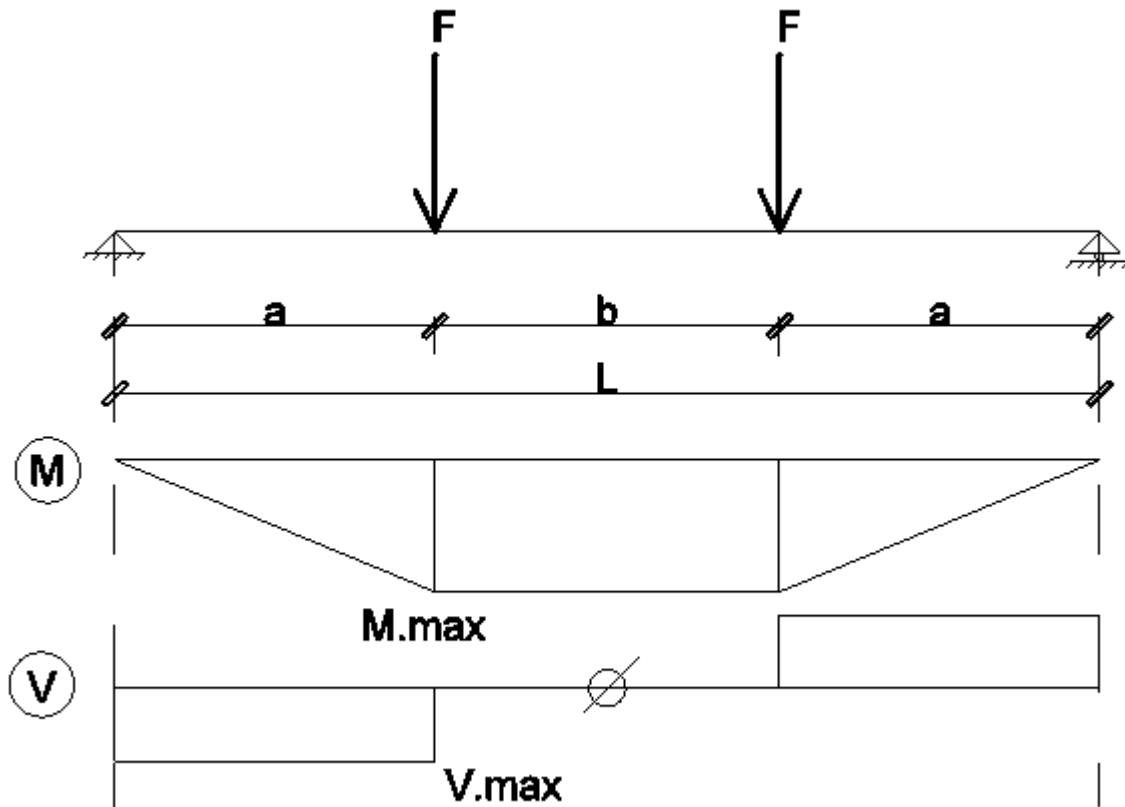
13/D. Melléklet**Részletes kézi számítások**

A normálvasalású gerenda részletes kézi számítását bemutatom, az alulvasalt és túlvasalt gerendákra kapott eredményeket táblázatosan adom meg, mivel ezeknél a számítás menet azonos.

<i>Gerenda megnevezése</i>	<i>Repesztó erő a kézi számítás alapján [kN]</i>	<i>Tönkremenetelhez tartozó erő a kézi számítás alapján [kN]</i>
Alulvasalt	0,99	6,50
Normálisan vasalt	1,17	10,20
Túlvasalt	1,39	11,10

8. táblázat: A kézi számítások eredményei

Gerenda harmadpontos terhelése Normálisan vasalt gerenda



1.ábra - Gerenda statikai váza, nyomatéki és nyíróerő ábrája

1. Adatok

- $L := 1000\text{mm}$ (feszítávolság)
 $a := 325\text{mm}$ (az erő távolsága a támasztól)
 $b := 350\text{mm}$ (a két erő távolsága)

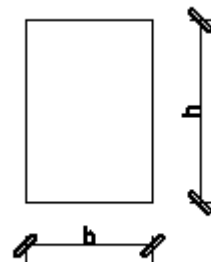
1.1. Keresztmetszeti adatok

- $h := 100\text{mm}$
 $b := \frac{h}{1.5} = 67\text{mm}$ $b := 65\text{mm}$

1.2. Beton (C20/25)

$$f_{ck} := 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_{ctm} := 2.2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



$$E_{\text{cm}} := 30 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \quad E_{\text{c.eff}} := \frac{1.05 \cdot E_{\text{cm}}}{1 + 2.3} = 9.55 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$

$$\varepsilon_{\text{cu}} := 0.0035$$

1.3. Betonacél

φ8-as betonacél:

$$\phi_8 := 8\text{mm}$$

$$f_{\text{yk}} := 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varepsilon_{\text{su}} := 2.5\%$$

$$E_{\text{S}} := 200000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\xi_{\text{c0}} := 0.49 \quad \xi_{\text{c0}}^{\sim} := 2.11$$

