



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Építőmérnöki Kar  
Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék

# Meghatározható-e a racionális módszer alkalmazhatósági határa képelemző algoritmus segítségével?

Telek Noémi

Varga Borbála

*építőmérnök BSc szakos hallgató*

Konzulensek:

Horváthné Dr. Nagy Eszter Dóra

*Adjunktus, BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék*

Ermilov Alexander Anatol

*Tudományos segédmunkatárs, BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék*

Budapest, 2023.

# Tartalom

Tartalmi kivonat.....	4
Abstract.....	5
1. Bevezetés .....	6
2. Vizsgált terület, felhasznált adatok.....	11
3. Módszertan.....	14
3.1 GIS alapú statisztikák .....	14
3.2 LSPIV .....	15
3.3 SBM.....	18
4. Eredmények .....	19
4.1 GIS alapú statisztikák .....	19
4.2. LSPIV és SBM.....	22
5. Összefoglalás .....	25
Irodalomjegyzék .....	27

## Ábrajegyzék

Ábrajegyzék.....	2
1. ábra Az egyidejű lefolyási vonalak és az összegyülekezési idő (Hajnal és társai 2014).....	7
2. ábra Csapadékmaximum függvény (Kontur és társai, 2003).....	8
3. ábra Németország domborzati térképe (balra) és a RADOLAN adatbázisban felhasznált radar állomások (jobbra) (Kreklow és társai 2020) .....	11
4. ábra Weser részvízgyűjtő területei.....	12
5. ábra Weser részvízgyűjtőinek sűrűségfüggvénye.....	13
6. ábra Viszonyítási pontok helye .....	16
7. ábra LSPIV grid-kiosztás, valamint a beállított IA és SA méretének beállítása .....	17
8. ábra Sebességvektorok a csapadékmezőn.....	17
9. ábra Korrigált sebességvektorok a csapadékmezőn .....	18
10. ábra Minimum értékek .....	19
11. ábra Átlag lefedettség 300 km <sup>2</sup> -ig.....	20
12. ábra Átlag lefedettség 50 km <sup>2</sup> -ig.....	20
13. ábra Medián értékek különböző küszöbszintek esetén .....	20

<i>14. ábra Területi csapadék átlag és a redukciós tényező.....</i>	<i>21</i>
<i>15. ábra Csapadék szórása 300 km<sup>2</sup>-ig.....</i>	<i>21</i>
<i>16. ábra Csapadék szórása 50 km<sup>2</sup>-ig.....</i>	<i>21</i>
<i>17. ábra Variációs tényező egy 55 km<sup>2</sup>-es területre.....</i>	<i>22</i>
<i>1. táblázat Sebességvektorok nagysága .....</i>	<i>23</i>
<i>18. ábra Nyers sebességvektorok.....</i>	<i>23</i>
<i>19. ábra Korrigált sebességvektorok .....</i>	<i>23</i>
<i>21. ábra SBM eredménye.....</i>	<i>23</i>
<i>20. ábra Szűrt csapadékmező.....</i>	<i>23</i>

## Tartalmi kivonat

<b>Név:</b>	Telek Noémi Varga Borbála
<b>Dolgozat címe:</b>	Meghatározható-e a racionális módszer alkalmazhatósági határa képelemző algoritmus segítségével?
<b>Konzulensek:</b>	Horváthné Dr. Nagy Eszter Dóra <i>BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék</i> Ermilov Alexander Anatol <i>BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék</i>
<b>Félév:</b>	2023/24/1. félév

A racionális módszer a 19. század óta használt jól bevált empirikus módszer, melyet a mértékadó vízhozam meghatározásra használunk a mérnöki gyakorlatban. A módszer alkalmazásához két fontos feltétel tartozik. Az egyik feltevés, hogy a vízgyűjtő területére érkező csapadék intenzitásának állandónak kell lennie az összegyülekezési idő tartamáig, a másik, hogy a vízgyűjtőt érő csapadék térben is homogén.

A módszer alkalmazhatóságának felső határa függ attól, hogy mekkora vízgyűjtő méretig érvényes az utóbbi feltételezés. A vizsgálatok szempontjából fontos tényező, hogy egyedül a racionális módszer alkalmazható tapasztalati árvízszámítási eljárásként a 0-10 km<sup>2</sup> közötti vízgyűjtő területekre.

Tudományos Diákköri Konferencia dolgozatunkban ennek a felső határát szeretnénk meghatározni, ugyanis ez a határ általában ökol szabályként kerül csak meghatározásra.

Az alkalmazhatóság felső határának meghatározásához németországi radarállomások adatait felhasználva, képelemző algoritmust használtunk. A radarfelvételek térbeli felbontása elég részletes ahhoz, hogy nyomon követhessük a csapadékmezők mozgását és számszerűsíthessük az egyes vízgyűjtők lefedettségét és a csapadék egyenletességét.

A vizsgálatokhoz, a 2006-2016 közötti időszakokhoz tartozó ingyenesen elérhető németországi radar adatokat használunk. Az adatok tartalmazzák, az órás csapadékösszeg térképeket, 1x1 km-es cella felbontással, egy helyi vetületi rendszerben.

Ezeket az adatokat először beolvastuk MATLAB-ba és átalakítottuk, hogy a program számára könnyebben kezelhető formátumba kerüljenek. A csapadékösszeg térképeken végzett vizsgálatok két részre oszthatók. Egyrészt képelemző algoritmus segítségével elemeztük őket a csapadékmezők mozgási sebessége és mérete szempontjából, másrészt több különféle statisztikát vizsgálva meghatároztuk a részvízgyűjtők lefedettségét a Weser folyó vízgyűjtőjén. A statisztikai elemzésekből megállapítottuk, hogy a racionális módszer

alkalmazhatósági határának pontos felderítéséhez jobb térbeli felbontású radar adatokra lenne szükségünk.

## **Abstract**

**Name:** Noémi Telek  
Borbála Varga

**Thesis title:** Is it possible to determine the applicability of the Rational Formula using image processing?

**Supervisors:** Dóra Eszter Nagy Dr. Horváthné  
*BME Department of Hydraulic and Water Resources Engineering*  
Anatol Alexander Ermilov  
*BME Department of Hydraulic and Water Resources Engineering*

**Semester:** 2023/24/1. semester

The Rational Formula has been used since the 19th century. It is a well-established empirical method, which is used to determine design flow in the engineering practice. There are two main assumptions for the application of this method. First, the intensity of precipitation in the catchment must remain constant for the duration of the time of concentration. Second, the precipitation is assumed to be spatially homogeneous.

The upper limit for the applicability of the rational method depends on the catchment size up to which the latter assumption applies. It is an important factor that only the Rational Formula can be used as an empirical flood estimation procedure for catchments between 0 and 10 km<sup>2</sup>.

In this study we would like to define the upper limit of the two criteria mentioned above, as this limit is usually defined only as a rule of thumb. To determine the upper limit of applicability, we employ image processing using data from radar observations in Germany. The spatial resolution of the radar images is detailed enough to track the movement of precipitation fields and quantify their coverage and uniformity for each watershed.

We use freely available, corrected radar data from Germany for the period 2006-2016. The data includes hourly precipitation maps with 1x1 km cell resolution in a local projection system.

This data was first read into MATLAB and converted into a format that was easier for the program to handle. The precipitation maps were then analyzed with the help of an image processing algorithm to measure the velocity and size of the precipitation events. As a result, several different statistics were examined. From the statistical analyses, we determined that we would need accurate radar data with a better spatial resolution for the applicability limit of a rational method.

# 1. Bevezetés

A racionális módszer a 19. század óta nemzetközi szinten használt jól bevált empirikus metódus, melyet a mértékadó vízhozam meghatározására használunk a mérnöki gyakorlatban. A mértékadó vízhozam számítására számos más módszer is fellelhető a hazai szakirodalomban. Koris (2021) összesen hét módszert említ: racionális módszer, Csermák módszer, Kollár módszer, Kovács-Takács féle eljárás, Markó módszere, OVF 2001-es módszer és a Chow-Wisnovszky árhullámszámítási módszer. Ezek közül több eljárás is alkalmazható kisebb (<10 km<sup>2</sup>) vízgyűjtőkre, azonban régen, az akkor elérhető adatokra kerültek kidolgozásra. A legújabb, aktuális adatokra épülő OVF 2021-es módszer 10 km<sup>2</sup>-nél kisebb vízgyűjtőkre nem alkalmazható, mivel a módszer kidolgozásakor ennél kisebb vízgyűjtőkre jellemzően nem állt rendelkezésre mért adat. Ebből adódóan tehát a kisebb vízgyűjtőkre továbbra is a racionális módszer a legcélszerűbb választás a mértékadó vízhozam számítására. A módszer elnevezése onnan ered, hogy 100 évvel ezelőtt valóban „racionálisnak” volt nevezhető, azonban ma már vannak, akik megkérdőjelezzik a szükségességét (Grimaldi és Petroselli 2015).

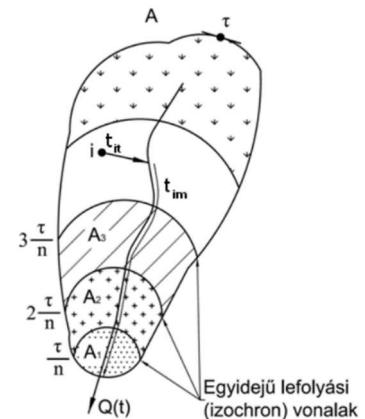
A racionális módszer bevezetéséről sok eltérő adatot találtunk, így az igazi valóját nem tudjuk. Thomas John Mulvany öccse volt William Thomas Mulvany-nak, aki abban az időben az alelnöke volt az *Institution of Civil Engineers of Ireland* mérnöki társaságnak. 1851 februárjában bemutatott egy tanulmányt ennek a mérnöki társaságnak, melynek címe *'On the use of self registering rain and flood gauges in making observations of the relation of rainfall and of flood discharges in a given catchment'*. Ebben az írásban Mulvany megfogalmazta az összegyülekezési idő fogalmát, továbbá a mindenki által ismertté vált racionális módszert. A későbbiekben Thomas és Williams együtt dolgoztak további munkákon. 1847-ben egy városi vízgyűjtőről levonuló maximális vízhozamot a  $Q = A * c * i$  képlettel határozta meg, ahol  $A$  a vízgyűjtő nagysága,  $i$  a csapadék intenzitása és  $c$  a lefolyási arányt jellemző állandó. A módszer alkalmazásához két fontos feltétel tartozik. Az egyik feltevés, hogy a vízgyűjtő területére érkező csapadék intenzitásának állandónak kell lennie az összegyülekezési idő tartamáig, a másik, hogy a vízgyűjtőt érő csapadék térben is homogén (Koris 2021, Grimaldi és Petroselli 2015).

A módszert nemzetközileg is használják, ennek következtében a változók jelölését, illetve nevét illetően nincs teljes megegyezés. Magyarországon a racionális módszer képlete (Koris 2021):

$$Q = \alpha * i(T) * A$$

ahol  $\alpha$  [-] a lefolyási tényező, melynek meghatározásához empirikus táblázatokat készítettek (Kontur és társai 2003, Grimaldi és Petroselli 2015), valamint feltételezzük, hogy időben nem változik és értéke 0 és 1 közé esik. Az  $i$  [mm/h] a csapadék intenzitása, és ehhez a változóhoz tartozik a módszer egyik alap feltétele, hogy az összegyülekezés idő tartamáig állandónak feltételezzük ( $T = \tau$ ). Végezetül  $A$  [km<sup>2</sup>] a vízgyűjtő területe, ami kapcsolódik a csapadékkal kapcsolatos másik feltevéshez, miszerint a csapadék területileg is homogén.

A vízgyűjtő területen játszódó vízmozgások összességét és a mederbeli lefolyási folyamatokat együttesen összegyülekezési folyamatnak nevezzük. Összegyülekezési idő ( $\tau$ ) alatt azt az időtartamot értjük, amíg a vízcsepe a legtávolabbi pontról – a felszínen lefolyva – a kifolyási szelvénybe ér (Kontur és társai 2003). A kisvízgyűjtő területeken a lefolyás számítása a közvetlen csapadék-lefolyás kapcsolatok figyelembevételére alapján történhet. Magyarországon a tapasztalatok alapján a kisvízgyűjtők területének elméleti nagysága:  $A < 10000$  km<sup>2</sup>, de ez felső határ, a gyakorlati számításoknál egy-két ezer, vagy inkább néhány száz négyzetkilométeres, vagy ennél kisebb vízgyűjtőt tekinthetünk kisvízgyűjtőnek (Kontur és társai 2003). A csapadék-lefolyás kapcsolat elemzése magában foglalja a vízgyűjtőkarakterisztika módszerét, ami az egyidejű lefolyási vonalakra alapoz (1. ábra). Erre az eljárásra épül a racionális módszer is.



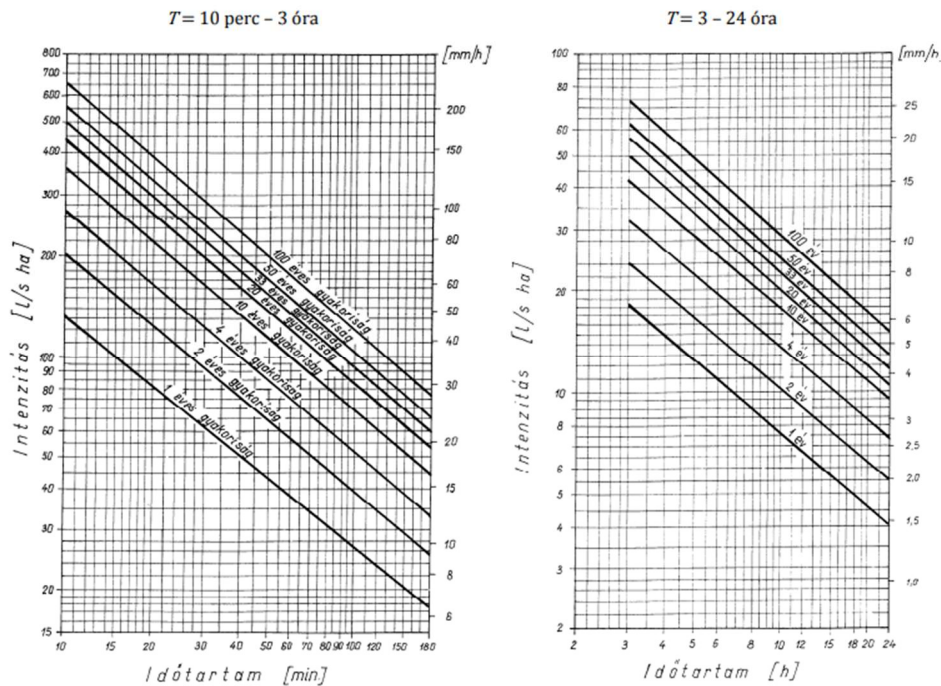
1. ábra Az egyidejű lefolyási vonalak és az összegyülekezési idő (Hajnal és társai 2014)

A racionális módszer kapcsolatot teremt a vízgyűjtő morfológiai – felszíni lefolyási – viszonyai és a csapadék időbeli alakulása között. A vízgyűjtő morfológiai–lefolyási viszonyait a vízgyűjtő karakterisztika mutatja meg. A csapadék időbeli alakulását egyenletes intenzitásúnak tételezzük fel, nagyságát a csapadékmaximum függvény alapján szokás fölvenni. A gyakorlatban végül a vízhozam számításánál a már korábbiakban is említett  $Q = \alpha * i(T) * A$  képletre egyszerűsödik az eljárás.

A fent említett csapadékmaximum függvény a csapadék intenzitása ( $i$ ), a csapadék időtartama ( $T$ ), és az átlagos visszatérési idő (gyakoriság) közötti összefüggést adja meg az alábbi alakban:

$$i = \alpha * T^{-m}$$

ahol  $a$  az egységnyi időhöz tartozó intenzitás,  $m$  pedig a földrajzi helyzettől és éghajlattól függ. A csapadékmaximum függvényről az olvasható le, hogy valamely időtartamú csapadék valamilyen visszatérési idővel milyen intenzitású (2. ábra).



2. ábra Csapadékmaximum függvény (Kontur és társai, 2003)

A racionális módszer alkalmazhatóságának felső határa függ attól, hogy mekkora vízgyűjtő méretig érvényesek a kikötések. Ennek számszerű vizsgálatára elemezhetünk csapadék adatokat. A csapadék adatokhoz többféle mérési eljárásom keresztül hozzá juthatunk. Történhet a csapadék megfigyelése pontszerűen, hagyományos felszíni csapadékmérő állomásokon, illetve térben folytonosan, felszíni vagy műholdas radar méréseken keresztül (Dingman 2015, Hajnal és társai 2014).

A hagyományos csapadékmérő eszközök olyan egyszerűek lehetnek, mint egy edény, amelyben az összegyűjtött vizet időszakosan mérik vagy folyamatosan rögzítik, viszont ezzel csak egy kis terület csapadék mennyiségét kapjuk meg. A csapadék térbeli eloszlásáról legfeljebb térbeli interpoláció útján nyerhetünk információt.

A felszíni radarfelvételek térbeli felbontása elég részletes ahhoz, hogy nyomon követhessük a csapadékmezők mozgását és számszerűsíthessük az egyes vízgyűjtők lefedettségét és a csapadék egyenletességét. A radarok a mikrohullámú tartományban működnek, egy adó-vevő-antenna és egy megjelenítő berendezésből állnak. A radar működésének elve, hogy mozgó antennájukkal másodpercenként több mint százszor



bocsátanak ki kb. egy fokos nyílású nagyfrekvenciás impulzusokat. A sugárzás útjába eső tárgyak részben elnyelik, részben pedig visszaverik az impulzusokat. A visszavert sugárzást detektálja a radar, és megállapítható a tárgy visszaverő képessége, más szóval a reflektivitása. A visszaverődő hullámok alapján továbbá meghatározható a visszaverődést okozó tárgy relatív helyzete. Természetesen a radarmegfigyelés, mint a légkört szondázó tevékenység fizikájából és törvényszerűségeiből adódóan sajnos a mérések kisebb-nagyobb hibákkal terheltek, amelyek ismerete szükséges a helyes értelmezésükhöz, megfelelő felhasználói döntésekhez. Ilyenek például a WLAN zavarok, a föld görbületéből keletkező hibák, illetve a sugárnyaláb rendellenes terjedése (Hadvári és társai, 2018).