φ6-os betonacél:

$$\phi_6 := 6\text{mm}$$

$$f_{\text{yk.6}} := 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varepsilon_{\text{su.6}} := 2.5\%$$

$$E_{\text{S}} := 200000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\xi_{\text{c0.6}} := 0.62 \quad \xi_{\text{c0.6}}^{\sim} := 1.14$$

2. Igénybevételek

2.1. Nyomaték

$$F := 10\text{kN}$$

$$M_{\text{max}} := F \cdot a = 3.3 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

2.2. Nyíróerő

$$V_{\text{max}} := F = 10 \cdot \text{kN}$$

3. Tervezés

3.1. Nyomatéki tervezés

A gerenda hosszvasalásának meghatározása

A betonfedés: $c_{\text{u}} := 5\text{mm}$

A hatékony magasság: $d := h - \left(\frac{\phi_8}{2} + \phi_6 + c_{\text{u}} \right) = 85 \cdot \text{mm}$

A nyomatéki egyenletből x_{c} meghatározása:

Given

$$x_{\text{c}} := 10\text{mm}$$

$$M_{\text{max}} = b \cdot x_{\text{c}} \cdot f_{\text{ck}} \cdot \left(d - \frac{x_{\text{c}}}{2} \right)$$

$$x_c := \text{Find}(x_c) \quad x_c = 38 \cdot \text{mm}$$

Kezdeti feltevések ellenőrzése

$$\xi_c := \frac{x_c}{d} = 0.445 < \xi_{c0} = 0.49 \quad \text{A betonacélok folyási állapotban vannak!}$$

$$\varepsilon_s := \varepsilon_{cu} \cdot \frac{d - 1.25 \cdot x_c}{1.25 \cdot x_c} = 0.3\% < \varepsilon_{su} = 2.5\% \quad \text{A betonacélok nem szakadnak el!}$$

Szükséges betonacél mennyiség:

$$A_{szüks} := \frac{b \cdot x_c \cdot f_{ck}}{f_{yk}} = 98 \cdot \text{mm}^2$$

Alkalmazott betonacél mennyiség: $n_s := 2$

$$A_s := n_s \cdot \frac{\phi_8^2 \cdot \pi}{4} = 101 \cdot \text{mm}^2$$

Acélbetétek közti legkisebb távolság: $s_\phi := 5 \text{mm} = 5 \cdot \text{mm}$

$$n_s \cdot \phi_8 + (n_s - 1) \cdot s_\phi + 2 \cdot \phi_6 + 2 \cdot c_u = 43 \cdot \text{mm} < b = 65 \cdot \text{mm}$$

Nyomatéki ellenőrzés:

$$x_c := \frac{A_s \cdot f_{yk}}{b \cdot f_{ck}} = 39 \cdot \text{mm}$$

$$\frac{x_c}{d} = 0.455 < \xi_{c0} = 0.49 \quad \text{A betonacélok folyási állapotban vannak!}$$

$$\varepsilon_s := \varepsilon_{cu} \cdot \frac{d - 1.25 \cdot x_c}{1.25 \cdot x_c} = 0.3\% < \varepsilon_{su} = 2.5\% \quad \text{A betonacélok nem szakadnak el!}$$

$$M := b \cdot x_c \cdot f_{ck} \cdot \left(d - \frac{x_c}{2} \right) = 3.30 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_t := \frac{M}{a} = 10.2 \cdot \text{kN}$$

Lehorgonyzási hosszak: $f_{bd} := 2.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{yd} := \frac{f_{yk}}{1.15}$

$$l_b := \frac{\phi_8}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} = 378 \cdot \text{mm}$$

$$\alpha_a := 0.7 \quad (\text{felhajlított vasak})$$

$$l_{b,\min} := \min(0.3 \cdot l_b, 10 \cdot \phi_8) = 80 \cdot \text{mm}$$

3.2. Nyírási vasalás tervezése

A beton által, nyírási vasalás nélkül felvehető nyíróerő meghatározása:

$$k := \min\left(1 + \sqrt{\frac{200}{\frac{d}{\text{mm}}}}, 2.0\right) = 2$$

$$\nu_{\min} := 0.035 \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{f_{ck}}{\frac{N}{\text{mm}^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.443$$

$$\rho_1 := \frac{A_s}{b \cdot d} = 0.018$$

$$V_{Rd,c} := \max\left[\left[\frac{0.18}{1.5} \cdot k \cdot \left(100 \cdot \rho_1 \cdot \frac{f_{ck}}{\frac{N}{\text{mm}^2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right], \nu_{\min} \cdot \frac{b}{\text{mm}} \cdot \frac{d}{\text{mm}} \cdot N\right] = 4.39 \cdot \text{kN}$$

$$V_{Rd,c} = 4.394 \cdot \text{kN} < F_t = 10.156 \cdot \text{kN} \quad \text{Szükség van nyírási vasalásra!}$$