A meteorológiai célú műholdas megfigyelések több mint ötven évvel ezelőtt kezdődtek, azóta a mérőműszerek sokat fejlődtek, viszont a térbeli és időbeli felbontás nem megfelelő az általunk elvégzendő vizsgálatokhoz, emiatt használtunk radar adatokat. A meteorológiai műholdak több hullámhossztartományban mérik a sugárzást, amivel célunk a légkör, a földfelszín és a felhőzet megfigyelése. Ez egyaránt segíti az aktuális időjárás meghatározását, az éghajlat megfigyelését és a légköri folyamatok jobb megértését, viszont a vizsgálatunk szempontjából nem elég pontos.

A felszíni radarfelvételek elég részletesek ahhoz, hogy nyomon követhessük a csapadékmezőket, és megállapíthassuk a csapadék típusát. A felhők és csapadékok főbb alkotóelemei a vízcseppek, a túlhűlt vízcseppek, jégkristályok, hópolyhek, a légkörben lejátszódó mikrofizikai (kondenzáció, részecskék ütközése stb.) folyamatok termékei. A létrehozó folyamatok igen változatosak lehetnek a hőmérséklettől, nedvességtartalomtól és a lehülés sebességétől függően, ezek egyértelműen meghatározzák a felhőelemek és csapadékelemek halmazállapotát, szerkezetét (Hadvári és társai, 2018).

A képalkotó eszközök és a számítási kapacitások az elmúlt évtizedekben elkezdtek kifejleszteni a képalapú mérések és adatgyűjtések technikákat ipari és tudományos alkalmazások széles körében (Fleit és Baranya, 2022). A víz- és gépészmérnöki szakmákban az egyik legjelentősebb és leghasznosabb program használata a Particle Image Velocimetry röviden PIV volt, lényege, hogy keresztkorrelációval azonosít be mintázatokat az egymást követő képeken és méri azok elmozdulását, továbbá ismert a képek között eltelt idő, ebből következően számítható a sebesség. Majd, ha ezt a program minden elmozdult részecskénél véghez viszi, onnantól kapható egy sebesség-vektormező, azonban tudni kell, hogy nem történik sebesség detektálás, csak a mintázatok sebességét lehet meghatározni. Az 1990-es években ennek egy továbbfejlesztett verziója segítette a mérnöki munkákat, melynek neve large-scale PIV, azaz LSPIV lett (Fujita és társai 1998). Az LSPIV már felületi pontok

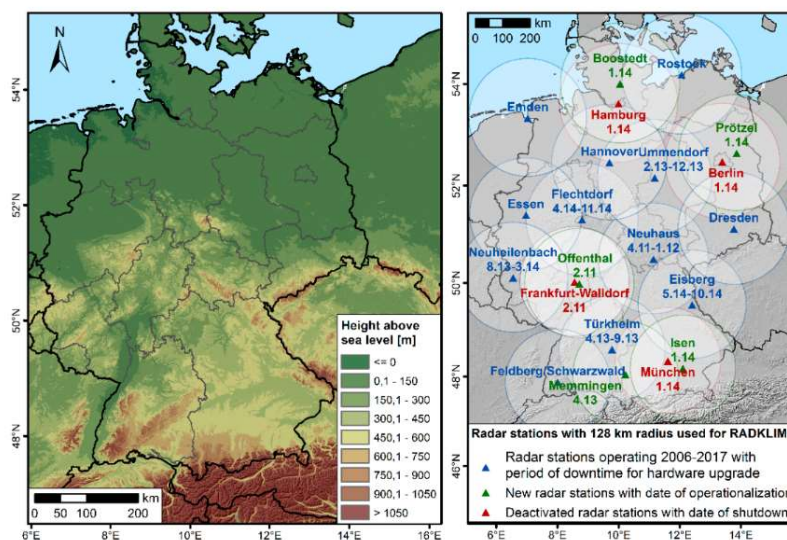
mozgásváltozásából tudta kiszámolni a sebesség vektor nagyságát és irányát, majd ezek elemzése már egy sokkal részletesebb és pontosabb eredményt tudott biztosítani.

A vízmérnökök széles körében elterjedt a program használata, mégpedig az egyszerű alkalmazhatósága és az elfogadható költségei miatt (Ermilov és társai 2022). Többségben a folyókon végzett gyors kiöntési mérésekre használják (Muste és társai 2008). Azonban a mi dolgozatunkban a radarméréseket átalakítottuk képekké, majd videóvá és ily módon már egyszerűen használhatóvá vált a program számára.

A dolgozatban célunk tehát a racionális módszer kapcsán annak vizsgálata, hogy a vízgyűjtőket érő csapadék területi lefedettsége hogyan alakul. Ehhez alapvetően két jól elkülönülő megközelítést alkalmaztunk. Egyrészt vizsgáltuk a csapadék adatok statisztikai jellemzőit vízgyűjtőnként, másrészt képelemzés segítségével vizsgáltuk a csapadékszónák mozgását.

## 2. Vizsgált terület, felhasznált adatok

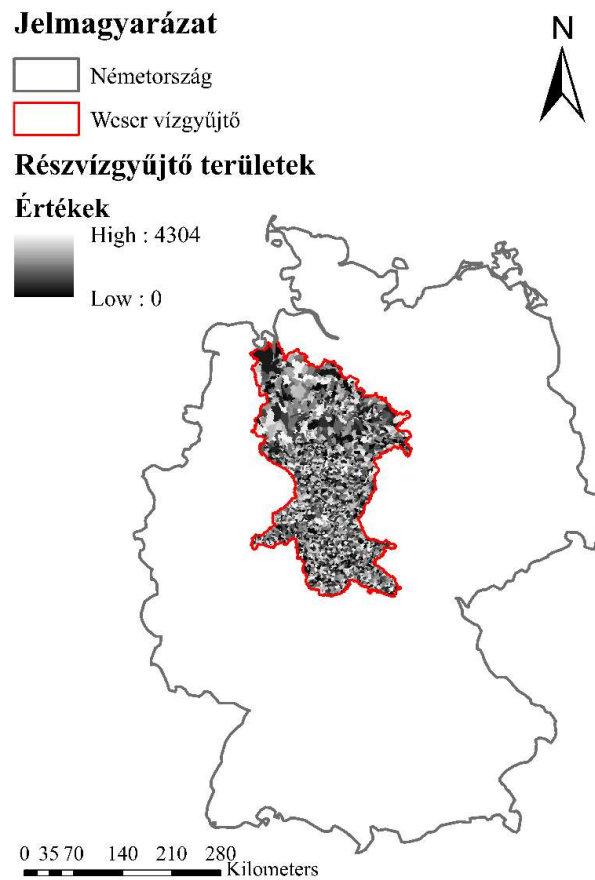
A racionális módszer felső alkalmazhatósági határának vizsgálatához németországi adatokat használtunk, ugyanis a magyarországi radar adatok nem hozzáférhetőek ingyen. Az adatbázist Kreklow és társain (2020) keresztül találtuk. A RADOLAN adatbázis (DWD CDC) adatai Németország területére vonatkoznak (3. ábra), tartalmazzák az óras csapadékösszeg térképeket, 1x1 km-es cellafelbontással egy helyi vetületi rendszerben. 2006-2022-ig érhetőek el az adatok, viszont a fájlok nagy mérete miatt, a vizsgálatot 2006 és 2016 között végeztük. Az adatbázis felszíni állomások adatai alapján korrigált csapadékmagasságot tartalmaznak. A validáció alapján (amit a 2013-2016 időszakra végeztek) az abszolút átlagos napi hiba 0,761 mm/nap. Ez lényegesen jobb, mint a korrekció nélküli érték, 2,390 mm/nap (DWD CDC).



3. ábra Németország domborzati térképe (balra) és a RADOLAN adatbázisban felhasznált radar állomások (jobbra) (Kreklow és társai 2020)

Az adatok ascii, illetve bináris fájlformátumban érhetőek el, a könnyebb beolvashatóság miatt az ascii fájlokkal dolgoztunk. Ezeket az adatokat először MATLAB-ba olvastuk be és alakítottuk át .mat formátumba, hogy a program számára könnyebben kezelhetőek legyenek. Az értékeket át kellett számolni 1/10 mm-ből mm-be, ezt az ascii fájl átalakításakor meg is tettük. A leírás alapján a napi gördülő összegeket kellett volna visszszámolni óras értékekké, de az éves összegeket ellenőrizve kiderült, hogy a leírással ellentétben az ascii fájlok már az óras összegeket tartalmazzák. A .mat fájlokkal két irányban indultunk el, kezdetben GIS (Geographic Information System) programmal foglalkoztunk, amivel össze

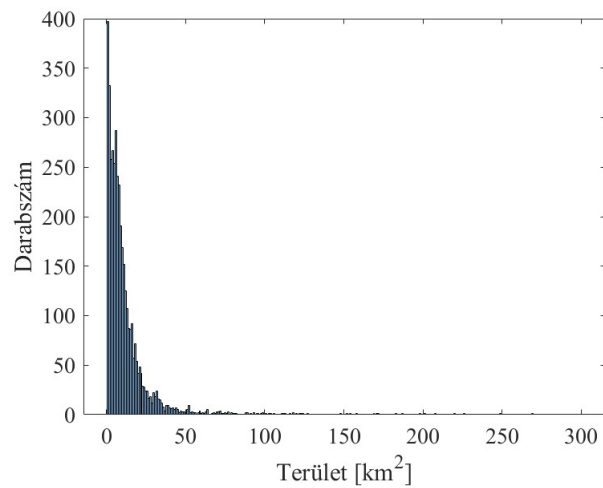
tudtuk egyeztetni a világtérképet, a vízgyűjtő területeket és a .mat fájlokban lévő csapadék adatokat.



4. ábra Weser részvízgyűjtő területei

Mivel az adataink Németország területére száltak így célszerű volt a térképen csak Németországot és ezzel együtt Németország területét vizsgálni. Különböző méretű vízgyűjtőket kellett vizsgálni ahhoz, hogy a lefedettség mértékét tudjuk számszerűsíteni. Németország területének nagysága miatt, a Weser folyó vízgyűjtőjét, illetve annak kisebb részvízgyűjtő területeit választottuk. A Weser folyó teljes területével az országhatáron belül helyezkedik el és 4304 darab részvízgyűjtővel rendelkezik, a számítás során 261 darab részvízgyűjtőt nem vettünk figyelembe, mivel a területük nem érte el az 1 km<sup>2</sup>-t. A Weser vízgyűjtőjét és részvízgyűjtőit a 4. ábra mutatja.

Az 5. ábrán látható a részvízgyűjtők területeinek sűrűségfüggvénye. A vizsgált vízgyűjtők mérettartománya 1-718 km<sup>2</sup>. Látható, hogy a kisebb vízgyűjtőkből több százat, míg a nagyobb vízgyűjtőkből csak néhányat tudtunk vizsgálni. A 718 km<sup>2</sup> egy kiugró méret, 150-300 km<sup>2</sup> között már nagyon kevés részvízgyűjtő van. 150 km<sup>2</sup> alatt még a legtöbb méret esetén van egynél több vízgyűjtő ugyanazzal a mérettel.



5. ábra Weser részvízgyűjtőinek sűrűségfüggvénye

A GIS programban előállított .shp fájlokból készítettünk egy, a csapadék adatokéval azonos formátumú ascii maszk fájlt, amire azért volt szükség, hogy a vízgyűjtőkre számítani tudjuk a különböző statisztikákat.

### 3. Módszertan

A kutatáshoz a MATLAB, ArcGIS és a Fudaa-LSPIV 1.9.2. programokat használtuk. Az előző fejezetben már kitértünk arra, hogy az eredeti ascii fájlokat átalakítottuk olyan formátumba számláló (for) ciklus segítségével, hogy a fájlok, jobban kezelhetőek legyenek a MATLAB számára. Ennek eredményeképpen olyan mátrixok időbeli sorozatát kaptuk, melyek a radarfelmérésből kapott csapadék intenzitás értékek térbeli eloszlását tartalmazták. Egy így elkészített, ún. .mat fájl egy hónapnyi adatot tartalmazott, a radarfelméréssel egyező, óránkénti felbontásban, azaz ~700 mátrixból épült fel (hónap napjai x 24). Az egyes mátrixok pedig 900 x 900 elemmel rendelkeztek, a radarfelmérés térbeli felbontásával összhangban.

#### 3.1 GIS alapú statisztikák

GIS programban megjelenítettük Németország térképét, illetve a vízgyűjtőterületeit. Az adatok saját vetületi rendszerben voltak, amit GIS-ben hozzá kellett adni. Ehhez minden információ ami kellett, biztosítva volt az adatbázis leírásában (Internet 1). Kimetsztük az általunk vizsgált Weser vízgyűjtőterületet és részvízgyűjtőit. A kimetszett adatokat kimentettük egy ascii fájlba, majd az ascii fejlécét eltávolítva egy 900x900-as maszk fájlal dolgoztunk tovább a MATLAB-ban. Ezek után a Weser részvízgyűjtő területeinek elemzéséhez a maszk fájl használtuk fel, aminek a segítségével MATLAB-ban már össze tudtuk hasonlítani a területek és a csapadékok viszonyait.

A statisztikai elemzésen keresztül vizsgáltuk meg, hogy meddig tekinthetjük egyenletesnek a csapadékot. Megállapítottuk az egyes területekhez tartozó csapadék maximumát, minimumát, átlagát, szórását, területi arányát, mediánját és a csapadékok összegét. Csapadékmaximum a csapadék mennyiség legmagasabb értékét jelenti, míg a minimum a legkisebb nem-zérus értéket. Az átlag értelmezéséhez az egyszerű átlag képletét alkalmaztuk, ahol  $h_i$  a csapadék mennyisége és  $n$  a megfigyelések száma:

$$\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{n}$$

A szórás ( $\sigma_h$ ) meghatározására pedig az alábbi formulát használtuk:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}{n}}$$

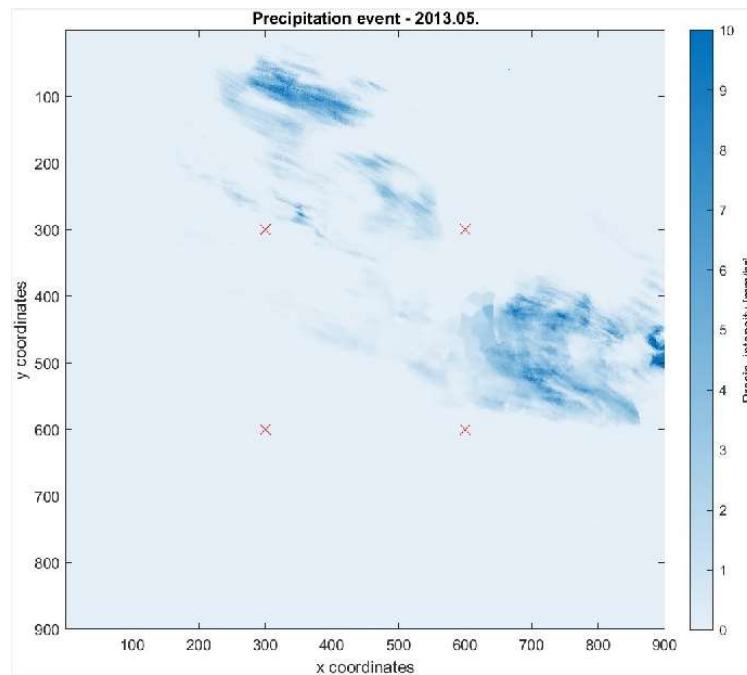
Véges elemszámú sokaság esetén a medián a sorba rendezett adatok közül a középső érték, másnéven a helyzeti középérték. Az összeg meghatározásakor vízgyűjtőnként összeadtuk a csapadék mennyiségét. A területi arány meghatározásával arra az értékre voltunk kíváncsiak,

hogy mekkora arányban fedi le a csapadék az egyes vízgyűjtő területeket. Megvizsgáltuk a csapadékot minden időpontban és minden területre. Majd ezeket az eredményeket MATLAB-ban összehasonlítottuk és következtetéseket vontunk le belőlük.

### 3.2 LSPIV

A képelemző algoritmusok használatához, először MATLAB-ban a korábban említett .mat fájlként beolvastuk a vizsgálatra kijelölt hónapok radarmérésből származó csapadék intenzitás adatait. Jelen dolgozat célja az előzetes eredmények, valamint a képfeldolgozás potenciáljának bemutatása volt, így vizsgálatunk tárgyát csupán 3 hónap képezte a kutatás ezen részében. Kezdetben egy hónapot kerestünk melyben változatos méretű, illetve mozgású csapadékmezőket véltünk felfedezni és így esett a választásunk 2010 júliusi hónapra, melyen a képfeldolgozás későbbi lépéseiben szükséges paraméter beállításokat tesztelhettük. Majd utána már céltudatosan olyan hónapok mellett döntöttünk, amikor egész Európa területén nagy csapadékmennyiséget mértek, emiatt a 2013 májusa és júniusát választottuk. Az egyes mátrixokat képekké alakítottuk, tehát ~700 képet készítettünk minden hónap esetében, amiket összefűztünk egy-egy videóvá. Ezekután a Fudaa-LSPIV 1.9.2. (Le Coz et al., 2014) nevezetű programmal dolgoztunk tovább, mely egy ingyenesen elérhető és könnyen kezelhető user-interface-szel rendelkező szoftver. A szoftvert az ún. LSPIV (Large-scale Particle Image Velocimetry; Fujita et al., 1998) képfeldolgozási lépéshez volt szükséges használnunk, mellyel a csapadékmezők sebességvektorait lehetséges előállítani. Az LSPIV eljárás lényege mintázatok azonosítása a képeken keresztik, majd ezen minták elmozdulásának mérése az időben egymás utáni képkockákon. A módszer fontos alap lépése, hogy először az eredetileg színes (RGB) videókat szürke árnyaltos (8 bites) képsorokká alakítsuk, a számítási igény csökkentésére (Fleit és Baranya, 2022). Annak érdekében, hogy majd valós sebességvektorokat kaphassunk, vizsgálatunk során a 900x900 kilométeres térbeli kiterjedésű radarfelmérés eredményeit kellett arányosítanunk a LSPIV elemzéshez, azaz definiálnunk kellett az elemzendő videók méter/pixel arányát. Ehhez egy lokális koordináta-rendszert vettünk fel először, mely mindkét tengelyén 0-tól 900 kilométerig tartott. Majd ezen a koordináta rendszeren

kitűztünk 4 pontot, melyek az egyes tengelyek mentén 300-300 kilométerre voltak egymástól, és ezeket piros x-ekkel jelöltük a videókon (6. ábra).