A nyomott beton tönkremetele nélkül felvehető maximális nyíróerő értéke:

$$z := 0.9 \cdot d = 76.5 \cdot \text{mm}$$

$$\theta := 37.6 \text{deg} \quad \cot(\theta) = 1.3$$

$$\alpha := 90 \text{deg}$$

$$\nu := 0.6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \cdot \frac{1}{\frac{N}{\text{mm}^2}}\right) = 0.552$$

$$V_{Rd,max} := b \cdot z \cdot \nu \cdot f_{ck} \cdot \frac{\cot(\theta) + \cot(\alpha)}{1 + (\cot(\theta))^2} = 26.54 \cdot \text{kN} > F_t = 10.156 \cdot \text{kN} \quad \text{A keresztmetszet nyírásra bevasalható!}$$

Méretezett nyírási vasalással rendelkező keresztmetszet által felvehető nyíróerő:

Szükséges kengyeltávolság meghatározása:

$$A_{sw} := \frac{2 \cdot \phi_6^2 \cdot \pi}{4} = 56.549 \cdot \text{mm}^2$$

$$s_k := \frac{A_{sw} \cdot f_{yk} \cdot 6 \cdot z}{F_t} \cdot \cot(\theta) = 133 \cdot \text{mm} \quad s_{k,alk} := 100 \text{mm}$$

$$V_R := \frac{A_{sw}}{s_{k,alk}} \cdot f_{yk} \cdot z \cdot \cot(\theta) = 13.48 \cdot \text{kN} > F_t = 10.2 \cdot \text{kN}$$

A szerkesztési szabályok ellenőrzése:

$$\rho_{w,min} := \frac{0.08 \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}}}{f_{yk} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}} = 0.0007 < \rho_w := \frac{A_{sw}}{s_{k,alk} \cdot b} = 0.009 < \rho_{w,max} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu \cdot f_{ck}}{f_{yk}} = 0.011$$

A nyírási vashányad mennyisége megfelelő!

A nyírási acélbetétek maximális távolsága:

$$s_{max} := 0.75 \cdot d = 64 \cdot \text{mm} > s_{alk} := 60 \text{mm}$$

4. Lehajlás számítása

A hatékony keresztmetszeti magasság:

$$d := h - \left(c_u + \phi_6 + \frac{\phi_8}{2} \right) = 85 \cdot \text{mm}$$

Rugalmassági modulusok aránya:

$$\alpha_{s,eff} := \frac{E_s}{E_{c,eff}} = 20.952$$

A keresztmetszeti jellemzők az I. feszültségállapotban:

$$A_s = 101 \cdot \text{mm}^2 \quad S := \frac{b \cdot h^2}{2} + A_s \cdot (\alpha_{s,eff} - 1) \cdot d = 495496 \cdot \text{mm}^3$$

$$A_I := b \cdot h + A_s \cdot (\alpha_{s,eff} - 1) = 8506 \cdot \text{mm}^2 \quad x_I := \frac{S}{A_I} = 58.3 \cdot \text{mm}$$

$$I_I := \frac{x_I^3 \cdot b}{3} + \frac{(h - x_I)^3 \cdot b}{3} + (\alpha_{s,eff} - 1) \cdot A_s \cdot (d - x_I)^2 = 7294371 \cdot \text{mm}^4$$

A keresztmetszeti jellemzők a II. feszültségállapotban:

Given

$$x := 10 \text{mm}$$

$$\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot b - \alpha_{s,eff} \cdot A_s \cdot (d - x) = 0$$

$$x_{II} := \text{Find}(x) = 48.6 \cdot \text{mm}$$

$$I_{II} := \left(\frac{x_{II}^3 \cdot b}{3} \right) + \alpha_{s,eff} \cdot A_s \cdot (d - x_{II})^2 = 5277989 \cdot \text{mm}^4$$

A lehajlás számítása:

A repesztőnyomaték értéke:

$$M_{cr} := \frac{f_{ctm} \cdot I_I}{h - x_I} = 0.38 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

A lehajlás értéke az I. feszültségállapotban:

$$e_I := \frac{5}{384} \cdot \left(\frac{8 \cdot F_t}{3 \cdot L} \right) \cdot \frac{L^4}{E_{c,eff} \cdot I_I} = 5.06 \cdot \text{mm}$$

A lehajlás értéke a II. feszültségállapotban:

$$e_{II} := \frac{5}{384} \cdot \left(\frac{8 \cdot F_t}{3 \cdot L} \right) \cdot \frac{L^4}{E_{c,eff} \cdot I_{II}} = 7 \cdot \text{mm}$$

A lehajlás értéke a tartó középső keresztmetszetében:

$$\beta := 0.5 \quad \zeta := 1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M} \right) = 0.942$$

$$e := \zeta \cdot e_{II} + (1 - \zeta) \cdot e_I = 6.89 \cdot \text{mm}$$

$$e = 7 \cdot \text{mm}$$