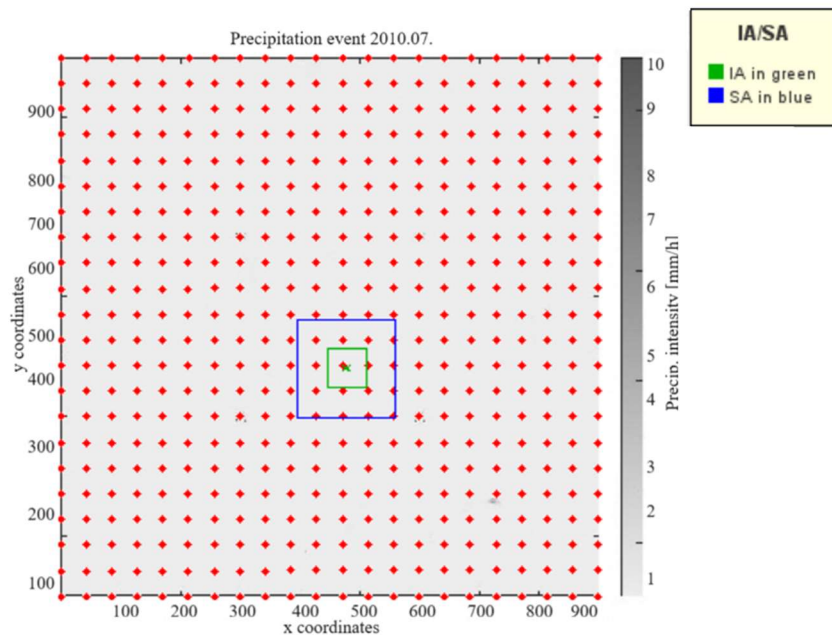


6. ábra Viszonyítási pontok helye

Ezt, a Fudaa-LSPIV programban a „orthorectification” fülön tudtuk elérni a „scaling”, azaz arányosítás kiválasztásával, ahol meg tudtuk adni a pixelek közötti távolságot méterbe átszámolva, majd ezen beállítások alapján transzformáltuk a képet a valós léptékű, lokális koordináta-rendszerünkbe. A számítás alapján 1630 m/pixel lett a feldolgozás aránya. Következő lépés az LSPIV számítási rácshálójának (grid) kiosztása volt, ami egy strukturált, egyenlő térközű, ortogonális rács. Ezt az LSPIV analízis fülön tudtuk megtenni, a próbálgatások után a legsikeresebbnek végül a 22x22 pontos rácsháló tűnt, így ezzel dolgoztunk tovább. Fontos, hogy csak azokon a területeken kell a rácsháló, amelyeken mozgás történhet. Az LSPIV módszer lényege, hogy minden egyes grid pont körül, a képeken mintákat azonosítunk egy az előre meghatározott lekérdezési területen (interrogation area - IA). A gyorsabb számítás érdekében minden grid pont körül egységesen felvesszünk egy úgynevezett nagyobb kiterjedésű, ún. keresési területet (search area - SA) is, ami egy becslési ablak és valószínűsíthetőleg minden esetben tartalmazza az IA elmozdult mintáját, mellőzve így a keresztkorreláció hasztalan kiszámítását az egész képen. Minél kisebb a SA, annál kevesebb számításra van szükség, azonban elég nagyoknak kell lennie, hogy tartalmazza a valódi elmozdulást. A videók megfigyelése és több méret beállítása után úgy találtuk, hogy az IA méretére 50 x 50 pixel, az SA méretére pedig 100 x 100 pixeles nagyságot adtunk meg. A 7. ábra szemlélteti a végleges grid kiosztást, valamint egy IA és

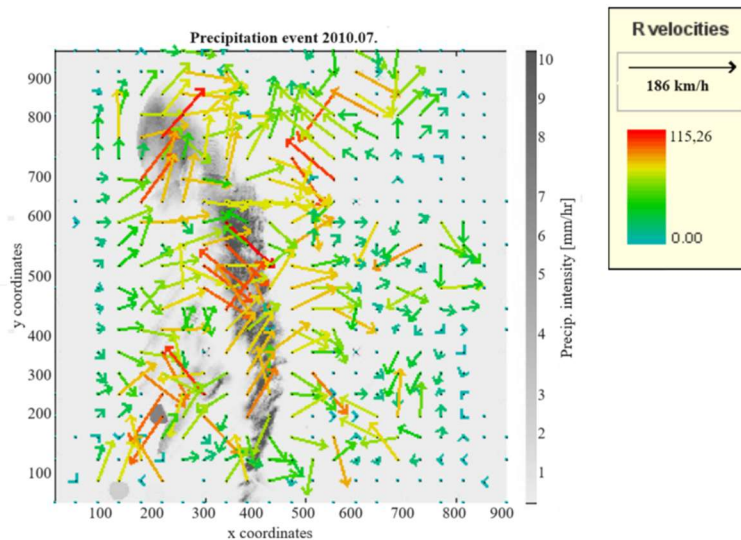


SA méretét. Az IA és az SA minden egyes grid pont köré elhelyezésre kerül az LSPIV-számítás során, a fent említett méretekkel, így eredményképpen minden grid pont sebességvektort fog kapni.



7. ábra LSPIV grid-kiosztás, valamint a beállított IA és SA méretének beállítása

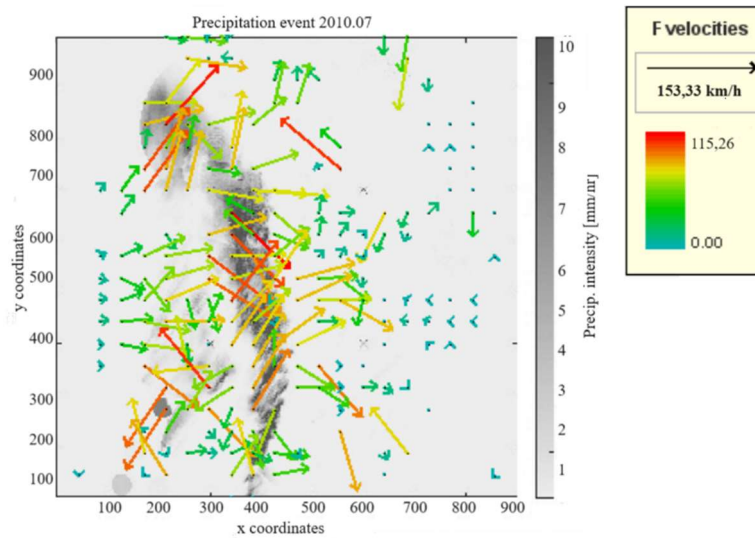
Miután kiválasztottuk a megfelelő rácshálót, az IA és az SA értéket, akkor a „calculation of the instantaneous result” paranccsal megjelenítjük a képenkénti, pillanatnyi sebesség vektor ábrákat (8. ábra).



8. ábra Sebességvektorok a csapdékmezőn

Lehetőségünk van a minimum és maximum értékek szabályozásával a hibás adatok kiejtésére, esetünkben azonban a minimum maximum értékkel nem foglalkoztunk, csak a számított vektorokhoz társított keresztkorrelációs értékek megengedett minimumára adtunk

0,6-os értékkel és maximumára 0,9-es értéket, hogy megsűrjűk a nyer eredményeket (9. ábra).



9. ábra Korrigált sebességvektorok a csapadékmezőn

Az eredmények validálására egyelőre kezdetleges szinten tudunk eljárni: az imént említett szűrési módszerrel elértük, hogy többnyire csak a kiválasztott csapadékmezőn maradt sebesség vektor, illetve manuálisan is megvizsgáltunk mindhárom hónap esetén több elmozduló csapadékmezőt és határoztuk meg így sebességüket kézzel. Ehhez az egyik képen kiválasztottunk egy pontot, majd a következő képen az elmozdult mintán ugyanarra a pontra koncentrálnak, ez egy pontosabb módszer lehetne, azonban nagyobb mennyiségű adatnál ezt lehetetlen lenne kivitelezni munkaigénye miatt, de kisebb képsoroknál ez is egy opció kezdetleges ellenőrzéshez.

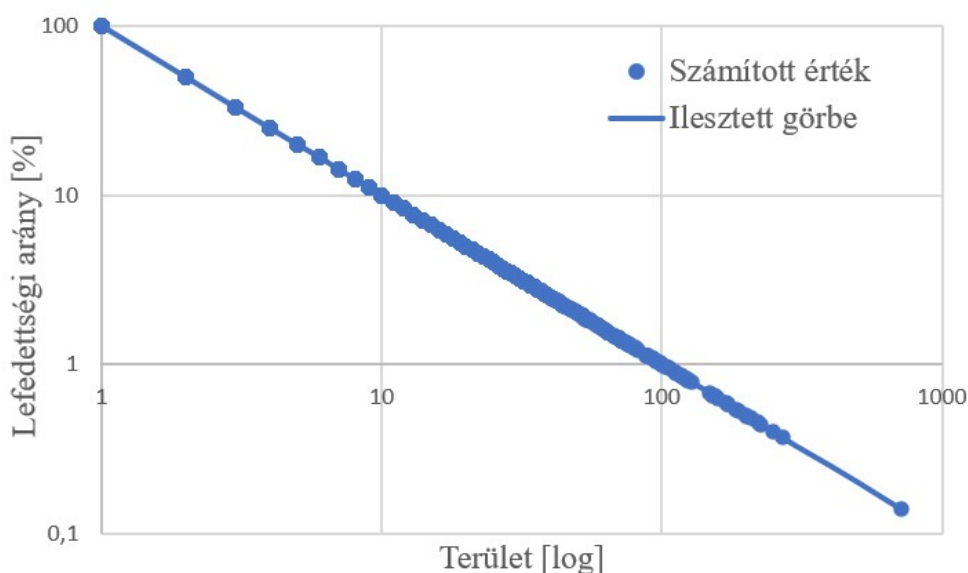
### 3.3 SBM

A videó felületei rendszerekben használják a Statistical Background Modelling-et (Stauffer és Grimson, 1999), a továbbiakban SBM, azaz statisztikai háttérmodellt. Az előteret fehérnek a háttérnek feketének ábrázolja, azaz bináris képet állít elő. A fekete a nem mozgó kép a fehér pedig a mozgó. Az SBM által detektált mozgó objektumok súlypontjának koordinátáit kiszámoltuk minden képkockán és az adott súlypont helyéhez koordinátailag legközelebb eső LSPIV grid pont sebesség vektorát társítottuk. Így lesz minden lehatárolt, különálló csapadékmezőnek egy darab súlyponti sebesség vektora (km/h) és területi kiterjedése (km<sup>2</sup>) minden egyes képkockán, mint eredmény.

## 4. Eredmények

### 4.1 GIS alapú statisztikák

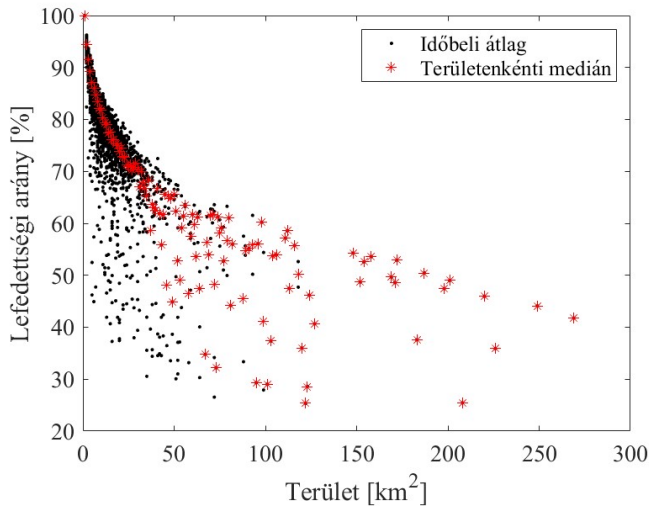
A korábban már említett módszerekkel összehasonlítottuk a vízgyűjtő terület lefedettségének és a csapadéknak az eloszlását. A maximum érték minden vízgyűjtőterületen 100%, azaz a vizsgált időszak alatt előfordul olyan, hogy a csapadék teljes egészében lefedi a vízgyűjtő területét. Megvizsgáltuk a minimum értékeket is, majd diagramon ábráztuk a terület és a lefedettségi arány függvényében (10. ábra). Az ábrán látható egy lineáris egyenes, ami eredetileg a  $100/x$  hiperbolának a görbéje logaritmus léptékben. Ez a szabályos, hiperbolikus eredmény annak tudható be, hogy a minimum lefedettség minden vízgyűjtő esetén egy cellányi a vizsgált időszakban. A maximum és a minimum vizsgálatából kapott eredmények azt mutatják, hogy a lefedettségi arány számítását helyesen végeztük el.



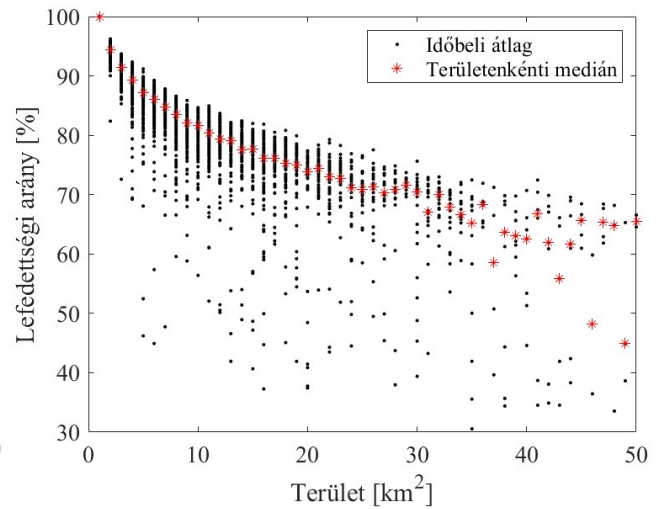
10. ábra Minimum értékek

Az csapadék területi lefedettségének időbeli átlagát, illetve az azonos területű vízgyűjtőkre vett területenkénti mediánját is ábráztuk, a terület és a lefedettség függvényében (11. , 12. ábra). A 11. ábrán jól megfigyelhető, hogy a terület növekedésével egyre kisebb a lefedettségi arány és egyre jobban szóródnak szét a mediánok. A 12. ábrán pontosabban leolvasható az előbb említett tendencia, egy  $\text{km}^2$ -es területnél a lefedettség még

100%, de a 10 km<sup>2</sup>-es vízgyűjtőterületeknél már csak 80%-os, a területenkénti mediánok a 30 km<sup>2</sup>-es terület nagyságtól kezdnek el az értékek ugrálni.



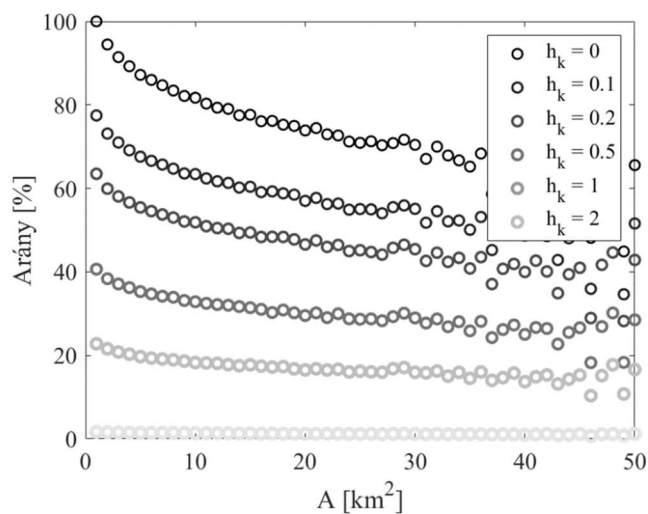
11. ábra Átlag lefedettség 300 km<sup>2</sup>-ig



12. ábra Átlag lefedettség 50 km<sup>2</sup>-ig

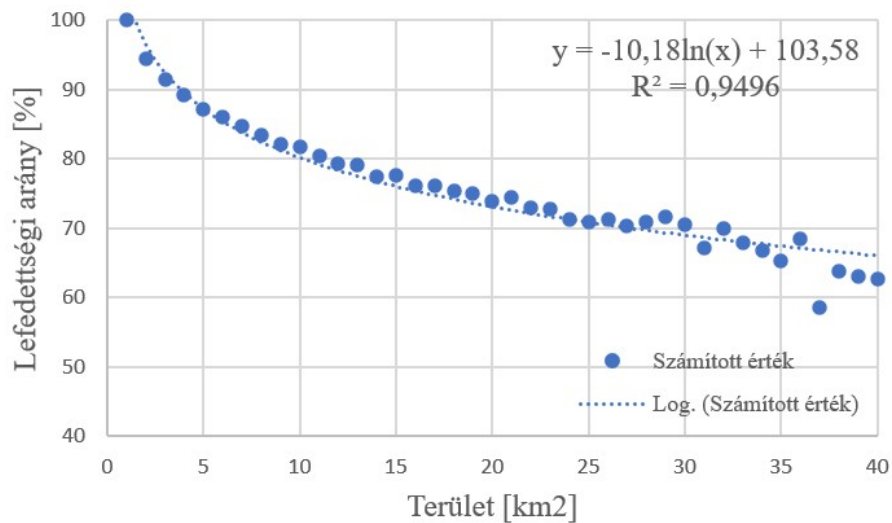
A medián értékek szóródásának növekedése annak tudható be, hogy a vízgyűjtő terület növekedésével egyre kevesebb vízgyűjtőre tudtuk elvégezni a számítást. Látható továbbá, hogy az azonos vízgyűjtőterület esetén is meglehetősen nagy lehet a lefedettségi arány szórása, 4 km<sup>2</sup> esetén is már 69-93 % között mozognak az értékek. Későbbi vizsgálatok során érdemes lehet vizsgálni, hogy a lefedettség aránya mutat-e valamilyen regionális változást.

A 13. ábrán az látható, hogy hogyan változnak a medián értékek, ha nullától emeljük a küszöbszint értékeket, a jelmagyarázatban látszik, hogy melyik esetben hány mm volt a küszöbszint. Ezen az ábrán a legfelső fekete görbe  $h_k = 0$  eset ugyanaz, mint ami a 11. és 12. ábrán piros csillaggal van jelölve.



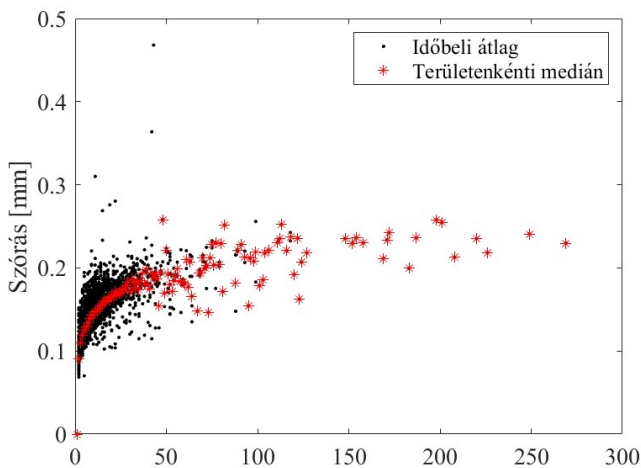
13. ábra Medián értékek különböző küszöbszintek esetén

A területi csapadékátlag, a mértékadó nagycsapadékok esetében, a terület növekedésével együtt csökken. Ha ezt nem vesszük figyelembe a tervezésnél, akkor annak igen jelentős anyagi következményei lehetnek. Ez az összefüggés kevésbé tisztázott, mint az intenzitás időbeli csökkenése. A különböző időtartamú csapadékokhoz különböző redukciós tényezőkkel kell számolni. A mi esetünkhöz tartozó redukciós tényező a 14. ábrán a jobb felső sarokban látható. Az általunk számított lefedettség arány a teljes időszakra vonatkozó átlagos értékeket tartalmazza. A későbbiekben lehetőség volna a különböző csapadékidőtartamokhoz tartozó görbesereg számítására is.

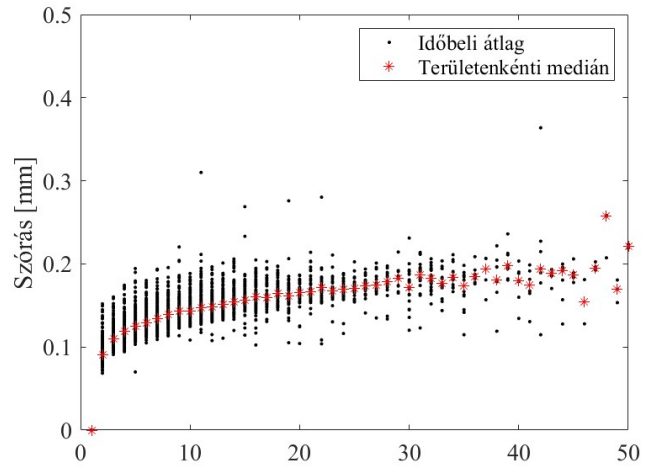


14. ábra Területi csapadék átlag és a redukciós tényező

A csapadék vízgyűjtőterületenkénti szórását is megjelenítettük grafikusán a terület függvényében. A 15. és 16. ábrán itt is megfigyelhető, hogy az értékek kezdetben a várható értékektől csak minimálisan, de egyre inkább térnek el. Az értékek a 30 km<sup>2</sup>-ig egy görbén



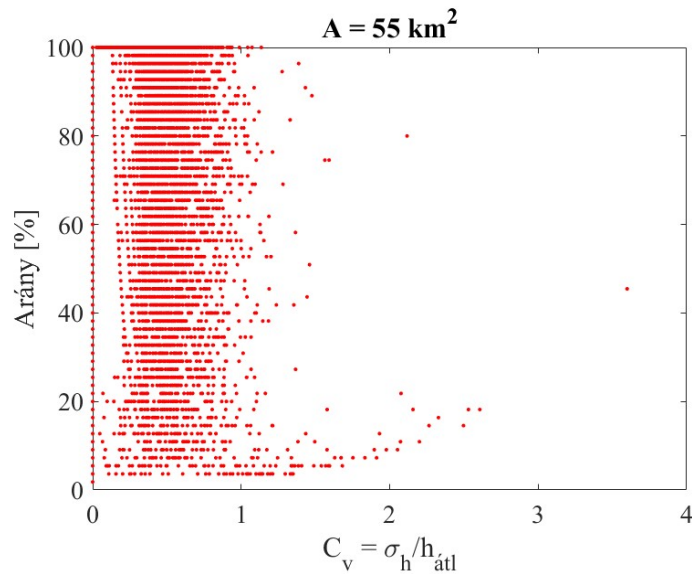
15. ábra Csapadék szórása 300 km<sup>2</sup>-ig



16. ábra Csapadék szórása 50 km<sup>2</sup>-ig

mozognak, majd utána kezdenek el szétszóródni, ami szintén azt igazolja, hogy a bizonytalanság a csökkenő vizsgálati elemszám következménye.

Megvizsgáltunk egy 55 km<sup>2</sup>-es vízgyűjtőt és összehasonlítottuk a szórás és az átlag arányát. Ezt a 17. ábra szemlélteti, a vízszintes tengelyen az úgynevezett  $C_v$  variációs tényező szerepel, azaz a szórás és az átlag aránya, a függőleges tengelyen a lefedettségi arány szerepel. Ezen az ábrán az látszik, hogy a lefedettségi aránytól nem függ az, hogy milyen a vízgyűjtőt érő csapadék variációja.



17. ábra Variációs tényező egy 55 km<sup>2</sup>-es területre

#### 4.2. LSPIV és SBM

Az LSPIV programban eredményül kapott minimális maximálás es átlagos sebességek eredményét az 1. táblázatban összegeztük. Ellenőrzésként a jobb oldali táblázatot kaptuk, amit a manuális formában előállított sebességvektorokból kaptuk meg. A két táblázatot összehasonlítva láthatjuk, hogy nagyságrendben a maximális értékek megegyeznek, ebből az következik, hogy a programban végzett szűrés és paraméter beállítások helyesnek mondhatók. A minimális értékeknél a táblázatok nem össze hasonlíthatóak, mivel az általunk beállított szűrés eredményébe azok az eredmények is beletartoznak, ahol nincs is csapadékmező mozgás, emiatt az átlagos sebességet sem tudjuk reálisnak tekinteni, de a sebességek nagyságrendjei egyértelműen valódinak tekinthetők.

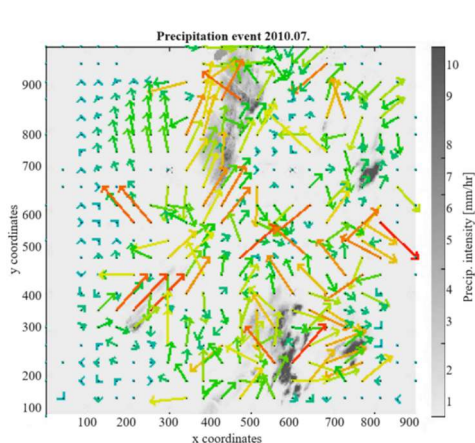


	Szűrés utáni eredmények		
	minimum [km/h]	átlag [km/h]	maximum [km/h]
2010.07	0	11,39	115,26
2013.05	0	13,65	115,26
2013.06	0	12,12	114,45

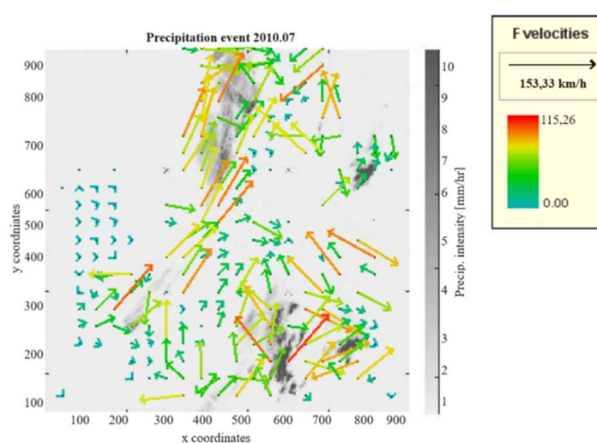
	Manuális eredmények	
	minimum [km/h]	maximum [km/h]
	12,06	130,82
	11,86	146,63
	8,92	147,67

1. táblázat Sebességvektorok nagysága

Ezeket az adatokat, grafikusan is megjelenítettük, a 18. ábrán látható, hogy a sebességvektorok még nyers változatban vannak, míg a 19. ábrán már a szűrt vektorok.

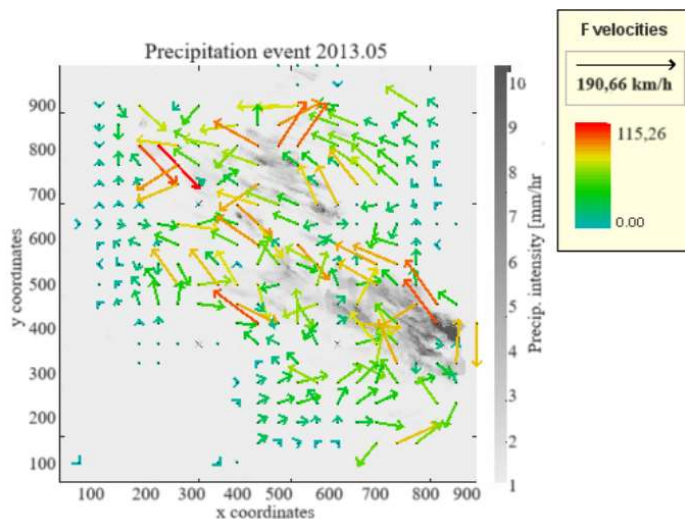


18. ábra Nyers sebességvektorok

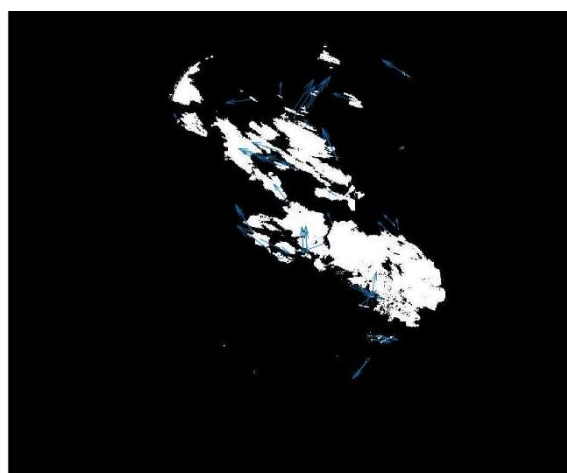


19. ábra Korrigált sebességvektorok

A 20. ábrán az LSPIV program által szűrt egy képkocka látható, a 21. ábrán pedig az ugyanabban az időpillanatban SBM eredménye látható.



20. ábra Szűrt csapadékmező



21. ábra SBM eredménye

Látszik, hogy a csapadékmezők helye egybevág a két képen, azaz jól működött a mozgás detektálása az SBM-ben. Az is látható, hogy a jobb oldali a sebességvektorok száma csökkent a bal oldaléhoz képest, ugyanis itt már csak azok vannak fent, amik a legközelebbi szomszéd interpolációval a detektált mozgó csapadékmezők súlypontjára kerültek az

interpoláció miatt. Azaz így kiszűrtünk sok olyat a bal oldali ábra eredményéből, amik téves vektorok voltak, hisz láthatóan nincsenek ott csapadékmezők, amik mozogtak volna, vagyis azok a sebességvektorok ide már nem is öröklődtek. Más szóval az egyik előnye a SBM módszernek, hogy tovább szűrheti az eredményeket, ha kombináljuk az LSPIV módszerrel.



## 5. Összefoglalás

A racionális módszer a hidrológia egyik legrégebbi eljárása. Alkalmazhatóságával kapcsolatban azonban több probléma is felmerül, az eredményül kapott mértékadó vízhozam erősen függ több tényezőtől is. A bizonytalanságnak három fő forrását érdemes kiemelni. Egyrészt jelentős hatással bír az alkalmazott lefolyási hányad értéke, másrészt fontos, hogy aktuális és pontos csapadékmaximum függvényekkel dolgozzunk. A harmadik tényező, hogy a módszer alkalmazhatóságának feltételei teljesültek-e a két, csapadékra vonatkozó kritériummal kapcsolatban. Utóbbira vonatkozóan végeztünk vizsgálatokat az itt bemutatott dolgozatban.

A vizsgált adatok németországi, 1x1 km-es felbontású, felszíni radar adatok. A vizsgált időszak 2006-2016, az adatok időbeli felbontása órás léptékű. Az ascii formátumú adatokat könnyen tudtuk kezelni MATLAB-ban, bár az adatok mennyiségéből (méretéből) adódóan a számítások végzése bizonyos esetekben hosszadalmas volt.

A vizsgálatok első részeként a Weser folyó 4044 részvízgyűjtőjére végeztünk számításokat. Az eredményekből látható, hogy már 1 km<sup>2</sup>-es vízgyűjtő méret felett is drasztikusan csökken a csapadékkal fedett területek és a vízgyűjtő teljes területének aránya. Ez alapján a racionális módszer alkalmazhatósági határa 1 km<sup>2</sup> alatt van, ennek pontos felderítéséhez azonban jobb térbeli felbontású radar adatokra lenne szükségünk. 10 km<sup>2</sup> esetén (ami a hazai javasolt alkalmazhatósági határ) a lefedettség arány átlagosan 85% körülire csökken. Ennek hatása a mértékadó vízhozamra jelentős lehet.

A későbbiekben célszerű volna hazai vízgyűjtőkre is elvégezni a vizsgálatokat, ennek legfőbb akadályá, hogy nagy mennyiségben nem kérhetők ki korrigált radar adatok kutatási célra. A németországi adatokat használva továbbfejleszthetők a számítások. Az egyes vízgyűjtők idősorait felhasználva előállíthatók a bizonyos csapadék időtartamokhoz tartozó területi redukciós tényezők görbéi. A görbék figyelembevételével meghatározható, hogy a csapadék területi lefedettsége milyen hatással van a racionális módszer végeredményére. Vizsgálható továbbá az is, hogy a redukciós tényező mutat-e regionális mintázatot. A jövőben célszerű volna egy átfogó érzékenység vizsgálattal bemutatni, hogy a fent felsorolt három bizonytalansági faktor pontosan milyen hatással lehet tervezéskor a mértékadó vízhozam értékére.

A vizsgálatok második felében azt tapasztaltuk, hogy az LSPIV és SBM módszerek kombinálásának láthatóan van potenciálja, azonban a radarfelmérések adatai sok esetben nem tették lehetővé, hogy pontos képfeldolgozás történjen. Ugyanis sokszor volt, hogy a

radar egyik időpontját ( $t_0$ ) közvetlenül követő időlépésben ( $t_0+1$  hr) teljesen más mintázatok voltak, majd még eggyel későbbi időpontban ( $t_0+2$  hr) ismét visszatért a  $t_0$  mintázata, persze elmozdulva, majda következő időpontokban is következetesen jelen volt és mozgott tovább. Azaz sokszor olyan volt, mintha véletlen zajok egy-egy véletlenszerű pillanatra teljesen megváltoztatták a felvételek képét, mely a radar jelek zavarásával magyarázható. Az LSPIV erre különösen érzékeny, mivel egymás követő képkockák között keresi az azonos mintázatokat. Ezen kívül továbbá gyakran lokális anomáliák is felléptek és szabályos kör alakú jeleket, illetve csapadékmezőket láttunk felbukkanni, majd hirtelen eltűnni. Mindennek ellenére az LSPIV programban a manuális sebesség ellenőrzés alapján nagyságrendileg egyeztek a kapott LSPIV sebesség eredmények. A jövőben, a kutatást folytatva az eredmények elemzésének automatizálásával és fejlesztésével statisztikák készíthetők a csapadékmezők összetartozó méret és terjedési sebesség adatairól, illetve ezek időbeli alakulásáról is. A kutatást tovább lehet fejleszteni jobb radar adatok beszerzésével, vagy az LSPIV pontosabb paraméterezésével.

## Irodalomjegyzék

- Dingman, S. L. (2015). *Physical Hydrology*. 3rd edn, Waveland Press, Long Grove, Illinois.
- DWD Climate Data Center (CDC): Historical hourly RADOLAN grids of precipitation depth (GIS-readable), v. 2. ( dátum nélk.). <https://cdc.dwd.de/portal/>
- Ermilov A., Fleit G., Conewski S., Guerrero M. (2022).  
Bedload transport analysis using image processing techniques.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s11600-022-00791-x>
- Fleit G., B. S. (2022). LSPIV analysis of ship-induced wave wash.
- Fujita I, Muste M, Kruger A. (1998). Large-scale particle image velocimetry for flow analysis in hydraulic engineering applications. *Journal of Hydraulic Research*.  
<https://doi.org/10.1080/00221689809498626>
- Grimaldi S., Petroselli A. (2015). Do we still need the Rational Formula? An alternative empirical procedure for peak discharge estimation in small and ungauged basins. *Hydrological Sciences Journal*, 67–77.  
<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02626667.2014.880546>
- Hadvári M., Szegedi Cs., Csirmaz K., Németh P. (2023). *Országos meteorológiai szolgálat időjárási radarhálózatának mérései*.  
[https://www.met.hu/ismertetek/radar\\_ismerteto.pdf](https://www.met.hu/ismertetek/radar_ismerteto.pdf)
- Hajnal G., Koris K. (2014). *Hidrológia I.- Fizikai hidrológia*. Budapest.
- Internet1 (2021).  
[https://opendata.dwd.de/climate\\_environment/CDC/help/RADOLAN/Unterstuetszungsdokumente/Unterstuetszungsdokument\\_Verwendung\\_von\\_RADOLAN\\_RADKLI\\_M\\_Produkten\\_in\\_GIS\\_Software.pdf](https://opendata.dwd.de/climate_environment/CDC/help/RADOLAN/Unterstuetszungsdokumente/Unterstuetszungsdokument_Verwendung_von_RADOLAN_RADKLI_M_Produkten_in_GIS_Software.pdf)
- Kontur I., Koris K., Winter J. (2003).  
*Hidrológiai számítások. 3. kiadás*. Gödöllő: Linográf Kft.
- Koris, K. (2021). *Magyarország kisvízfolyásainak árvizei*. Országos Vízügyi Főigazgatóság, Budapest.
- Kreklow J., Tetzlaff B., Burkhard B., Kuhnt G. (2020).  
Radar-based precipitation climatology in Germany—developments, uncertainties and potentials. *Atmosphere (Basel)*. 11. *Atmosphere*.  
<https://doi.org/10.3390/atmos11020217>
- Le Coz J., Jodeau M., Hauet A., Marchand B., Le Boursicaud R. (2014).  
Image-based velocity and discharge measurements in field and laboratory river engineering studies using the free FUDAA-LSPIV software. *River Flow*.
- M. Muste, I. Fujita, A. Hauet. (2008). Large-scale particle image velocimetry for measurements in riverine environments. *Water Resources Research*.  
<https://doi.org/10.1029/2008WR006950>
- Le Coz, J., Jodeau, M., Hauet, A., Marchand, B., Le Boursicaud, R. (2014) *Image-based velocity and discharge measurements in field and laboratory river engineering studies using the free FUDAA-LSPIV software*. River Flow 03/09/2014-05/09/2014, Lausanne, Switzerland.
- Fujita I, Muste M, Kruger A (1998) *Large-scale particle image velocimetry for flow analysis in hydraulic engineering applications*. *J Hydraul Res* 36(3):397–414.  
<https://doi.org/10.1080/00221689809498626>
- Staufer C, Grimson WEL (1999) *Adaptive background mixture models for real-time tracking*. In: Proceedings. 1999 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Cat. No PR00149), 1999, pp. 246–252 Vol. 2, doi:  
<https://doi.org/10.1109/CVPR.1999.784637>